



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Piano Lauree Scientifiche Liceo Matematico



Combinatoria di grafi colorati Dal gioco ai numeri di Ramsey

Enrico Rogora
Sapienza

Maria Puzio
Elena Savinelli
I.I.S. «G. De Sanctis»

Il principio dei cassetti (di Dirichlet)

Prima di introdurre il gioco di Ramsey, è opportuno richiamare il

Principio “di Dirichlet”:

Se $n+1$ oggetti sono messi in n cassetti, almeno un cassetto deve contenere almeno due oggetti.

Se $k \times n + 1$ oggetti sono messi in n cassetti, almeno un cassetto deve contenere almeno $k+1$ oggetti.

CONSEGUENZE

Se poniamo: oggetti = #capelli e cassetti = #persone, possiamo affermare che
«A Roma ci sono almeno due persone (non calve) con lo stesso numero di capelli».



6/3/2020

Il gioco di Ramsey

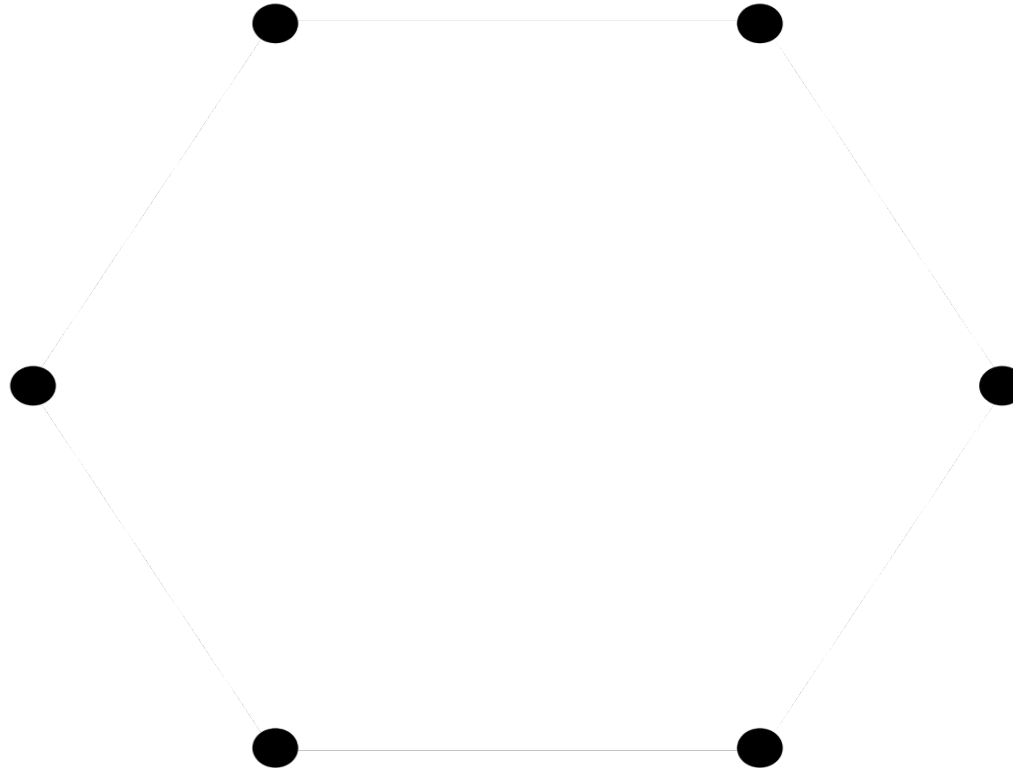
Si gioca su un foglio in cui è disegnato un certo numero di punti (vertici):

- Il giocatore “A” comincia congiungendo due vertici con un tratto **rosso**.
- Il giocatore “B” risponde congiungendo due vertici (non già congiunti precedentemente) con un tratto **blu**.
- Si ripetono le mosse, sempre mantenendo la condizione che due vertici possono essere congiunti al più da un tratto.
- Il gioco termina quando uno dei due giocatori riesce a disegnare un **triangolo monocromatico**, ovvero un triangolo in cui tutti gli spigoli sono dello stesso colore, oppure fino a che tutte le coppie di vertici sono congiunte da uno (e un solo) tratto.
- Gli spigoli possono intersecarsi ma le intersezioni non producono nuovi vertici.

