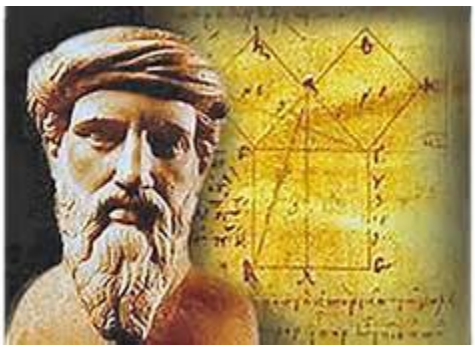
Istituto Statale ‘Biagio Pascal’
Istituto Tecnico Tecnologico – Liceo Scientifico
Via Brembio,97- 00188 - Via dei Robilant,2 - 00194 – Roma
Centralino: 06-12112-4205 via Brembio - 06-12112-4225 Via dei Robilant
Codice meccanografico RMTF330002 C.F. 97046890584 Web: www.pascalroma.edu.it
Email: RMTF330002@istruzione.it Pec: RMTF330002@pec.istruzione.it

Liceo Matematico

U.D. 7

Pitagora e la tavola pitagorica.



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Prerequisiti: Nozioni di aritmetica e geometria delle scuole medie. Quadrato e cubo di un polinomio. Aritmetica modulare.

Obiettivi: Conoscere le principali scoperte negli studi matematici dei pitagorici. Conoscere le curiosità e le particolarità della tavola pitagorica.

Esperienza:

Le sorprese della tavola pitagorica:

Scheda n°1: *La somma dei numeri contenuti in ciascuno dei quadrati principali è un quadrato perfetto (è il quadrato della somma dei numeri della prima riga (o colonna) del quadrato stesso).*

Scheda n°2: *La somma dei numeri contenuti in ciascuna delle due strisce ad angolo retto (come 4,8,12,16,4,8,12) è il cubo dell'indice di riga (o colonna).*

Scheda n°3: *Qualunque numero interno alla cornice è la media degli 8 numeri che lo circondano.*

Scheda n°4: *Un numero qualunque della tavola pitagorica è la media aritmetica dei due numeri della sua stessa riga o colonna da esso "equidistanti", nonché dei k numeri che lo precedono e lo seguono sulla sua stessa riga o colonna.*

Scheda n°5: *La somma dei numeri situati nei quattro estremi delle mediane o nei quattro vertici di un quadrato di lato k caselle (k dispari) contenuto nella tavola pitagorica è quattro volte il numero della casella centrale.*

Scheda n°6: *Cubi pitagorici.*

Materiale: Video proiettore, schede sulla tavola pitagorica. Foglio di calcolo excel(?)

Verifica: schede sulla tavola pitagorica

Tempi: 2 ore (3)

La chiarificazione della natura dei numeri si pose come domanda imprescindibile a Pitagora e ai suoi seguaci. Essi si interrogarono sulle proprietà dei **numeri pari** e **dispari**, dei **numeri triangolar**i e dei **numeri perfet**ti e lasciarono un'eredità duratura a coloro che si sarebbero occupati di matematica.

Secondo il mito, ai pitagorici si devono le seguenti scoperte:

- la scoperta dei **numeri irrazionali** (tenuta nascosta poiché contraddiceva la teoria pitagorica secondo cui tutte le quantità possibili sono esprimibili come frazioni);
- che la **somma degli angoli interni** di un triangolo è pari a **due angoli retti**. Più in generale, nel caso di un poligono di *n* lati la somma degli angoli interni è uguale a *(n-2)* angoli piatti;
- che in un triangolo rettangolo, il quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui cateti, ossia l'enunciato (ma non la dimostrazione) del teorema noto come **teorema di Pitagora**;
- la soluzione geometrica di alcune **equazioni algebriche**;
- la costruzione dei **solidi regolari**.

Ci soffermeremo su alcune curiosità della tavola pitagorica

1. Le sorprese della tavola pitagorica

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Scheda n°1 u.d. n° 7

Istituto Statale 'Biagio Pascal' - **Liceo Matematico**

Alunno: _____ **Classe:**_____

Data la tavola pitagorica, calcolare **la somma dei numeri contenuti nei quadrati che si possono formare partendo dall'angolo in alto a sinistra** (che da ora chiameremo **quadrati principali**).

