Governare l’incertezza: Lincei

Anna Perrotta - Enrico Rogora

Primo Incontro

Prima attività

Dai una breve definizione dei seguenti termini:

EVENTO CASUALE:

PROBABILITA’:

EVENTO INCERTO:

Seconda attività

Scrivi un numero a caso

Riporta una successione di teste (T) e croci (C) osservate in un esperimento immaginario consistente nel lancio ripetuto di una moneta non truccata

Lancia una moneta 20 volte e riporta la successione di teste (T) e croci (C) che osservi

Scegli una ruota e fai girare 20 volte lo spinner (graffetta) riportando la successione degli esiti (colori)

Terza attività (con la calcolatrice)

Immagina di prendere la calcolatrice e di premere il tasto 1(8,1)[1]. Cosa apparirà sullo schermo?

[Si distribuiscono le calcolatrici]
Cosa è apparso?

Immagina di premere la successione di tasti (1,1)+(3,2)+(8,2)+(9,5) [$\sqrt{2}$]. (Nota la richiesta di premere il tasto = alla fine dell'inserimento).

Cosa credi che apparirà sullo schermo?

Premi i tasti indicati. Cosa è apparso?

Ripeti l'attività precedente con riferimento alla combinazione di tasti
(1,1)+(9,3)+(9,5) [π]

Cosa credi che apparirà sullo schermo?

Premi i tasti indicati. Cosa è apparso?

Quarta attività (con la calcolatrice)

Come si usa e a cosa serve la combinazione di tasti (1,1)+(8,4) cioè la funzione `Pol` senza cercare il manuale. Scrivi un manuale d'uso per la funzione.

[1] Con (8,1) si indica che la posizione del tasto è sull'ottava riga dall'alto e sulla prima colonna da sinistra.

Quinta attività

Cosa credi che succeda premendo la successione di tasti (1,1)+(9,2)+(9,5)?

Cosa succede?

Cosa succede ripetendo la valutazione

Scrivi un manuale d'uso per la funzione `Ran#`

Ripeti le precedenti attività con riferimento alla successione di tasti (1,2)+(9,2)+(9,5)? che operazione esegue la funzione `RandIt`?

Sesta attività (attività da svolgere a coppie)

Primo caso: A sceglie uno spinner a due colori da usare nell'attività; fa girare lo spinner 20 volte e comunica gli esiti a B; B trascrive i risultati e formula un'ipotesi sullo spinner che li ha prodotti.

Secondo caso: A per 20 volte sceglie uno spinner a due colori da usare (senza comunicarlo a B); ogni volta che lo sceglie lo fa girare una volta e comunica l'esito a B; B trascrive i risultati e formula un'ipotesi sull'unico spinner che secondo lui è stato utilizzato da A.

Terzo caso: A per 20 volte usa lo spinner a 3 colori per scegliere in maniera consistente lo spinner da usare (senza comunicarlo a B); ogni volta fa girare lo spinner selezionato e comunica l'esito a B; B trascrive i risultati e formula un'ipotesi sull'unico spinner che secondo lui è stato utilizzato da A.

Intermezzo

Cari Colleghi insegnanti,
è passato un po' di tempo dall'incontro all'Accademia ma non ci siamo scordati di voi!
Innanzitutto vi inviamo il link al materiale che abbiamo preparato.
http://programmi.wikidot.com/lincei2019
Troverete:

- Prima scheda di lavoro: Riassunto delle attività che abbiamo svolto insieme durante l'incontro. La descrizione è molto stringata e non tutto quello riportato nella scheda è stato effettuato in classe. Vi chiediamo i) di commentare le attività, segnalando in particolare i dubbi che avete sul loro significato e sulla opportunità di replicarli in classe. ii) di segnalare quello che non è chiaro e dovrebbe essere spiegato meglio.
  Inviate il commento e le segnalazioni entro il 15 Novembre ai nostri indirizzi:
  rogora@mat.uniroma1.it
  annaxrotta@gmail.it
- Estratto da Teaching Probability: E' la digitalizzazione della prima parte del libro che abbiamo citato durante l'incontro e che contiene una proposta molto interessante per insegnare la probabilità alle scuole secondarie, sia di primo che di secondo grado. Vi chiediamo di dargli una lettura e di segnalarci le parti che vi sembrano discutibili, sia in base alla vostra esperienza di insegnamento, sia alla luce di quanto abbiamo visto e detto durante l'incontro ai Lincei.
  Inviate i commenti e le segnalazioni entro il 22 Novembre ai nostri indirizzi:
  rogora@mat.uniroma1.it
  annaxrotta@gmail.it
- spinner per le esercitazioni e altro materiale: E' il link al sito del libro, dove troverete i file pdf da stampare per avere gli spinner che abbiamo usato in classe, quelli che vengono usati nelle attività previste dal libro e altro materiale.
- Articolo Fischbein: Si tratta di un articolo che discute il problema dell'assenza di intuizione probabilistica e di come l'insegnamento dei primi rudimenti del calcolo delle probabilità rischi di compromettere la poca intuizione che abbiamo, invece di migliorarla. Lo scopo del laboratorio è quello di usare materiali per accompagnare l'insegnamento dei primi rudimenti del calcolo delle probabilità, favorendo lo sviluppo dell'intuizione probabilistica invece di bloccarla. Non chiediamo di svolgere attività sull'articolo, ma consigliamo la sua lettura.
- Questionario tratto dall'articolo Fischbein e tradotto in italiano: Nell'articolo vengono proposti due questionari per testare l'intuizione probabilistica elementare. Abbiamo tradotto in italiano il primo che, nelle intenzioni degli autori, potrebbe essere

distribuito agli studenti della scuola secondaria di secondo grado prima che gli vengano insegnati i rudimenti del calcolo delle probabilità. Vi chiediamo: i) se secondo voi il questionario può essere distribuito ai vostri studenti prima di affrontare la probabilità. ii) quali sono i termini che secondo voi potrebbero creare problemi di interpretazione (p.e. il termine evento) e come si potrebbero sostituire o spiegare brevemente. iii) se siete disponibili a distribuirlo in una delle vostre classi, prima di parlargli di probabilità.

- Volume speciale su De Finetti, in particolare l'articolo alle pp. 431-462: Qualcuno di voi ci ha chiesto dei riferimenti all'opera di de Finetti. Abbiamo messo il link al volume commemorativo che l'Unione Matematica gli ha dedicato. Nel volume sono ristampati alcuni lavori di de Finetti e alcuni articoli introduttivi. Tutti gli articoli di de Finetti sono estremamente consigliabili. In particolare, quello riprodotto alle pp. 431-462 è focalizzato su problematiche che abbiamo affrontato e che affronteremo nel laboratorio.

Infine vi chiediamo di progettare un'attività da svolgere in classe con uno dei materiali proposti (moneta, spinner, calcolatrice) per dar senso e poi affrontare il seguente problema, tratto dal documento CIIM *La matematica per le altre discipline, prerequisiti e sviluppi universitari* che trovate on line all'indirizzo web http://www.umi-ciim.it/wp-content/uploads/2013/10/MATTONCINIcrop-finale.pdf

Problema: *Qual è il giusto prezzo da pagare per far parte di un gioco in cui si può vincere 25euro una volta su 5 e 10euro con probabilità doppia?*

Secondo incontro

1. Osservazioni sul precedente incontro
2. Schede per `RandomInt#`
3. Il paradosso di Monty Hall
4. Suggerimenti da *Teaching Probability*
5. Scheda sul problema: *Qual è il giusto prezzo da pagare per far parte di un gioco in cui si può vincere 25euro una volta su 5 e 10euro con probabilità doppia?*

1 Osservazioni sul precedente incontro

Numeri a caso

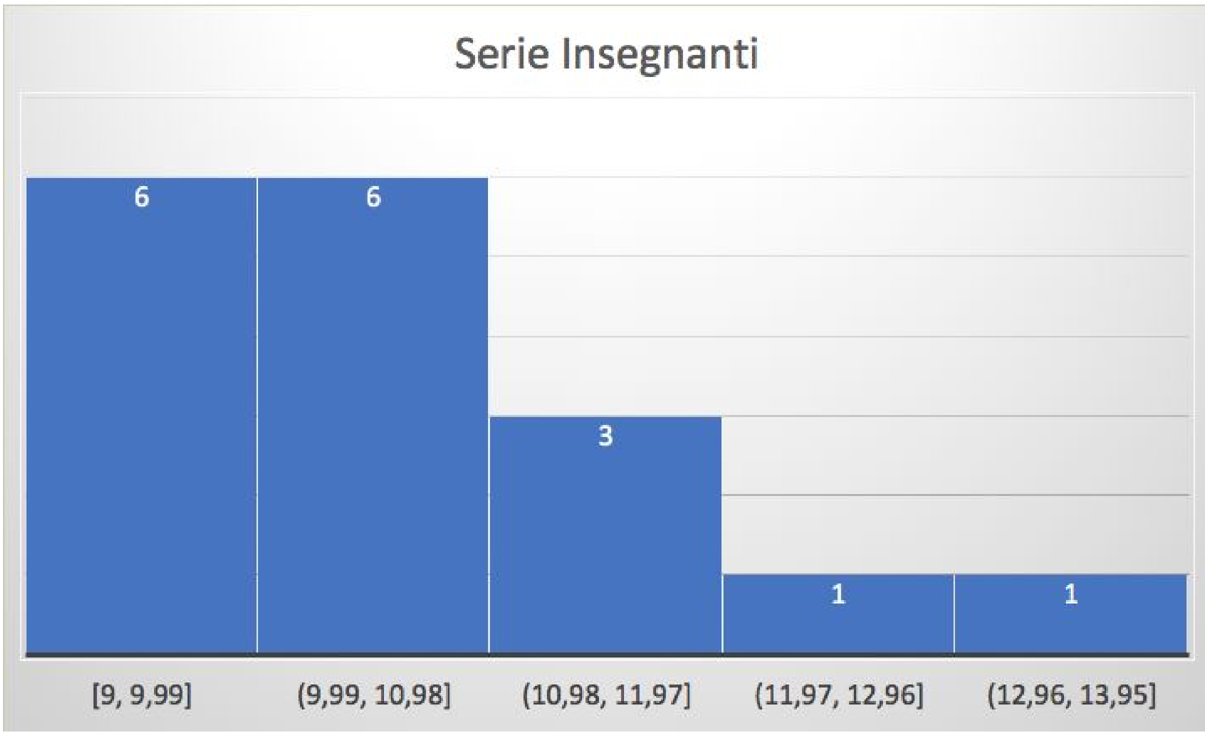
I dati raccolti sono:
11; 16; 785; 25; 35; 27; 2+3i; 10; 3,14; 10; 12; 12; 99; 3; -3; 7
Qual è lo scopo? Mettere in evidenza la necessità di precisare l'"esperimento": quali sono i valori ammessi? cosa si intende per "a caso"?

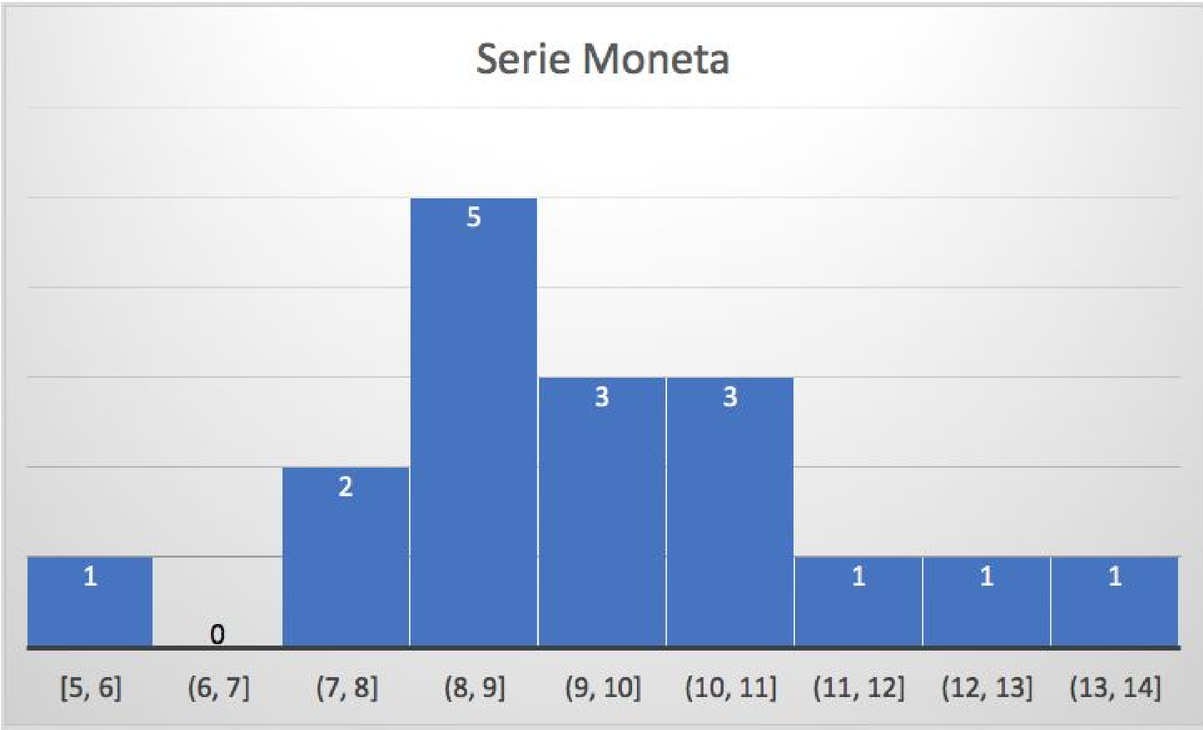
Lanci della moneta: Esperimento immaginario; Esperimento reale; Simulazione con calcolatrice.