Ramsey 6

Giochiamo con 6 vertici.

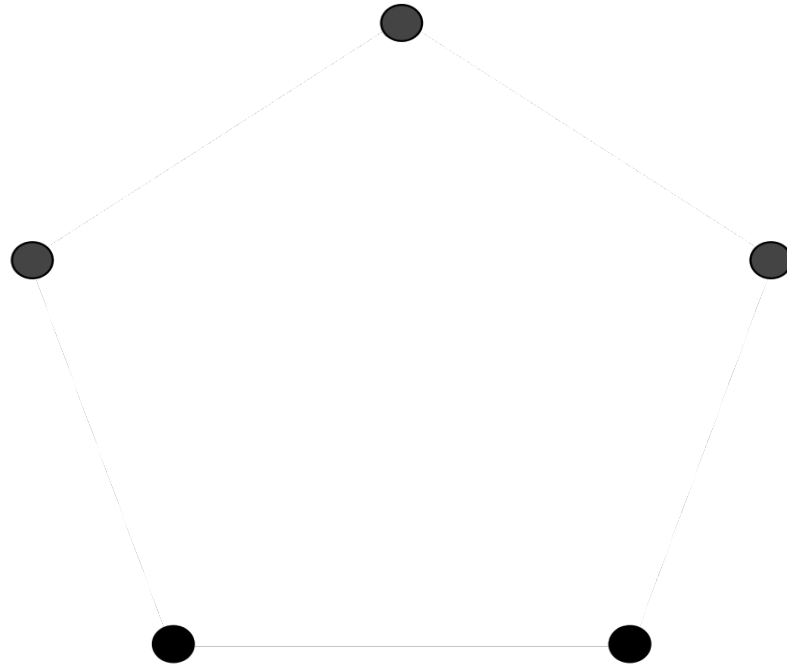
In quali coppie c'è stato un vincitore? In quante coppie non ha vinto nessuno?

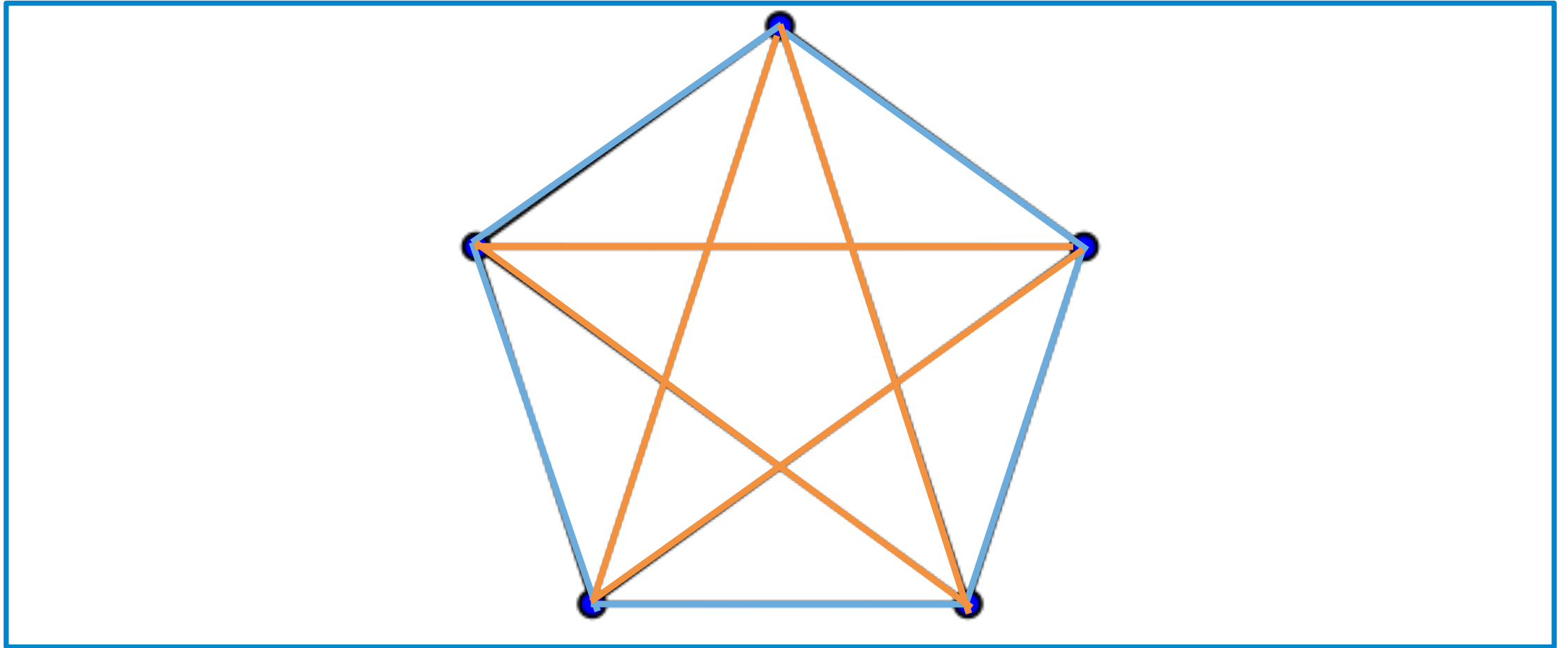


Ramsey 5

Giochiamo con 5 vertici.

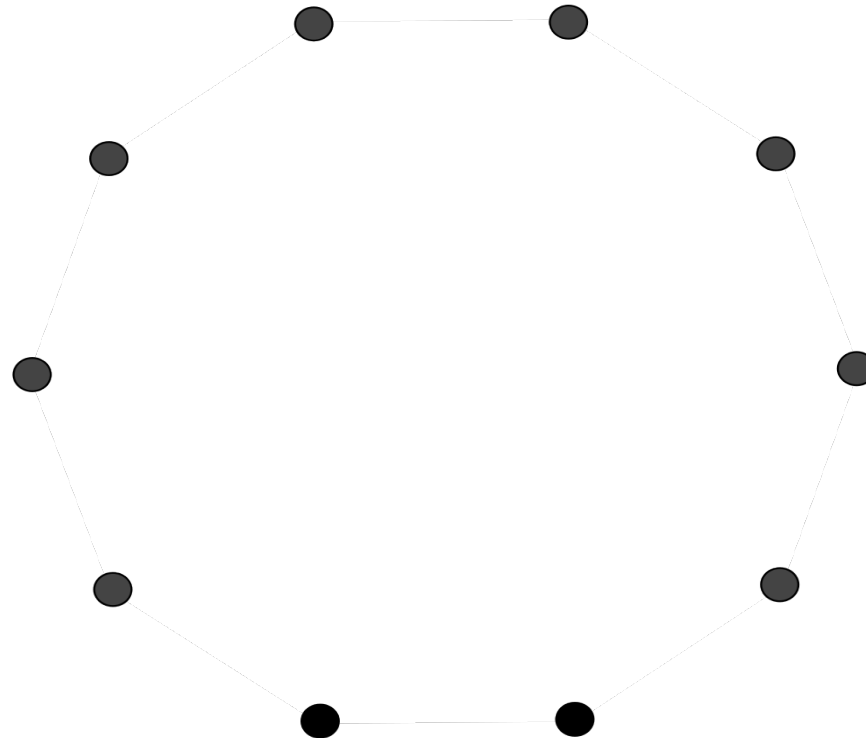
Vogliamo trovare una configurazione senza vincitori.





Ramsey 10

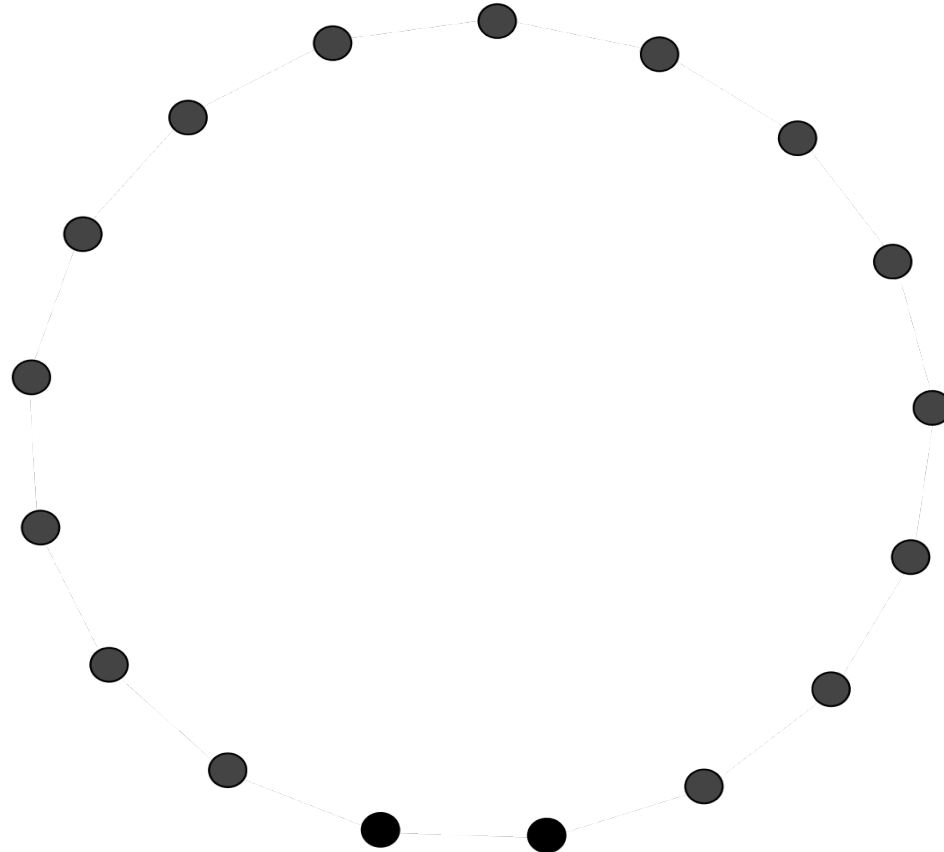
A questo punto possiamo rendere il gioco un po' più complicato cercando una figura monocromatica più complessa come un quadrangolo (cioè quattro vertici collegati da quattro spigoli tale che ogni vertice stia su due spigoli, ammettendo che gli spigoli possano intrecciarsi) o una **4-clique** (4-clicca oppure 4-cricca), cioè il grafo completo su quattro vertici (sei spigoli, ogni vertice sta su tre spigoli).



Ramsey 17

Con 17 vertici la sfida di disegnare una 4-clicca monocromatica è davvero molto complicato, può essere utile però per far riflettere gli studenti sul tempo necessario per giocarlo.

- Qual è il numero massimo degli spigoli che si possono disegnare?
- Assumendo di impiegare una media di 10 secondi per disegnare uno spigolo e controllare se appare una 4-clicca, quanto tempo sarebbe necessario?
- Quante diverse colorazioni con due colori si possono considerare sul grafo completo su 17 vertici?



- Il numero massimo degli spigoli che si possono disegnare è $16+15+14+\dots+2+1=(16)(17)/2=\mathbf{153}$
- Assumendo di impiegare una media di 10 secondi per disegnare uno spigolo e controllare se appare una 4-clique, sarebbero necessari **1530 secondi**, cioè circa mezz'ora.
- Le diverse colorazioni con due colori che si possono considerare sul grafo completo su 17 vertici sono $\mathbf{2^{153}}$

Teorema di Ramsey (per i grafi colorati con due colori)

Per ogni $k \geq 2$, esiste un intero $N=N(k)$ tale che ogni due-colorazione di un grafo con almeno N vertici contiene un sottografo monocromatico completo (clique) su k vertici.

Abbiamo verificato che:

Per $N=5$, esiste una bi-colorazione **priva** di triangoli monocromatici.

Per $N=6$, esiste una bi-colorazione **con un** triangolo monocromatico.

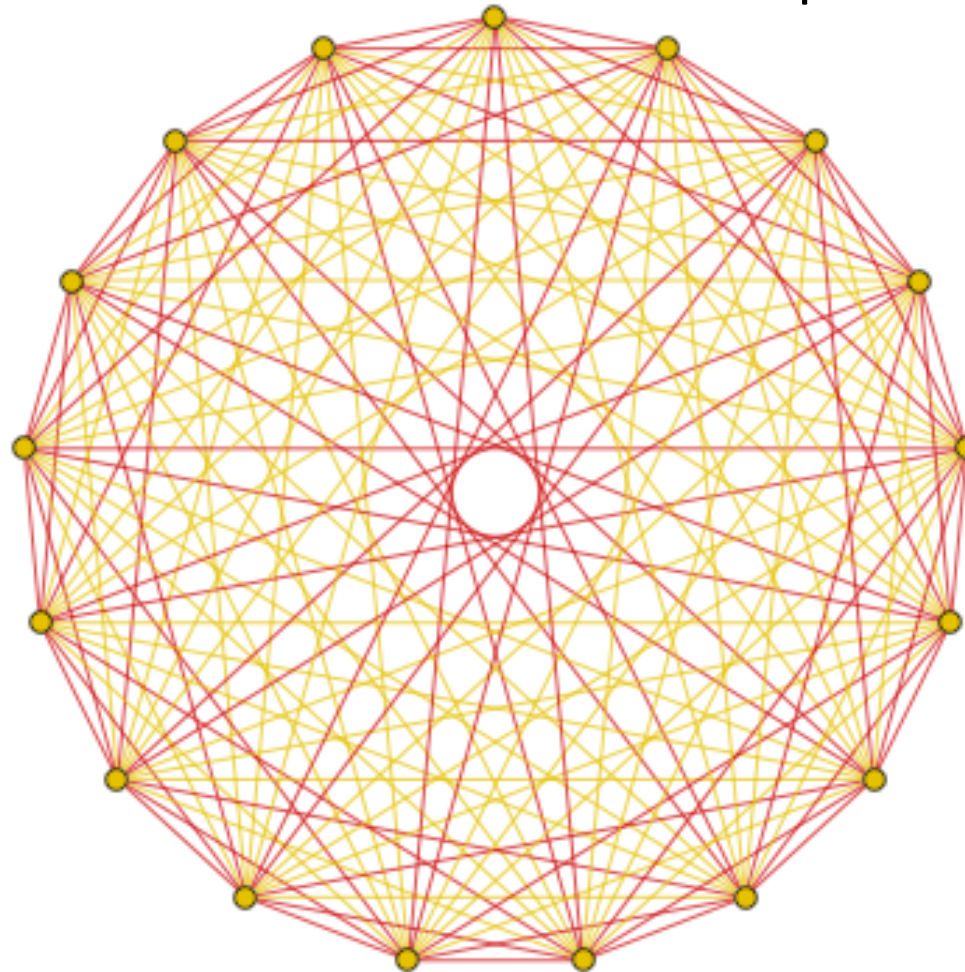
Osservazione

Esiste sempre almeno una 4-clique monocromatica su ogni grafo con 64 vertici, colorato con due colori.

Grafo giallo e rosso su 17 vertici privo di 4-clique

E' possibile migliorare il bound precedente nel caso delle 4-clique, e dimostrare che già in ogni bi-colorazione di un grafo su 18 vertici esiste una 4-clique monocromatica.