Cosa noti?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Prova a dimostrare la tua intuizione:

.

Osserviamo che:

la somma dei numeri contenuti in ciascuno dei quadrati principali è un quadrato perfetto (è il quadrato della somma dei numeri della prima riga (o colonna) del quadrato stesso).

		$8=2^3$	$27=3^3$	$64=4^3$	$125=5^3$
n	1 (1)	2	3	4	5
2n	2	4 (9)	6	8	10
3n	3	6	9 (36)	12	15
4n	4	8	12	16 (100)	20
5n	5	10	15	20	25 (225)

Possiamo rappresentare la somma dei numeri contenuti in un generico quadrato principale (di lato n passi) in questo modo:

1 + 2 + 3 + … + n +

2 + 2*2 + 2*3 + …+2*n +

3 + 3*2 + 3*3 + …+3*n +

…

n + n*2 + n*3 + …+n*n + cioè

(1+2 + 3+… + n) + 2(1+2 + 3+… + n) +3(1+2 + 3+… + n) + … +n(1+2 + 3+… + n)

possiamo raccogliere (1+2 + 3+… + n) e si ottiene:

(1+2 + 3+… + n) * (1+2 + 3+… + n) cioè $(1+2 + 3+\ldots + n)^2$.

Scheda n°2 u.d. n° 7

Istituto Statale 'Biagio Pascal' - **Liceo Matematico**

Alunno: _____ **Classe:**_____

Data la tavola pitagorica, calcolare **la somma dei numeri contenuti in ciascuna delle due strisce ad angolo retto** (come 4,8,12,16,4,8,12). Cosa noti?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Prova a dimostrare la tua intuizione:

Osserviamo che:

la somma dei numeri contenuti in ciascuna delle due strisce ad angolo retto (come 4,8,12,16,4,8,12) è il cubo dell'indice di riga (o colonna).

n +

2*n +

3*n +

…

n + n*2 + n*3 + …+n*n + cioè, isolando n*n e mettendo in evidenza n, abbiamo

n (1+2 + 3+… + n-1) + n(1+2 + 3+… + n-1) + n*n =

2n (1+2 + 3+… + n-1) + n^2 ,

sappiamo che (oppure possiamo dimostrare per induzione che) (1+2 + 3+… + n-1) = $\frac{(n-1)n}{2}$ quindi

$2n\frac{(n-1)n}{2} + n^2 = (n-1)n^2 + n^2 = n^3 - n^2 + n^2 = n^3$

Osservando i risultati ottenuti dalle due schede precedenti possiamo aggiungere che:

La somma dei cubi dei primi N numeri interi è uguale alla somma dei numeri della tavola pitagorica e quindi al quadrato della somma dei primi N numeri interi: $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + N^3 = (1 + 2 + 3 + ... + N)^2$

$1 = 1^3 = 1$

$2 + 4 + 2 = 2^3 = 8$

$3 + 6 + 9 + 6 + 3 = 3^3 = 27$

$4 + 8 + 12 + 16 + 12 + 8 + 4 = 4^3 = 64$

La loro somma è dunque 1 + 8 + 27 + 64 = 100

Scheda n°3 u.d. n° 7

Istituto Statale 'Biagio Pascal' - **Liceo Matematico**

Alunno: _____ **Classe:**_____

Dato un qualunque numero interno alla cornice della tavola pitagorica verificare che esso è **la media degli 8 numeri che lo circondano**

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Dimostrazione:

Possiamo scrivere una porzione di tavola pitagorica in questo modo

$(a-1)*(b-1)$	$(a-1)*b$	$(a-1)*(b+1)$
$a*(b-1)$	$a*b$	$a*(b+1)$
$(a+1)*(b-1)$	$(a+1)*b$	$(a+1)*(b+1)$

Facciamo la somma degli otto elementi della cornice e la dividiamo è per 8 (cioè calcoliamo la media)

$(ab-a-b+1+ ab-b+ab+a-b-1+ab-a+ab+a+ab-a+b-1+ab+b+ab+a+b+1)/8=8ab/8 = ab$

Si ottiene il risultato richiesto.

