

**LICEO SCIENTIFICO "PLINIO SENIORE"  
LICEO MATEMATICO - CLASSE PRIMA****L'ALGORITMO DI EUCLIDE PER IL CALCOLO DEL  
M.C.D.  
PARTE PRIMA****Definizione di Algoritmo**

Procedimento sistematico di calcolo, oggi per lo più destinato a essere eseguito da un automa esecutore quale un calcolatore. Il termine deriva dal nome latinizzato del matematico algebrista di cultura araba *Muhammad ibn Mūsà, al-Khwarizmi* (Corasmia o Baghdad, 780 circa – 850 circa).

L'algoritmo è una sequenza finita di passi che specificano le operazioni necessarie per risolvere un problema computazionale: le istruzioni definiscono le operazioni logiche e algebriche da eseguire su un insieme di dati per ottenere un risultato e si distinguono in istruzioni per i dati di ingresso, istruzioni per l'elaborazione dei dati e istruzioni per la comunicazione dei risultati.

La nozione di algoritmo è quindi legata inscindibilmente a quella di dato. L'algoritmo può essere pensato come un manipolatore di dati che riceve dei dati di ingresso (*input*) relativi ad un problema da risolvere, li elabora e fornisce dei dati in uscita (*output*) che sono la risoluzione del problema.

Un algoritmo deve possedere alcune proprietà formali:

- ✓ *finitezza (numerica e temporale)*: deve avere un numero finito di istruzioni e le operazioni indicate in ciascuna di esse devono essere eseguite in un tempo finito e per un numero finito di volte;
- ✓ *non ambiguità*: l'interpretazione delle istruzioni deve essere univoca;
- ✓ *eseguibilità*: deve essere possibile eseguire le istruzioni con l'automa di cui si dispone;
- ✓ *determinismo*: a ogni passo della procedura deve essere univocamente determinata l'istruzione da eseguire.

La nozione di algoritmo era presente molto prima di quella di *dimostrazione* formalizzata dai greci; infatti già si trova già in documenti egizi risalenti al XVII secolo a. C. (per es. i papiri egizi di Ahmes in cui si trova descritto un ingegnoso metodo per effettuare la moltiplicazione).

Gli algoritmi a partire dal XX secolo vengono utilizzati come metodo per descrivere i programmi che vengono eseguiti dai calcolatori elettronici.

**Definizione di Massimo Comun Divisore (M.C.D.)**

Il massimo comune divisore fra due o più numeri naturali, diversi da 0, è il più grande fra i divisori comuni.

**Definizione di Minimo Comune Multiplo (m.c.m.)**

Il minimo comune multiplo fra due o più numeri naturali, diversi da 0, è il più piccolo fra i multipli comuni, diversi da 0.

**Legame tra M.C.D. e m.c.m.**

$$a \cdot b = M.C.D.(a,b) \cdot m.c.m.(a,b)$$

**Algoritmo per il calcolo del M.C.D.**

L'algoritmo, che supponiamo noto, più diffuso per il calcolo del M.C.D. tra due (o più) numeri naturali è quello basato sulla scomposizione di tali numeri in fattori primi. Definiremo "tradizionale" tale algoritmo.

### Algoritmo di Euclide per il calcolo del M.C.D. (metodo delle sottrazioni successive)

Dati due numeri naturali  $a$  e  $b$ , diversi da 0

- 1) se fosse  $a < b$  allora scambia  $a$  con  $b$ ;
- 2) se  $a = b$  allora  $b$  è il M.C.D. tra  $a$  e  $b$  altrimenti calcola la differenza  $a - b$ ;
- 3) definiamo  $a - b$  come nuovo valore di  $a$  (mentre  $b$  resta invariato);
- 4) se fosse  $a < b$  allora scambia  $a$  con  $b$ ;
- 5) ripeti il ciclo delle istruzioni fino a che si ottiene  $a - b = 0$ ;
- 6)  $b$  è il M.C.D. tra  $a$  e  $b$ .

#### Esempio

Siano  $a = 24$  e  $b = 15$ .

- 1)  $a - b = 9$ ;
- 2) poniamo  $a = 9$  e  $b = 15$ ;
- 3) poiché  $a < b$  allora poniamo  $a = 15$  e  $b = 9$ ;
- 4)  $a - b = 6$ ;
- 5) poniamo  $a = 6$  e  $b = 9$ ;
- 6) poiché  $a < b$  allora poniamo  $a = 9$  e  $b = 6$ ;
- 7)  $a - b = 3$ ;
- 8) poniamo  $a = 3$  e  $b = 6$ ;
- 9) poiché  $a < b$  allora poniamo  $a = 6$  e  $b = 3$ ;
- 10)  $a - b = 3$ ;
- 11) poniamo  $a = 3$  e  $b = 3$ ;
- 12)  $a - b = 0$ ;
- 13) 3 è il M.C.D. tra 24 e 15.

#### Proposta di lavoro 1

Utilizzando il metodo delle sottrazioni successive determinare il M.C.D. delle seguenti coppie di numeri

- a) 18 e 12;
- b) 24 e 12;
- c) 54 e 48;
- d) 24 e 24.

### Algoritmo di Euclide per il calcolo del M.C.D. (metodo delle divisioni successive)

Dati due numeri naturali  $a$  e  $b$ , diversi da 0, con  $a \geq b$

- 1) se  $a = b$  allora  $b$  è il M.C.D. tra  $a$  e  $b$  altrimenti calcola il resto  $r$  della divisione intera  $a : b$ ;
- 2) definiamo  $b$  come nuovo valore di  $a$  e  $r$  come nuovo valore di  $b$ ;
- 3) ripeti il ciclo delle istruzioni fino a che si ottiene  $r = 0$ ;
- 4)  $b$  è il M.C.D. tra  $a$  e  $b$ .

#### Esempio

Siano  $a = 24$  e  $b = 15$ .

- 1)  $a : b$  fornisce come quoziente  $q = 1$  e resto  $r = 9$ ;
- 2) poniamo  $a = 15$  e  $b = 9$ ;
- 3)  $a : b$  fornisce come quoziente  $q = 1$  e resto  $r = 6$ ;
- 4) poniamo  $a = 9$  e  $b = 6$ ;

- 5)  $a : b$  fornisce come quoziente  $q = 1$  e resto  $r = 3$ ;
- 6) poniamo  $a = 6$  e  $b = 3$ ;
- 7)  $a : b$  fornisce come quoziente  $q = 2$  e resto  $r = 0$
- 8) 3 è il M.C.D. tra 24 e 15.

**Proposta di lavoro 2**

Utilizzando il metodo delle divisioni successive determinare il M.C.D. delle seguenti coppie di numeri

- a) 18 e 12;
- b) 24 e 12;
- c) 54 e 48;
- d) 72 e 56.

**Proposta di lavoro 3**

Per ognuna delle coppie di numeri relativi agli esercizi 2, determina il m.c.m. (senza scomporre in fattori primi i numeri!)

**Proposta di lavoro 4**

Dati i numeri 360 e 216 determina il M.C.D. e m.c.m. nei seguenti casi

- a) utilizzando l'algoritmo "tradizionale";
- b) utilizzando l'algoritmo di Euclide delle sottrazioni successive;
- c) utilizzando l'algoritmo di Euclide delle divisioni successive.

**Proposta di lavoro 5**

Discutere ed elencare pregi e difetti dei tre metodi utilizzati per il calcolo del M.C.D. e m.c.m.

**Bibliografia e Sitografia**

- L. Sasso - "La Matematica a colori, edizione blu" Vol.1 - *Petrini editore*
- W. Maraschini, M. Palma - "Enciclopedia della Matematica" - *Garzanti Editore*
- T.H. Cormen, C.E. Leiserson, R. L. Rivest, Introduzione agli algoritmi, vol 1, *Jackson Libri*
- [http://www.treccani.it/enciclopedia/algoritmi\\_\(Enciclopedia-dei-ragazzi\)/](http://www.treccani.it/enciclopedia/algoritmi_(Enciclopedia-dei-ragazzi)/)