

**LICEO SCIENTIFICO "PLINIO SENIORE"
LICEO MATEMATICO - CLASSE PRIMA**

NUMERI PRIMI E CRIVELLO DI ERATOSTENE

Il crivello di Eratostene (introduzione e notizie storiche)

Il crivello di Eratostene è un antico procedimento per il calcolo delle tabelle di numeri primi fino ad un certo numero n prefissato. Questo principio deve il proprio nome al matematico che ne fu l'ideatore.

Eratostene (Cirene 275 circa a.C., Alessandria d'Egitto 195 circa a.C.) diresse ad Alessandria la più importante biblioteca dell'antichità. Intellettuale dai molteplici interessi in storia, filologia, matematica, astronomia e geodesia, fu in contatto con i principali studiosi del suo tempo. Oltre alla scoperta del metodo per trovare i numeri primi, gli sono stati attribuiti diversi altri risultati, tra cui una delle più accurate misurazioni della circonferenza terrestre di tutta l'antichità, fondata sull'osservazione delle differenti ombre proiettate dal sole in luoghi posti a diverse latitudini.

Il Crivello di Eratostene

Il crivello di Eratostene funziona come un "setaccio" in cui vengono eliminati i numeri naturali positivi che non sono primi e rimangono solamente i numeri primi minori o uguali a n .

Torniamo all'esercizio 1 della scheda precedente e supponiamo di voler trovare tutti i numeri primi da 1 a 50.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

Eliminiamo il numero 1, che per definizione non è primo; poi evidenziamo il numero 2 (che sarà un numero primo) ed eliminiamo tutti i numeri multipli di 2 (diversi da 2).

	2	3		5		7		9		11		13		15		17		19		21		23		25
	27		29		31		33		35		37		39		41		43		45		47		49	

Ora consideriamo il numero successivo, il numero 3, lo evidenziamo (questo significa che sarà un numero primo) ed eliminiamo, tra quelli rimasti, tutti i multipli di 3 (diversi da 3).

	2	3		5		7				11		13				17		19				23		25
			29		31				35		37				41		43				47		49	

Dunque, consideriamo il numero successivo, il numero 5, lo evidenziamo (questo significa che sarà un numero primo) ed eliminiamo, tra quelli rimasti, tutti i multipli di 5 (diversi da 5).

	2	3		5		7				11		13				17		19				23		
			29		31					37					41		43				47		49	

Infine, consideriamo il numero successivo, il numero 7, lo evidenziamo (questo significa che sarà un numero primo) ed eliminiamo, tra quelli rimasti, tutti i multipli di 7 (diversi da 7).

	2	3		5		7				11		13				17		19				23		
			29		31					37					41		43				47			

A questo punto è possibile interrompere la ripetizione di questi passaggi ricorsivi; infatti, possiamo essere sicuri che tutti i numeri rimasti sono primi. Per spiegare quest'ultima affermazione consideriamo il numero 11 e supponiamo, per assurdo, che tra i numeri rimasti ci sia un multiplo di 11 strettamente maggiore di 11 che chiamiamo N . Allora $N=11k$ e k deve essere un numero strettamente minore di 11, perché stiamo supponendo che N sia compreso tra 1 e 50. Allora o k è un numero primo oppure k è multiplo di un numero primo p minore di k (e quindi minore di 11). Quindi N risulta essere multiplo di un numero primo p (eventualmente uguale a k) minore di 11, ma questo è un assurdo, poiché non dovrebbe comparire nell'elenco in quanto dovrebbe essere stato già cancellato in quanto multiplo di p e strettamente maggiore di p .

Quindi i numeri primi compresi tra 1 e 50 sono: 2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47

Naturalmente il metodo si può generalizzare per determinare tutti i numeri primi compresi tra 1 e n . Si parte sempre dal numero 2 e si eliminano tutti i multipli di 2 strettamente maggiori di 2; poi si passa al numero successivo tra i rimanenti, il 3 (che sarà primo) e si eliminano tutti i multipli di 3 strettamente maggiori di 3; e così via.