Scheda n°4 u.d. n° 7

Istituto Statale 'Biagio Pascal' - **Liceo Matematico**

Alunno: _____ **Classe:**_____

Verificare che un **numero qualunque** della tavola pitagorica **è la media aritmetica dei due numeri della sua stessa riga o colonna da esso "equidistanti", nonché dei k numeri che lo precedono e lo seguono sulla sua stessa riga o colonna.**

Per esempio: (6 + 42)/2 = 24 e (12 + 36)/2 = 24; (6 + 12 + 18 + 30 + 36 + 42)/6 = 144/6 = 24 e (12 + 16 + 20 + 28 + 32 + 36)/6 = 144/6 = 24.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	**24**	30	36	42	48	45	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Dimostrazione:

Riprendiamo la

(a-1)∗(b-1)	(a-1)∗ b	(a-1)∗(b+1)
0a∗(b-1)	a∗b	a∗(b+1)
(a+1)∗(b-1)	(a+1)∗b	(a+1)∗(b+1)

Sommiamo i due numeri equidistanti sulla colonna e dividiamo per 2:

[(a-1) b + (a+1) b]/2 = [ab –b +ab +b]/2 = 2ab/2 =ab

Analogamente per i numeri equidistanti sulle righe.

Se ci allontaniamo (per esempio (a-3)… il risultato non cambia.

Scheda n° 5 u.d. n° 7

Istituto Statale 'Biagio Pascal' - **Liceo Matematico**

Alunno: _____ **Classe:**_____

Verificare che **la somma dei numeri situati nei quattro estremi delle mediane o nei quattro vertici di un quadrato di lato k caselle (k dispari) contenuto nella tavola pitagorica è quattro volte il numero della casella centrale.**

Per esempio con riferimento al quadrato evidenziato in figura 2:

$12 + 36 + 16 + 32 = 4 \times 24 = 96$;

$8 + 24 + 48 + 16 = 4 \times 24 = 96$.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	**24**	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Dimostrazione:

Riprendiamo la

(a-1)∗(b-1)	(a-1)∗ b	(a-1)∗(b+1)
a∗(b-1)	a∗b	a∗(b+1)
(a+1)∗(b-1)	(a+1)∗b	(a+1)∗(b+1)

Facciamo la somma degli estremi delle mediane:

(a-1)b + a(b-1) + a (b+1) + (a-1)b = ab-b +ab-a+ab+a+ab+b =4 b

Ora facciamo la somma dei vertici:

(a-1)∗(b-1) +(a-1)∗(b+1) + (a+1)∗(b-1) + (a+1)∗(b+1) = ab –a-b+1+ ab +a-b-1+ ab-a+b-1+ab +a+b+1 = 4ab

Se ci allontaniamo (per esempio (a-3)… il risultato non cambia.

Scheda n° 6 u.d. n° 7

Istituto Statale 'Biagio Pascal' - **Liceo Matematico**

Alunno: _____ **Classe:**_____

Possiamo costruire i cubi pitagorici?

Possiamo pensare di estendere al caso del prodotto fra tre numeri interi lo schema di calcolo della tavola pitagorica. Avremo in tal modo in luogo della tavola pitagorica il **cubo pitagorico**, inteso come tabella a tre entrate per il prodotto di tre numeri interi. In fondo, si tratta di passare da un caso bidimensionale a uno tridimensionale. In luogo di righe e colonne, parleremo in tal caso di spigoli a, b, c del cubo pitagorico disposti per esempio secondo gli assi x,y,z di una terna cartesiana. Il prodotto fra i numeri interi n, p, q si troverà nella cella (cubo elementare) individuata dalle tre coordinate n, p, q. In tal modo si possono ottenere analoghe proprietà di quelle precedentemente viste per la tavola pitagorica.

Materiale:

Stuzzicadenti, cubetti di polistirolo con la scritta risultante del prodotto delle coordinate.

Osservazioni: