LICEO SCIENTIFICO "PLINIO SENIORE"
LICEO MATEMATICO - CLASSE PRIMA

DIVISORI

1. Lo schema dei divisori di un numero naturale

Dato un numero naturale n, vogliamo rappresentare graficamente l'insieme di tutti i suoi divisori e delle relazioni tra loro. Costruiamo quello che chiameremo lo *schema dei divisori* di n con le seguenti regole: associamo ad ogni divisore un pallino, con la regola che se d_1 divide d_2 e non ci sono altri divisori tra di loro, allora uniamo i due pallini associati con una lineetta, ponendo d_1 più in basso rispetto a d_2. Quindi 1 (minimo divisore) sarà sempre l'unico elemento più in basso di tutti e n (massimo divisore) sarà sempre l'unico elemento più in alto nello schema.

Per capire come funziona in pratica, partiamo da un caso particolare: un numero che sia la potenza di un primo, p^k (p primo, k naturale). Tutti i suoi divisori sono del tipo p^i, con i compreso tra 0 e k; in particolare, notiamo che p^k ha $k+1$ divisori. In questo caso, lo schema dei divisori è una colonna di pallini impilata, ciascuno collegato con quello subito sopra di lui.

Ad esempio, i divisori di $243 = 3^5$ sono $5 + 1 = 6$:

$$3^5 = 243, \quad 3^4 = 81, \quad 3^3 = 27, \quad 3^2 = 9, \quad 3^1 = 3, \quad 3^0 = 1,$$

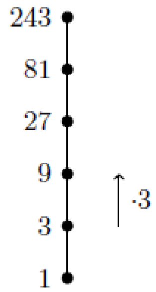
e il suo schema dei divisori è rappresentato nella figura in basso a sinistra. Si noti che per passare da un pallino a quello immediatamente superiore basta moltiplicare per 3.

Supponiamo ora che n abbia due fattori primi: $n = p^hq^k$ (p e q primi, h e k naturali). In questo caso, tutti i divisori hanno la forma p^iq^j, con $0 \leq i \leq h$ e $0 \leq j \leq k$; in particolare, poiché le $h+1$ possibili scelte di i e le $k+1$ scelte di j sono indipendenti, il numero ha $(h+1)(k+1)$ divisori. In questo caso, lo schema dei divisori è un rettangolo inclinato di 45° rispetto all'orizzontale, in cui ciascun pallino e collegato ai due immediatamente sopra di lui.

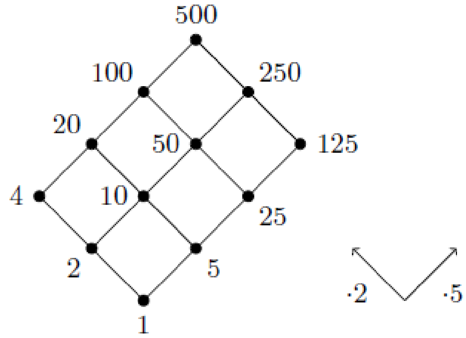
Ad esempio, i divisori di $500 = 2^2 5^3$ sono $(2 + 1)(3 + 1) = 12$:

	$i=2$	$i=1$	$i=0$
$j=3$	$2^2 \cdot 5^3 = 500$,	$2^1 \cdot 5^3 = 250$,	$2^0 \cdot 5^3 = 125$,
$j=2$	$2^2 \cdot 5^2 = 100$,	$2^1 \cdot 5^2 = 50$,	$2^0 \cdot 5^2 = 25$,
$j=1$	$2^2 \cdot 5^1 = 20$,	$2^1 \cdot 5^1 = 10$,	$2^0 \cdot 5^1 = 5$,
$j=0$	$2^2 \cdot 5^0 = 4$,	$2^1 \cdot 5^0 = 2$,	$2^0 \cdot 5^0 = 1$,

e il suo schema dei divisori è nella figura qui sotto a destra. In questo caso andare in alto a sinistra vuol dire moltiplicare per 2, mentre spostarsi in alto a destra equivale a moltiplicare per 5.



Schema dei divisori di 243



Schema dei divisori di 500

2. Proposte di lavoro

Proposta di lavoro 1

Per ciascuno dei seguenti numeri, calcolate quanti sono i suoi divisori, elencateli e disegnate lo schema con pallini e lineette: 1, 13, 49, 125, 1024.

Proposta di lavoro 2

Fate lo stesso per i numeri 10, 15, 98, 100, 3200, 10^6.

Proposta di lavoro 3

Provate a generalizzare quanto detto finora al caso di tre divisori primi, ragionando sul caso del numero più piccolo con questa proprietà, cioè $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$. Contate, elencate e schematizzate i suoi divisori. In questo caso, che forma geometrica ha lo schema dei divisori?

Proposta di lavoro 4

(*Per i più coraggiosi*) Provate a fare lo stesso con il primo numero con quattro divisori primi: $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$. Che nome dareste alla figura che viene fuori in questo caso?

Proposte di Lavoro 5

Provare che se un numero è un quadrato perfetto allora il numero di divisori è dispari.

Proposte di Lavoro 6

Determinare il più piccolo numero naturale con 11 divisori. Fare lo stesso con 15 divisori e successivamente con 30 divisori.

Proposte di Lavoro 7

Generalizzare il risultato trovato nel caso precedente in cui il numero dei divisori d è il prodotto di due primi diversi tra loro p e q con p<q, dimostrando che il più piccolo intero positivo avente d divisori è $2^{p-1} \cdot 3^{q-1}$

Proposte di Lavoro 8

Di un numero N si sa che l'intero 3 x N ha esattamente 4 divisori e l'intero 5 x N ha esattamente 6 divisori. Quanto vale N?