Il procedimento si basa su due considerazioni importanti

1. Ad ogni passaggio il numero p considerato sarà sicuramente primo, poiché non essendo stato cancellato nei passaggi precedenti, avrà come divisori solamente 1 e p (osserviamo che un numero primo ha esattamente due divisori).
2. Il procedimento va reiterato fino al più grande numero primo minore o uguale a \sqrt{n} ; questa ultima considerazione può essere dimostrata in maniera analoga (ma in modo più generale) a quanto fatto in precedenza.

Proposta di lavoro: dimostrare il punto 2 di cui sopra.

Prima implementazione con il foglio elettronico proposta del Crivello di Eratostene

Supponiamo ora di voler utilizzare il foglio elettronico e quello che abbiamo appreso sul crivello di Eratostene per determinare i numeri primi compresi tra 1 e 50 (o per meglio dire tra 2 e 50).

Nella cella A1 scrivere "CRIVELLO DI ERATOSTENE"

Nella cella A3 scrivere k

Nella cella C3 scrivere 2

Nella cella D3 scrivere 3

Nella cella D3 scrivere 4 e così via fino alla cella AY3 in cui bisogna scrivere 50

Per visualizzare tutti i numeri immessi bisogna restringere la larghezza della cella

L'idea è di scrivere i numeri primi che andremo a considerare nella prima colonna (quella indicata dalla lettera A)

Nella cella A4 scrivere =C3 (sarà il numero primo numero primo considerato)

Ora dobbiamo cancellare dalla lista (intendo i numeri che si trovano tra le celle A3 e AY3) tutti i multipli di 2; visto che il numero 2 lo abbiamo già scritto nella prima colonna, possiamo pensare di cancellare anche lui dalla lista (non lo perdiamo, lo abbiamo solo scritto da un'altra parte).

Per determinare se un numero n è multiplo di 2, determiniamo se il resto della divisione $n:2$ è uguale a 0.

Quindi nella cella C4 dovremmo scrivere =SE(RESTO(C3;\$A4)=0;"";C3) (questa istruzione quindi fornisce una cella vuota se il numero sopra è multiplo di 2 oppure il numero sopra se questo non è multiplo di 2). In realtà nella cella C4 conviene scrivere

=SE(C3="";"";SE(RESTO(C3;\$A4)=0;"";C3))

Infatti dobbiamo anche verificare se la cella sopra è vuota; se fosse vuota (cioè il numero è già stato eliminato) deve continuare a rimanere vuota, altrimenti determinerà se il numero è multiplo di 2.

Questa ulteriore istruzione non servirebbe per l'eliminazione dei multipli di 2, ma servirà per l'eliminazione dei multipli dei numeri primi successivi volendo noi trascinare questa formula nelle celle sottostanti.

Trasciniamo ora la formula fino alla cella CY4 (in questo modo "spariranno" tutti i multipli di 2 dalla lista, mentre il numero 2 rimarrà nella prima colonna).

Ora nella cella A5 immettiamo il più piccolo numero tra quelli rimasti e scriviamo "=MIN(C4:AY4)". In questo caso dovrebbe apparire il valore 3 nella cella A5.

Trasciniamo ora la formula dalla cella C4 alla cella C5; poi successivamente dalla cella C5 nelle celle a destra fino alla cella CY5 (in questo modo cancelliamo dalla lista tutti i multipli di 3).

Poi selezioniamo le celle da A5 fino a AY5 e trasciniamo verso il basso fino a che la lista non rimarrà vuota.

Nella prima colonna, sotto la lettera k, appariranno (in colonna) i numeri primi compresi tra 2 e 50.

Naturalmente il numero 50 non è fondamentale, ma con procedimento analogo si potrebbe utilizzare il foglio elettronico per determinare i numeri primi compresi tra 2 e 100, tra 2 e 1000, tra 1 e un qualsiasi numero maggiore di 2.