Esiste invece un grafo su 17 vertici con due colorazioni privo di 4-clique monocromatiche.



Per quanto visto sopra, il numero di vertici minimo $R(N)$ per garantire 3-clique e 4-clique monocromatiche è rispettivamente $R(3)=6$, $R(4)=18$.

Importanza del teorema di Ramsey

Il teorema di Ramsey è un risultato fondamentale in combinatoria.

La prima versione di questo risultato fu dimostrato da F.P. Ramsey e diede impulso alla **teoria di Ramsey**, che cerca la regolarità in mezzo al disordine, ovvero definisce una nozione di regolarità in una classe di strutture combinatorie e cerca di determinare condizioni per l'esistenza di strutture regolari entro strutture assegnate.

Nel caso dei grafi con due colorazioni, la regolarità cercata è un sottografo completo monocromatico (clique).

I numeri di Ramsey

Il teorema di Ramsey afferma che, fissato k , esiste un $N=N(k)$ abbastanza grande tale che, in ogni colorazione con due colori di un grafo completo su N vertici è possibile trovare una k -clique monocromatica.

Nella dimostrazione originale, Plumptre dimostrò il teorema assumendo $N(k)=2^{2^k}$. Molto lavoro nell'ambito di questo ramo della combinatoria è stato rivolto a trovare stime migliori del numero $N(k)$.

Per ogni k , il minimo valore che rende vera la tesi di Ramsey, prende il nome di

Numero di Ramsey di ordine k , indicato $R(k)$.

Cosa sappiamo dei numeri di Ramsey?

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
R(k)	1	2	6	18	43-48	102-165	205-540	282-1870	565-6588	798-23556

Gli alieni di Erdős

Quanto è difficile calcolare esattamente i numeri di Ramsey?

Al grande matematico ungherese di origine ebraica **Paul Erdős** è attribuito il seguente aneddoto:

Si immagini una forza aliena, dotata di armamenti molto più sofisticati e potenti di quelli terrestri, che invii una delegazione sulla Terra che chieda di calcolare il valore esatto di $R(5)$ entro un anno, pena la distruzione del pianeta.

Secondo Erdős ci converrebbe cooptare i più potenti calcolatori e i più bravi matematici del pianeta con la fondata speranza di venire a capo del problema.

Se invece ci avessero chiesto di calcolare $R(6)$ allora ci converrebbe impiegare ogni risorsa per cercare di combattere gli alieni.

Morale sull'importanza delle applicazioni della matematica alla teoria (e alla pratica) delle decisioni.

Ci possiamo domandare perché sia così difficile calcolare esattamente un numero di Ramsey. Non possiamo usare il calcolatore?

C'è solo un numero finito di 2-colorazioni di un grafo completo.

Non possiamo ciclare su tutte le colorazioni di un grafo, per esempio K_{48} e vedere se contiene una 5-clique monocromatica?

Se esiste una colorazione che non contiene una 5-clique monocromatica, allora, $R(5) = 49$.

Se invece ogni colorazione contiene una 5-clique monocromatica, allora dobbiamo testare tutte le 2-colorazioni di K_{47} , ecc., fino a determinare il quinto numero di Ramsey.

Il problema di questa strategia, basata sulla forza bruta, è che il numero delle colorazioni da considerare è estremamente elevato.

Un K_{48} ha $\text{Bin}(48,2)=1128$ spigoli. Ogni spigolo si può colorare in due maniere e quindi dobbiamo controllare $2^{1128} \approx 3.6 \times 10^{339}$ colorazioni.

Al 2018, il più veloce super computer al mondo, il Cray Titan, poteva eseguire 20×10^{15} floating-point operazioni al secondo (FLOPS).

Se assumiamo (non realisticamente) che si possa verificare se una colorazione contiene una 5-clique monocromatica, con una semplice operazione in virgola mobile, sarebbero necessari più di 10^{315} anni per verificarle tutte.

Sembra assai plausibile però che la terra venga assorbita dal sole in meno di 10^{10} anni.