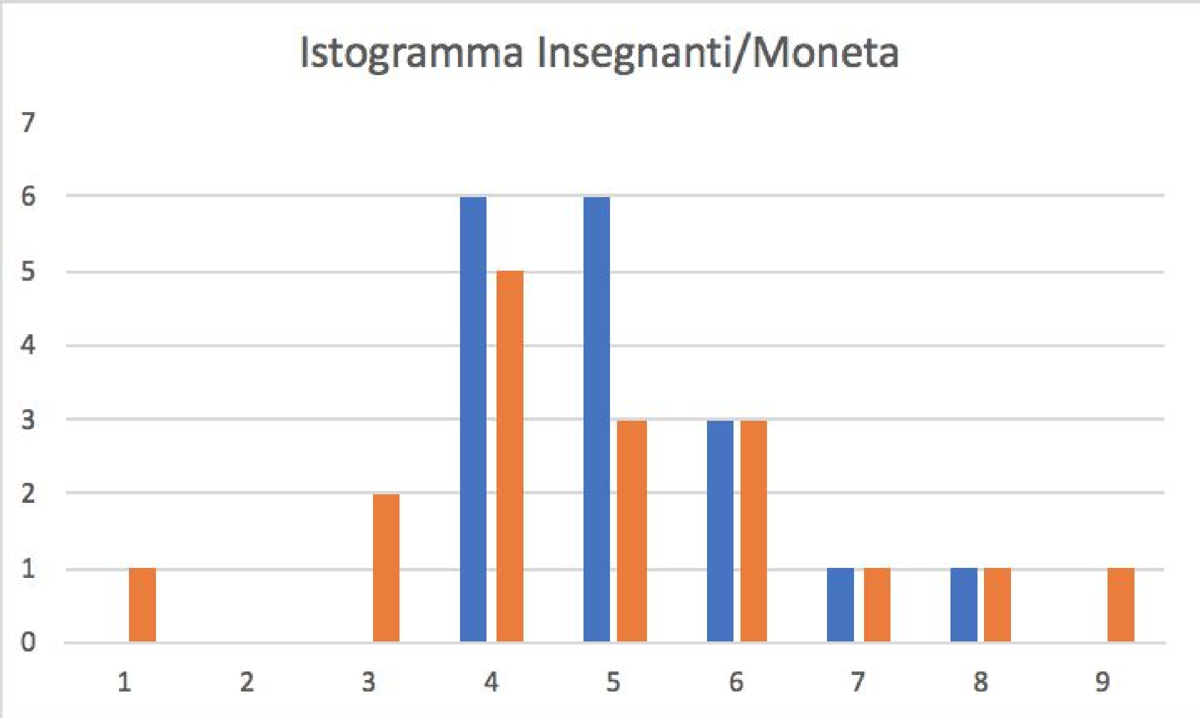
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	N. Teste	Media	TTTTT	CCCCC
T	T	T	C	C	T	T	T	C	C	C	T	T	C	T	C	C	T	C	T	11	10,1	NO	NO
T	T	T	C	T	C	C	T	T	C	C	C	C	T	C	T	T	C	T	T	11		NO	NO
T	T	C	C	C	T	T	T	T	C	C	C	C	T	C	T	C	C	T	C	9		NO	NO
T	C	C	T	C	T	T	C	C	T	C	T	C	C	C	T	C	T	C	T	9		NO	NO
T	T	C	C	T	T	C	T	T	T	T	C	C	C	T	C	C	C	C	C	9		NO	SI
T	T	T	T	C	C	T	T	T	C	C	T	T	C	C	T	T	T	T	C	13		NO	NO
T	T	C	C	C	T	C	T	T	C	T	T	C	C	C	T	C	T	C	T	10		NO	NO
C	T	T	C	T	C	C	C	T	C	T	C	T	C	C	T	T	T	T	C	10		NO	NO
C	C	T	T	T	C	C	T	C	T	C	C	T	T	C	C	C	T	C	T	9		NO	NO
T	C	C	T	T	C	C	C	T	T	C	T	C	C	T	T	C	C	T	T	10		NO	NO
T	T	C	C	C	T	T	C	T	C	C	C	T	T	C	C	T	T	C	T	10		NO	NO
C	C	T	C	T	C	T	T	T	C	T	C	C	T	C	C	C	T	C	T	9		NO	NO
C	T	T	T	C	T	T	C	C	C	T	T	C	C	C	T	T	C	C	C	9		NO	NO
T	T	C	T	C	C	C	T	T	C	T	T	T	T	C	C	T	C	C	T	11		NO	NO

T	T	T	C	C	T	C	T	T	T	T	T	C	C	C	C	T	T	C	T	12		SI	NO
T	T	C	T	C	T	C	C	C	T	C	C	T	T	T	T	C	T	C	C	10		NO	NO
T	C	T	C	T	T	T	C	C	C	T	C	C	T	C	C	T	C	T	T	10		NO	NO
T	T	T	C	C	C	T	T	C	T	T	C	T	C	C	C	C	C	T	T	10	9,9	NO	SI
T	C	C	C	T	C	T	C	T	T	C	C	C	T	T	C	C	T	C	T	9		NO	NO
T	C	T	C	C	T	T	C	T	T	T	C	C	C	C	C	C	C	T	C	8		NO	SI
T	T	C	C	T	T	T	T	T	T	T	T	C	C	T	T	T	C	C	C	13		SI	NO
T	C	C	T	C	T	C	T	T	T	C	C	T	C	C	T	C	T	T	T	11		NO	NO
T	T	C	C	C	C	C	T	C	C	C	C	C	C	C	T	C	C	T	C	5		NO	SI
T	T	C	T	C	T	T	T	C	C	T	C	C	C	C	T	T	C	T	C	10		NO	NO
T	C	T	C	T	C	C	T	T	C	C	T	T	T	C	C	T	T	T	C	11		NO	NO
C	C	T	T	T	T	C	T	T	T	T	C	T	T	T	T	C	T	T	C	14		NO	NO
T	T	C	C	C	C	T	T	T	C	C	C	T	C	C	T	T	T	C	C	9		NO	NO
C	T	T	C	C	T	C	C	C	C	C	T	T	C	T	T	C	T	C	T	9		NO	SI
C	C	C	T	C	T	C	C	T	T	T	T	C	T	C	T	T	T	T	T	12		SI	NO
C	C	C	C	T	C	C	C	T	T	T	T	T	T	C	T	T	T	T	C	11		SI	NO
C	T	T	T	T	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	T	T	T	T	8		NO	SI
C	C	T	T	C	T	T	C	C	C	T	C	C	T	T	T	C	C	T	C	9		NO	NO
C	T	T	C	T	C	T	T	C	T	C	C	T	T	T	C	T	C	C	C	10		NO	NO
C	C	T	C	T	T	C	C	T	C	C	T	T	C	T	C	C	T	C	T	9		NO	NO
C	T	C	C	C	T	C	T	C	T	T	T	T	C	C	T	T	C	C	T	10	9,4	NO	NO
C	T	T	T	C	T	T	C	C	C	T	T	C	T	C	C	C	C	C	C	8		NO	SI
T	T	T	C	C	C	T	C	T	T	C	C	C	T	T	C	C	C	C	T	9		NO	NO
T	T	C	C	C	C	C	C	T	T	C	T	T	C	C	T	C	T	T	T	10		NO	SI
T	T	C	T	C	C	C	T	C	T	C	C	C	T	T	T	C	T	C	T	10		NO	NO

Istogramma delle teste







Qual è lo scopo? Cominciare ad indagare sulle differenze tra successioni casuali reali, simulate e immaginate. Discutere sui possibili test di casualità. Qui abbiamo guardato alla distribuzione del numero delle teste osservate e alla presenza di successioni lunghe di teste o di croci consecutive.

2. Attività sulla funzione `RandInt#`

Useremo, in questa sperimentazione, la funzione `RandInt#` della calcolatrice.
Si attiva premendo il tasto `(1,2)`, che permette di selezionare l'opzione rossa dei tasti e successivamente il tasto `(9,2)`. Parte delle attività dello scorso incontro erano mirate a familiarizzare con la calcolatrice, in modo da usarla proficuamente nell'incontro di oggi.
La funzione `RandInt#` ha due argomenti (interi).
Eseguendo i comando `RandInt#(m,n)` `(m<n)` la calcolatrice restituisce un intero compreso tra `m` e n (cioè uno fra `n-m+1` possibili valori), ma quale di questi interi venga restituito a ogni esecuzione non è noto prima dell'esecuzione stessa.
Il numero restituito ad ogni pressione è quindi un *numero aleatorio* (parte delle attività dello scorso incontro erano mirato a dar significato al termine aleatorio, cioè *incerto*).
Eseguendo in particolare `RandInt#(m,n)` otteniamo ad ogni esecuzione `0` o `1.`
Identificando `0` con croce e 1 con testa abbiamo un processo che produce osservazioni analoghe a quelle prodotte dal lancio di una moneta.
La costruzione dell'algoritmo che implementa la funzione `RandInt#()` pone grande attenzione nel produrre risultati praticamente indistinguibili da quelli prodotti dal lancio di una moneta. Possiamo quindi ipotizzare che la funzione `RandInt#()` `permetta di` implementare nella calcolatrice un processo a tutti gli effetti indistinguibile dal lancio di una moneta non truccata.
Se vogliamo raccogliere evidenza su questa ipotesi possiamo ripetere più volte l'operazione e memorizzare i risultati in una opportuna struttura dati.

Scheda 1

La calcolatrice mette a disposizione un piccolo foglio elettronico. Dal menu principale, seleziona la modalità `Spreadsheet` selezionando 8 oppure muovendosi con il cursore e selezionando l'icona `Spreadsheet` con il tasto `= (9,5)`.
Muoviti con il cursore sulla cella `A1`. Premi il tasto `OPTN (2,1)` e seleziona la funzione `Fill Formula` selezionando 1.
Inserisci, nella finestra che viene aperta, l'istruzione `RandInt#(0,1)`, premi il tasto = (9,5) e, nella riga successiva, aggiorna il `Range` di riempimento selezionando `A1:A20`. Dopo aver premuto due volte il tasto `= (9,5)` puoi vedere, muovendoti con il cursore, il risultato dei 20 lanci simulati.

Scheda 2

Raccogli, nella colonna B, il risultato della simulazione di 20 lanci ripetuti di un dado.

Scheda 3

Posiziona il cursore nella colonna C e calcola, cercando tra le funzioni accessibili attraverso il tasto `OPTN`, la media dei valori contenuti nella colonna A, `(Mean(A1:A20))` la media dei valori contenuti nella colonna B, il conteggio degli 1 nella colonna A (`Sum(A1:A20)`).

Attenzione. Può succedere di aver posizionato il cursore all'inizio di una colonna ma di non riuscire ad accedere, premendo il tasto `OPTN` (2,1), al menù di inserimento di una formula. Ciò è probabilmente dovuto al fatto che sei già nella modalità di inserimento. Per uscirne, inserisci un numero qualsiasi, premi il tasto = (9,5) e, con il cursore all'interno del foglio di lavoro, premi il tasto `OPTN` per accedere al menu `Fill Formula`.

3. Attività sul Paradosso di Monty Hall.

Il paradosso di Monty Hall può essere presentato a partire da uno dei seguenti video:
Video tratto da "Numb3rs"

https://www.youtube.com/watch?v=PJWmi7Ovaag

Video tratto dal film "21":

https://www.youtube.com/watch?v=nYX8DMG8_yw

Si può riflettere sulla soluzione proposta nei video o leggere qualche commento sotto i video.
Ad esempio ce n'è uno che, fra l'altro, dice:
Per testare la validità della maggiore probabilità affermata del filmato dovrei averne conferma ripetendo un numero significativo di volte l'esperimento. In realtà quando si sceglie una carta la probabilità di trovare l'auto é una su tre. Poi scoperta una delle tre carte (se non si ha avuto la fortuna di trovare l'auto al primo colpo) la probabilità di trovare l'auto sulle due

rimanenti é una su due che scende a zero se l'auto é già stata trovata al primo colpo. Le probabilità di trovare l'auto in una delle due carte resta la stessa sia che cambi carta che la mantenga . **Per avere conferma che le probabilità sono una su due** (escludendo dal conteggio le volte in cui si scopre l'auto al primo tentativo) **basterebbe fare ripetere il gioco un numero significativo di volte e contare le ipotesi favorevoli rispetto a quelle totali**. Ditemi dove sbaglio grazie."

Risposta di un altro utente:

«Perfetto, ripeti il gioco 20 volte con un amico e vedrai che ti sbagli. Tranquillo, non c'è bisogno che provi; basta un minimo di logica. Mettiamo che giochi 100 partite per due volte senza MAI cambiare. Banalmente, vincerai circa 1/3 delle volte. Ora chiediti: cosa sarebbe successo se invece avessi deciso di cambiare ogni singola volta? Semplice, avresti vinto tutte le volte che invece hai perso adottando la strategia di non cambiare mai, ovvero i 2/3 delle volte.»

Chi dei due ha ragione?

Si può provare con 3 carte da lasciare scoperte per vedere il risultato. Si lancia poi un dado ed in base al numero uscito (modulo 3) si sceglie una carta. Si conta poi quante volte in 20 prove si vince cambiando carta…..

Forse, come evidenziato nella risposta al commento del video di youtube, la risposta potrebbe essere ancora più chiara se, anziché 3 porte si immaginano 100 porte dietro ad ognuna delle quali c'è una capra ad eccezione di una… Se si sceglie una porta la probabilità di trovarvi dietro l'automobile è 1/100. Se il presentatore apre 98 porte con le capre, la probabilità di vincita dell'auto se non si cambia rimane di 1/100 mentre se si cambia sale a 99/100.

Come si può spiegare il paradosso di Monty Hall? In molti modi. Alcuni sono già spiegati nei video ma nel libro "Lo strano caso del cane ucciso a mezzanotte la motivazione viene data dal giovane protagonista Cristopher, un bambino autistico, utilizzando un diagramma ad alberi.

Un ulteriore metodo risolutivo utilizza il Teorema di Bayes-

Il teorema di Bayes

4. Suggerimenti per l'insegnamento" da *Teaching Probability*

*Modificare la maniera in cui viene presentata la probabilità può aumentare significativamente la maniera in cui le persone vengono messe in grado di risolvere problemi complessi. Invece di parlare di probabilità in termini di di decimali, percentuali o frazioni, guarderemo alle **frequenze attese** di eventi in un gruppo di casi.*
Per esempio, nel discutere il rischio di un attacco di cuore con un paziente, agli studenti di medicina viene ora insegnato di non pronunciare frasi contenenti espressioni come

“probabilità del 16%” ma di dire piuttosto che “su 100 pazienti nelle tue condizioni, ci aspettiamo che 16 avranno un attacco di cuore nei prossimi dieci anni”.
Questo può sembrare un cambiamento banale, ma può avere [un significativo impatto e] forti implicazioni sul modo in cui la probabilità viene insegnata a scuola.
Spiegare il contenuto di 1.4, 1.5 e 1.6, in particolare il test per il doping, ripreso in 22, pp. 137-141.
[... Sono innumerevoli le testimonianze sulla difficoltà di usare correttamente le percentuali. Per esempio] una recente inchiesta telefonica ha chiesto:
Quale dei seguenti numeri rappresenta il rischio maggiore di contrarre una malattia: 1 su 10, 1 su 1000 o 1 su 100?
La percentuale delle risposte sbagliate è stata del 28% in Germania e del 25% negli USA.
Il problema del rischio relativo. Una pubblicità americana dichiara che una certa medicina riduce del 36% il rischio di infarto, se regolarmente assunta nel corso di 5 anni. Questo significa che la percentuale di infarti sulla popolazione si riduce dal 3% al 2%, cioè che, su 100 persone che assumono la medicina nell’arco di cinque anni, ci aspettiamo un infarto in meno rispetto ai tre osservati in una popolazione che non prende precauzioni particolari.
[...]
Nel 2012 a 97 membri del parlamento britannico è stato chiesto: qual è la probabilità di ottenere due teste lanciando due volte una moneta.Il 40% degli intervistati ha dato una risposta errata.
[...]
Siccome i problemi che riguardano la probabilità sono generalmente molto facili da esporre (anche se spesso in maniera che lascia spazio a diverse ambiguità) , la gente pensa che la risposta debba essere intuitiva. Ciò accade raramente. Anche dopo uno specifico insegnamento, la gente trova difficoltà ad abbinare le tecniche formali al probleme.
Il solo istinto che abbiamo nei confronti della probabilità è quello di non fidarci del nostro istinto.
[...]
L’approccio di questo libro è basato sulla ricerca degli psicologi sugli effetti che hanno diverse rappresentazioni sulla capacità delle persone di ragionare con le probabilità. Lo psicologo tedesco Gerd Gigerenzer ha popolarizzato l’idea di frequenze naturali*, che noi chiameremo* frequenza attese
[...]
*La prima ragion per utilizzare questo punto di vista è che aiuta a chiarire cosa significa la probabilità. Quando sentiamo la frase “*la probabilità che domani piova è+ del 30%” *cosa intendiamo? Che pioverà per il 30% delle volte? che pioverà sul 30% di una certa area? In effetti significa che di 100 previsioni fatte con il computer in situazioni come questa, ci aspettiamo che di fatto piova in 30 di queste. Dichiarare chiaramente il denominatore, o la* ***classe di riferimento****, ci permette di evitare molte ambiguità.*
[...]
Esempio dei motociclisti, a p. 4
[..]
Esempio dei rapporti sessuali a p. 5
[..]
Esempio dell’aumento del rischio di cancro al pancreas con il consumo di pancetta. a p. 5
[..]

Test anti doping a p. 6

5. Attività sul Problema proposto

Problema: Qual è il giusto prezzo da pagare per far parte di un gioco in cu*i si può vincere 25 euro una volta su 5 e 10euro con probabilità doppia?)*

Scheda 1

Consideriamo il seguente gioco a premi. Viene lanciata una moneta.
Vinci un euro se esce testa. Non vinci nulla se esce croce.
Se ti vengono chiesti 70 centesimi per ogni giocata, pensi che sia conveniente accettare?
Senza usare la parola probabilità, spiega perché.
Se ti vengono chiesti 30 centesimi per ogni giocata, pensi che sia conveniente giocare?
Senza usare la parola probabilità, spiega perché.
Se ti vengono chiesti 50 centesimi per ogni giocata, pensi che sia conveniente giocare?
Senza usare la parola probabilità, spiega perché.
Qual è il costo massimo della giocata per cui accetteresti di giocare?
Senza usare la parola probabilità, spiega perché.
Giocando 100 volte di seguito a questo gioco quanto ti aspetti di vincere?
Senza usare la parola probabilità, spiega perché.

Scheda 2

Consideriamo il seguente gioco a premi. Viene lanciato un dado.
Vinci sei euro se esce 1. Non vinci nulla se esce un numero diverso da 1.
Se ti vengono chiesti 3 euro per ogni giocata, pensi che sia conveniente accettare?
Senza usare la parola probabilità, spiega perché.
Se ti vengono chiesti due euro per ogni giocata, pensi che sia conveniente giocare?
Senza usare la parola probabilità, spiega perché.
Se ti viene chiesto un euro per ogni giocata, pensi che sia conveniente giocare?
Senza usare la parola probabilità, spiega perché.
Qual è il costo massimo della giocata per cui accetteresti di giocare?
Senza usare la parola probabilità, spiega perché.
Giocando 120 volte di seguito a questo gioco quanto ti aspetti di vincere?
Senza usare la parola probabilità, spiega perché.

Scheda 3

Ti vengono proposti due giochi, con il prezzo di ogni giocata.
Primo gioco: si lancia una moneta: se viene testa vinci un euro, se viene croce non vinci nulla. Ogni giocata costa 50 centesimi.
Secondo gioco: si lancia un dado. Se viene un numero pari vinci un euro, se viene un numero dispari non vinci nulla. Ogni giocata costa 40 centesimi.

Se dovessi scegliere a quale dei due giochi giocare, quale sceglieresti?
Senza usare la parola probabilità, spiega perché.
Giocando 100 volte di seguito a questo gioco quanto ti aspetti di vincere?
Senza usare la parola probabilità, spiega perché.

Scheda 4

Ti vengono proposti due giochi, con il prezzo di ogni giocata.
Primo gioco: si lancia una moneta, se viene testa vinci un euro, se viene croce non vinci nulla. Ogni giocata costa 50 centesimi.
Secondo gioco: si lancia un dado. Se viene un numero dispari vinci dieci euro, se viene un numero pari non vinci nulla. Ogni giocata costa cinque euro.
Se dovessi scegliere a quale dei due giochi giocare, quale sceglieresti.
Senza usare la parola probabilità, spiega perché.
Giocando 100 volte di seguito a questo gioco quanto ti aspetti di vincere?
Senza usare la parola probabilità, spiega perché.

Scheda 5

Ti vengono proposti due giochi, con il prezzo di ogni giocata.
Primo gioco: si lancia una moneta, se viene testa vinci un euro, se viene croce non vinci nulla. Ogni giocata costa 50 centesimi.
Secondo gioco: si estrae una pallina da un'urna con palline contrassegnate con i numeri da 1 a 1000. Se esce 7 vinci 1000 euro. Ogni giocata costa un euro.
Se dovessi scegliere a quale dei due giochi giocare, quale sceglieresti?
Senza usare la parola probabilità, spiega perché.
Giocando 1000 volte di seguito a questo gioco quanto ti aspetti di vincere?
Senza usare la parola probabilità, spiega perché.

Scheda 6

Consideriamo il seguente gioco a premi. Viene lanciato un dado.
Se esce uno vinci sei euro; se esce uno qualsiasi tra due, tre o quattro vinci due euro, se esce cinque o sei non vinci nulla.
Qual è il costo massimo della giocata per cui non è sconveniente giocare?
Senza usare la parola probabilità, spiega perché.
Qual è il costo massimo della giocata per cui accetteresti di giocare?
Senza usare la parola probabilità, spiega perché.
Giocando 60 volte di seguito a questo gioco quanto ti aspetti di vincere?
Qual è la probabilità di effettuare una vincita a questo gioco?

Scheda 7

Consideriamo il seguente gioco a premi. Viene lanciato un dado e una moneta.
Se esce uno al dado e croce alla moneta, vinci sei euro; se esce uno al dado e testa alla moneta, vinci otto euro; se esce un numero diverso da uno al dado ed esce testa alla moneta vinci due euro, se esce un numero diverso da uno al dado ed esce croce alla moneta non vinci nulla.
Qual è il costo massimo della giocata per cui non è sconveniente giocare?
Senza usare la parola probabilità, spiega perché.
Qual è il costo massimo della giocata per cui accetteresti di giocare?
Senza usare la parola probabilità, spiega perché.
Giocando 60 volte di seguito a questo gioco quanto ti aspetti di vincere?
Qual è la probabilità di effettuare una vincita a questo gioco?

Scheda 8

Consideriamo un gioco a premi in cui ti aspetti di vincere una volta su cinque 25 euro e ti aspetti di vincere due volte su cinque dieci euro.
Qual è il costo massimo della giocata per cui accetteresti di giocare?
Senza usare la parola probabilità, spiega perché.
Giocando 5 volte di seguito a questo gioco, quanto ti aspetti di vincere?
Qual è la probabilità di effettuare una vincita a questo gioco?

Terzo Incontro

1. Sperimentazioni sulla probabilità condizionata con il file Spinner1.ggb e con gli spinner del libro, matite e gomme (Cfr. LaboratorioBardonecchia.pdf)
2. Il teorema di Bayes
3. Il paradosso di Monty Hall con Bayes
4. Riflessioni sull'approccio, i contenuti e la metodologia utilizzata per insegnare alcuni elementi del calcolo delle probabilità nei diversi ordini e gradi di scuola
5. Riflessioni sul concetto di probabilità
6. Attività con la calcolatrice mirata a introdurre il paradosso dei compleanni e la distribuzione binomiale
7. Discussione sulle attività da proporre a scuola (per il 16 devono essere presentate le proposte e le richieste per le esposizioni)
8. Discussione delle schede preparate per il precedente incontro

1. Sperimentazione sulla probabilità condizionata

Attività 1.

Si apre il file Spinner1.ggb e compare un cerchio con un settore circolare evidenziato in grigio ed una lancetta. Si propone un primo gioco che consiste nel premere il tasto SPIN: si vince se la lancetta cade nel settore colorato, si perde altrimenti. Si discute la probabilità che premendo il tasto la lancetta cada nel settore evidenziato, ovvero il prezzo equo da pagare per entrare nel gioco e vincere 1 euro in caso la lancetta cada nel settore colorato. Se si indica con c il cerchio, con *f* il settore colorato e con F l'evento "premendo il tasto SPIN la lancetta cade nel settore f", la probabilità sarà:

$$p(F)= \frac{Area(f)}{Area(c)} =p$$

A questo punto si propone una variazione al gioco precedente. Si spunta la casella "e" nel menù

sinistra del file geogebra e comparirà un nuovo settore, che indichiamo appunto con "*e*" di colore diverso rispetto al precedente e che potrà in parte sovrapporsi al settore *f*. Se non si dovessero in parte sovrapporre i due settori si preme il tasto COND fino a che non vi sarà una parziale sovrapposizione di *e* ed *f.*

A questo punto si fissano le regole del nuovo gioco: si vince se, premendo il tasto SPIN la lancetta cade nell'intersezione fra i due settori, si perde se cade nel settore *e* ma non in *f,* si preme nuovamente il pulsante SPIN se non si verifica nessuno dei due casi precedenti.

Il gioco è ovviamente cambiato rispetto al precedente così come, in generale, la probabilità di vittoria che sarà la stessa che si ottiene immaginando di considerare un terzo gioco in cui la lancetta non si può più muovere in tutto il cerchio ma è vincolata a muoversi soltanto nel settore *e*. Questo terzo gioco si realizza premendo il tasto SpinCon che vincola la lancetta a muoversi solo nel settore **e.**

La probabilità di vittoria, allora, si potrà esprimere come il rapporto tra l'area dell'intersezione dei due settori *e* ed *f* e l'area del settore *e*:

$$p(F)= \frac{Area(f\cap e)}{Area(e)}$$

Questo gioco è di carattere diverso rispetto al precedente perché è condizionato al verificarsi di un nuovo evento ed è quindi naturale introdurre per la rispettiva probabilità un nuovo simbolo, P(F/E) che si legge “probabilità di F condizionata ad E”.
Più precisamente, se P(F) è la probabilità che si attribuisce ad un dato evento F, dopo aver appreso che si è verificato un certo evento E si dovrà attribuire ad F una nuova probabilità

$$p^*=P(F\cap E)/P(E). \qquad (*)$$

Questa nuova probabilità è appunto la **probabilità condizionata di F dato l’evento E** e si indicherà appunto P(F/E).
Ci si può domandare quando nel gioco le due probabilità P(F) de P(F/E) siano uguali, quando P(F/E) sarà maggiore di P(F) e quando accadrà il contrario facendo delle ipotesi sulla grandezza del settore circolare *e*. Ciò conduce al concetto di correlazione fra due eventi, per cui gli eventi E ed F saranno correlati negativamente se p*<p, ovvero, se $P(F\cap E)<P(F)$, correlati negativamente se p*>p ovvero se $P(F\cap E)>P(F)$ mentre gli eventi saranno indipendenti se p*=p ovvero se $P(F\cap E)=P(F)$.

Attività 2.

Un’attività simile alla precedente può essere proposta senza l’uso di un file che simula uno spinner ma costruendone direttamente uno con un foglio di carta su cui è stato disegnato un cerchio ed un suo settore circolare di colore diverso, quindi si disegna un ulteriore settore circolare su di un foglio lucido che si fissa tramite una puntina da disegno al primo foglio facendo attenzione che i due settori circolari siano in parte sovrapposti. La lancetta si può costruire utilizzando una graffetta. Il vantaggio di utilizzare lo spinner “fai da te” rispetto a quello virtuale sta nel fatto che si può decidere la grandezza del settore *e* a piacimento senza essere vincolati al tasto COND, lo svantaggio è che non si può vincolare la lancetta a muoversi solo settore e quindi è difficile realizzare il terzo gioco.

2. Il teorema di Bayes.

Sempre facendo riferimento alle due attività precedenti, il teorema di Bayes lega la probabilità condizionata P(E/F) alla probabilità condizionata P(F/E). Infatti, ricavando la probabilità dell’intersezione dalla definizione (*) si ha

$$P(F\cap E)=P(F/E)\cdot P(E)$$

Analogamente, ricavando, sempre dalla definizione (*) applicata però a P(E/F), la probabilità dell’intersezione, abbiamo

$$P(E\cap F)=P(E/F)\cdot P(F).$$

Ma essendo $E\cap F=F\cap E$ segue

$$P(F/E) \cdot P(E) = P(E/F) \cdot P(F)$$

che è appunto il **teorema di Bayes** .

3. Il Paradosso di Monty Hall con il teorema di Bayes.

Per risolvere il problema descritto dal paradosso di Monty Hall è possibile utilizzare il teorema di Bayes facendo bene attenzione al punto di vista rispetto al quale lo risolviamo che è ovviamente quello del concorrente che non conosce il posizionamento della macchina rispetto alle tre porte.

Definiamo allora i seguenti eventi:

A_1 =Auto dietro la porta 1

A_2 =Auto dietro la porta 2

A_3 = Auto dietro la porta 3

P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=1/3.

Supponiamo di aver scelto la porta 1 e che il presentatore abbia scelto la porta 3. Indichiamo con B l'evento "il presentatore apre la porta 3". Il problema corrisponde a calcolare P(A_1 /B) e P(A_2 /B) e confrontare le due probabilità. Visto che P(A_3 /B)=0 dal momento che il presentatore non aprirà mai la porta dietro la quale si trova la macchina, basterà calcolare P(A_1 /B) perché P(A_2 /B)=1- P(A_1 /B).

Applicando il Teorema di Bayes si ha

$$P(A_1/B) = \frac{P(B/A_1) \cdot P(A_1)}{P(B)} = \frac{1/2 \cdot 1/3}{1/2} = \frac{1}{3}$$

Quindi, $P(A_2/B) = \frac{2}{3}$

Di conseguenza, conviene sempre cambiare porta.

5. Commentate le seguenti definizioni di probabilità

Numero dei casi favorevoli diviso numero dei casi possibili
Un numero che rappresenta il grado di prevedibilità di un risultato.
Possibilità per un evento di avvenire o meno.
Misura della fiducia (soggettiva) nel realizzarsi di un evento
Calcolo che permette di quantificare il verificarsi di un evento.
Misura della possibilità che l'evento si verifichi.
È una funzione $p:P(U)\to[0,1]$ ossia associa ad ogni elemento delle parti U un numero reale compreso fra 0 e 1. $P(U)=1$.

6. Attività con la calcolatrice

Scheda 1

La calcolatrice mette a disposizione un piccolo foglio elettronico. Dal menu principale, seleziona la modalità `Spreadsheet`selezionando 8oppure muovendosi con il cursore e selezionando l'icona `Spreadsheet`con il tasto `= (9,5)`.
Muoviti con il cursore sulla cella `A1`. Premi il tasto `OPTN(2,1)`e seleziona la funzione `Fill Formula`, selezionando `1`.
Inserisci, nella finestra che viene aperta, l'istruzione `RandInt#(0,1)`, premi il tasto =(9,5) e, nella riga successiva, aggiorna il `Range` di riempimento selezionando `A1:C10`. Dopo aver premuto due volte il tasto `= (9,5)`puoi vedere, muovendoti con il cursore, il risultato delle tre serie di 10 lanci simulati.

Trascrivi il contenuto della colonna A nelle celle vuote della terza riga della tabella seguente

512	256	128	64	32	16	8	4	2	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Riporta il conteggio del numero degli 1 che hai trascritto nella terza riga.

____

Estrai (dalla seconda riga della precedente tabella) gli interi da 1 a 10 sotto cui (nella terza riga) hai trascritto 1 e riportali nello spazio seguente.

____

Riporta il numero (in base 10) le cui cifre binarie appaiono nella terza riga della precedente tabella. Esso si ottiene sommando tutti i numeri che appaiono nella prima riga della tabella sopra, nella stessa colonna in cui appaiono gli uno sulla terza riga.

____

Trascrivi il contenuto della colonna B nelle celle vuote della terza riga della tabella seguente

512	256	128	64	32	16	8	4	2	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Riporta il conteggio del numero degli 1 che hai trascritto nella terza riga.

____

Estrai (dalla seconda riga della precedente tabella) gli interi da 1 a 10 sotto cui (nella terza riga) hai trascritto 1 e riportali nello spazio seguente.

____

Riporta il numero (in base 10) le cui cifre binarie appaiono nella terza riga della precedente tabella. Esso si ottiene sommando tutti i numeri che appaiono nella prima riga della tabella sopra, nella stessa colonna in cui appaiono gli uno sulla terza riga.

____

Trascrivi il contenuto della colonna C nelle celle vuote della terza riga della tabella seguente

512	256	128	64	32	16	8	4	2	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Riporta il conteggio del numero degli 1 che hai trascritto nella terza riga.

____

Estrai (dalla seconda riga della precedente tabella) gli interi da 1 a 10 sotto cui (nella terza riga) hai trascritto 1 e riportali nello spazio seguente.

____

Riporta il numero (in base 10) le cui cifre binarie appaiono nella terza riga della precedente tabella. Esso si ottiene sommando tutti i numeri che appaiono nella prima riga della tabella sopra, nella stessa colonna in cui appaiono gli uno sulla terza riga.

____

Scheda 2

Costruiamo la tabella delle osservazioni del numero degli 1, con i dati dell'intera classe

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Attività

Utilizzando i dati raccolti nella scheda 2, disegniamo l’istogramma dei conteggi.
Utilizzando i dati dell’esempio abbiamo

Chiedere di descrivere con una parola la forma dell’istogramma ottenuto e di identificare alcune caratteristiche qualitative.
Alla fine della descrizione ci chiediamo: Qual è la forma che “ci aspettiamo” per tale diagramma? Possiamo dividere il problema in tanti sottoproblemi.

1. Quante possibili sequenze distinte possiamo produrre lanciando 10 volte la moneta?
2. Quante di queste contengono 0 teste, quante contengono 1 testa, quante contengono 2 teste, ecc. E’ possibile svolgere a mano i primi tre casi, Per fare bene il conteggio delle possibili sequenze con 2 teste (e otto croci) è necessario organizzare bene il conteggio e quindi prepara la classe ad accettare la discussione formale che seguirà. Il numero totale, che è 45, è abbastanza grande da richiedere un impegno non banale, d’altra parte è sufficientemente piccolo da permettere che il compito possa essere portato a termine in un tempo ragionevolmente breve. Può essere interessante chiedere alla classe se è possibile suddividere il lavoro in gruppi in modo da renderlo più efficace.
3. Le sequenze sono equiprobabili o ce ne sono alcune più probabili di altre? Se la classe si aspetta che ci siano delle sequenze più probabili di altre quali sono queste sequenze e perché? Scegliere una o più sequenze che la classe immagina essere più probabili di altre, che verranno utilizzate nell’attività successiva.

Scheda 3

Raccogliamo, su un foglio, o sulla lavagna, l’elenco delle sequenze prodotte, codificate con la rappresentazione decimale del numero di cui esse forniscono le cifre binarie. Possiamo raccogliere i dati partendo dalle codifiche da 0 a 99, poi quelle da 100 a 199, fino a quelle tra 900 e 1023. Poi ordiniamo le codifiche in ordine crescente. Con i dati dell’esempio si ottiene la seguente successione ordinata di codifiche

38	62	88	100	102	136	143	172	206	209
259	323	329	343	344	396	405	411	419	437
455	472	480	504	517	518	521	531	541	551
555	560	585	594	606	622	663	673	677	680
680	685	705	710	723	741	750	777	823	829
830	848	912	927	937	992	995	1007	1008	1020

Verifichiamo se esistono stringhe ripetute e quante sono. Nell'esempio c'è una sola stringa ripetuta, quella codificata dal numero decimale 680. Quante potevamo aspettarcene? Possiamo trarre da qui un'indicazione del fatto che le stringhe sono tutte equiprobabili? Quante coppie gemelle ci sono? Nell'esempio ne sono uscite quattro: (343,344) (517,518) (829,830) (1007,1008). Quante potevamo aspettarcene? Possiamo trarre da qui un'indicazione del fatto che le stringhe sono tutte equiprobabili?

Attività

Calcoliamo la probabilità di osservare k teste in 10 lanci.
Esplicitiamo le ipotesi (indipendenza dei lanci) in base alle quali possiamo assumere l'equiprobabilità delle sequenze.
Calcoliamo la distribuzione aspettata dei conteggi delle sequenze di zeri e uni, di lunghezza dieci (distribuzione binomiale)
Calcoliamo la probabilità di osservare stringhe ripetute (come nel problema dei compleanni, cfr. "Teaching Probability").

Per affrontare questi problemi, bisogna introdurre alcuni elementi di calcolo combinatorio standard. Richiamiamo brevemente uno dei possibili modi di introdurre il calcolo delle combinazioni.

Combinazioni e disposizioni

Se X è un insieme finito, l'insieme di tutti i suoi sottoinsiemi, che si indica P(X) e si chiama *l'insieme della parti di X*. Quanti sono i suoi elementi?
Per contarli basta osservare che un sottoinsieme è completamente determinato dalla lista dei suoi elementi. Se ordiniamo gli elementi di X (finito per ipotesi), specificare una scelta di elementi equivale a specificare una successione di 0 e 1 di lunghezza pari al numero di elementi di X. Infatti, se all'i-esimo posto della lista appare 1, prendiamo l'i-esimo elemento di X, se appare 0, non lo prendiamo (come dovrebbe essere chiaro dopo aver compilato la prima scheda di lavoro).
Per esempio, se X={1,2,3,4,5,6}, la lista {0,0,1,1,0,1} corrisponde al sottoinsieme {3,4,6}.
D'altra parte, il numero delle liste di 0 e 1 è 2^n: il primo elemento lo posso scegliere in due modi, il secondo in due modi, quindi il primo e il secondo si possono scegliere in 2x2 modi, ecc.
Un conteggio fondamentale per le applicazioni al calcolo delle probabilità è quello del numero dei sottoinsiemi di k elementi di un insieme con n elementi (che possiamo sempre identificare con l'insieme {1,2,3,...,n}), ovvero del numero C(n,k) delle combinazioni di k elementi scelti da n.
Per esempio, C(4,2)=6. I sottoinsiemi di due elementi dell'insieme {1,2,3,4} sono infatti

{1,2}, {1,3}, {1,4} ,{2,3}, {2,4} ,{3,4}.

Direttamente dalla definizione segue che C(n,0)=1, poiché esiste un solo sottoinsieme di {1,2,3,...,n} con zero elementi, l'insieme vuoto. Analogamente C(n,n)=1. Sempre dalla definizione è immediato verificare che C(n,1)=n e C(n,n-1)=n. Segue anche che C(n,n-1) e che, passando da un sottoinsieme al suo complementare, C(n,k)=C(n,n-k).
Sempre facile, anche se meno immediato, è il fatto che C(n,k)=C(n-1,k-1)+C(n-1,k).

Illustriamo il caso C(5,3)

(1,2,3)
(1,2,4)
(1,2,**5**)
(1,3,4) (2,3,4)
(1,3,**5**) (2,3,**5**)
(1,4,**5**) (2,4,**5**) (3,4,**5**)

Abbiamo colorato in rosso i sottoinsiemi che contengono l'elemento più grande (5) e colorato i restanti in blu.
Ora, se togliamo 5 da quelli colorati in rosso, otteniamo sottoinsiemi di due elementi di un insieme di quattro, che sono tanti quantiC(4,2)mentre quelli blu, che non contengono 5, sono esattamente i sottoinsiemi di tre elementi di {1,2,3,4}, che appaiono quindi in numero di C(4,3). Il caso generale è analogo.
Le proprietà

1. C(n,0)=C(n,n)=1;
2. (C(n,1)=C(n,n-1)=n;
3. C(n,k)=C(n,n-k);
4. C(n,k)=C(n-1,k-1)+C(n-1,k)

ci permettono di calcolare le combinazioni C(n,k) in modo iterativo, costruendo il triangolo di Tartaglia (detto anche di Pascal, …).
Possiamo anche facilmente date una formula chiusa per C(n,k).
Cominciamo a calcolare il numero D(n,k) delle *disposizioni di k elementi scelti da n*. Queste sono le successioni ordinate di k elementi distinti che posso scegliere dall'insieme {1,2,... n}.
Si passa dalle successioni ordinate ai sottoinsiemi dividendo per i possibili *riordinamenti*(o *permutazioni*) di una fissata successione. Quindi C(n,k)=D(n,k)/D(k,k).
D'altra parte, per determinare il numero delle disposizioni di k oggetti scelti da n basta osservare che in una tale successione, il primo elemento si può scegliere in n modi, il secondo in n-1 modi (perché deve essere distinto da quello scelto per primo), ecc.
Quindi

$$D(n,k)=n(n-1)(n-2)...(n-k+1).$$

Il numero D(n,n) si dice *fattoriale di n*e si usa il simbolo n! per denotarlo. Per esempio 5!=5*4*3*2*1=120. E' facile a questo punto esprimere C(n,k) usando i fattoriali. Infatti

$$C(n,k)=D(n,k)/D(k,k)=n(n-1)...(n-k+1)/k!=n!/k!(n-k)!$$

Per esempio, C(5,2)=5!/2!·3!=120/2·6=10.

Distribuzione binomiale

A partire dagli elementi di combinatoria introdotti nel punto precedente e assumendo che tutte le sequenze siano equiprobabili (il che segue dall'ipotesi di indipendenza del risultato di un lancio da quello dei lanci precedenti) otteniamo immediatamente che la probabiità di ottenere K teste lanciando n volte la moneta, che indicheremo p(n,k) è proporzionale a C(n,k) e la costante di proporzionalità è la probabilità di ottenere una qualsiasi di queste sequenze, ovvero $1/2^n$. Se la moneta fosse stata truccata in modo che la probabilità di osservare testa in un lancio sia p (e quindi quella di osservare croce sia (1-p)), laformula per la probabilità di osservare k teste in n lanci ripetuti della moneta sarebbe stata

$$p(n,k,p)=p^k(1-p)^{n-k}C(n,k).$$

Esempio

Riportiamo i dati raccolti nella ripetizione di 60 esperimenti (3 sequenze da 10 per ogni partecipante, in una classe di 20).

L1	L2	L3	L4	L5	L6	L7	L8	L9	L10	#1	DEC
1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	7	750
0	1	1	0	0	1	1	0	1	1	6	411
1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	3	518
0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	4	329
0	0	1	1	0	1	0	0	0	1	4	209
1	1	1	0	1	0	1	0	0	1	6	937
1	0	0	0	0	1	0	0	1	1	4	531
1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	4	912
1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	3	560
0	1	1	0	0	1	0	1	0	1	5	405
1	0	1	1	0	0	0	1	1	0	5	710
0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	6	455
1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	4	777
0	1	1	0	1	1	0	1	0	1	6	437
1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	4	585
1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	5	992
1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	8	927
0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	3	100
1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	6	685

0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	6	343
1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	7	823
1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	3	517
1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	7	830
0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	4	102
1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	7	995
0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	3	88
0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	4	480
0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	5	62
0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	3	259
0	1	1	0	1	0	0	0	1	1	5	419
0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	4	323
1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	4	848
0	1	0	1	0	1	1	0	0	0	4	344
1	0	0	1	0	1	1	1	1	0	6	606
1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	6	1008
1	0	1	1	0	0	0	0	0	1	4	705
1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	4	680
1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	6	723
0	0	1	0	0	0	1	1	1	1	5	143
1	0	0	1	1	0	1	1	1	0	6	622
0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	5	472
0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	3	38
1	0	1	1	1	0	0	1	0	1	6	741
1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	9	1007
1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	5	677

1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	4	680
1	0	0	0	1	0	1	0	1	1	5	555
1	0	0	0	1	0	0	1	1	1	5	551
0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	2	136
1	0	0	0	0	1	1	1	0	1	5	541
0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	6	504
1	0	1	0	1	0	0	0	0	1	4	673
0	0	1	1	0	0	1	1	1	0	5	206
1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	4	594
1	0	1	0	0	1	0	1	1	1	6	663
1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	7	829
0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	4	396
0	0	1	0	1	0	1	1	0	0	4	172
1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	3	521
1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	9	1020