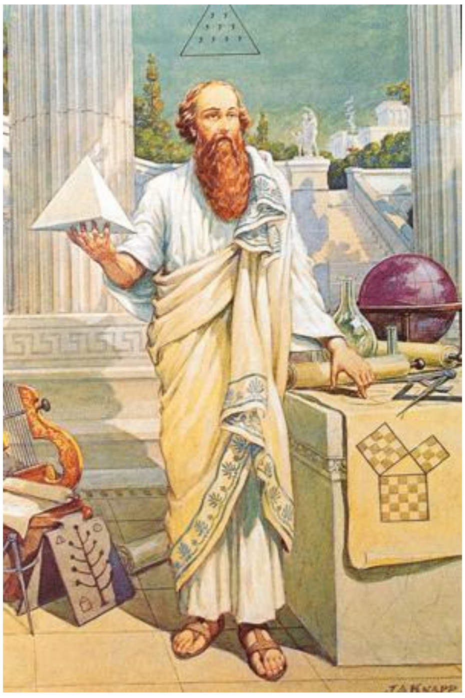
Istituto Statale ‘Biagio Pascal’
Istituto Tecnico Tecnologico – Liceo Scientifico
Via Brembio,97- 00188 - Via dei Robilant,2 - 00194 – Roma
Centralino: 06-12112-4205 via Brembio - 06-12112-4225 Via dei Robilant
Codice meccanografico RMTF330002 C.F. 97046890584 Web: www.itispascal.it
Email: RMTF330002@istruzione.it Pec: RMTF330002@pec.istruzione.it

Liceo Matematico

U.D. 6

πitagora e i suoi amici irrazionali



Prerequisiti: Gli insiemi numerici e rappresentazione sulla retta, sapere che ogni elemento di Q si può convertire in numero decimale limitato o illimitato periodico; circonferenza cerchio e poligoni regolari (sono sufficienti le nozioni delle scuole medie, in caso si può fare un veloce e schematico ripasso), cenni sulle successioni di numeri, cenni sulla probabilità (è sufficiente quella che si affronta nel terzo anno della scuola media).

Obiettivi generali:

L'obiettivo generale del percorso didattico è quello di contribuire a comprendere il nesso tra la cultura scientifica e la filosofia e di favorire una formazione culturale equilibrata tra il sapere matematico-scientifico e quello storico-filosofico. In particolare in questa unità didattica si cercherà di delineare la figura di Pitagora, trattando gli aspetti filosofici e le tematiche religiose presenti nel suo pensiero e cercando di evidenziare le conseguenze dell'incontro/scontro dei Pitagorici con l'infinito e con i numeri irrazionali. Inoltre Si userà la storia della matematica come supporto per comprendere al meglio il concetto di numero decimale illimitato non periodico, fornire spunti per collegamenti interdisciplinari (ad esempio con la letteratura di Dante), sottolineando l'aspetto culturale della matematica; presentare la disciplina da un punto di vista dinamico.

Obiettivi in termini di conoscenze, di abilità e di competenze

- Acquisire gli elementi fondamentali del pensiero di Pitagora
- Conoscere analiticamente la dottrina del numero come principio del cosmo
- Comprendere il problema dell'infinito e dei numeri irrazionali
- Saper cogliere il nesso tra il pensiero filosofico e la dottrina pitagorica dell'anima
- Conoscere e saper usare il lessico specifico e i concetti-chiave del filosofo trattato
- Saper esporre in modo appropriato ed argomentato il pensiero di Pitagora
- Potenziare le capacità di analisi, di sintesi e rafforzare le capacità di giudizio critico
- Acquisire l'abitudine a ragionare con rigore logico

Esperienza:

1) Pitagora
   - La vita
   - Matematica e purificazione dell'anima
   - Il numero come principio della realtà
   - La scoperta delle grandezze incommensurabili
   - Testi

2) Che cos’è pi greco?
3) Perché il nome pi greco?
4) Quali civiltà ne cominciarono a parlare?
5) Ma a questo punto: Che numero è π ?
6) π e la probabilità…
7) π i calcolatori…
8) Scoperta la 2 000.000.000.000.000 cifra!!
9) π = 3,14 tuttavia è una buona approssimazione…
10) π….i suoi amici irrazionali e il problema di Delo.
11) La quadratura del cerchio.

Materiale:

<u>Una delle due (o tre) lezioni si terrà martedì 14 marzo (*π* day) e ci sarà una festa con dolci fatti a forma di *π*</u>

Verifica:

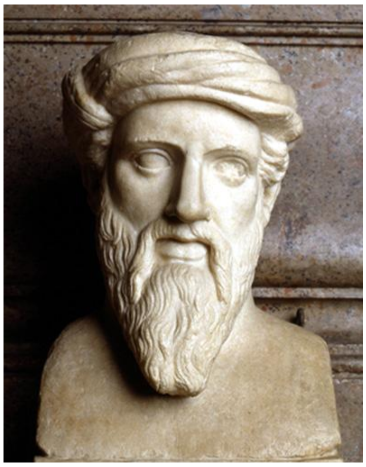
Scheda di verifica sul metodo di esaustione

Tempi: 3 ore

La vita

Pitagora nacque a Samo probabilmente nel 570 a.C.; dopo aver compiuto diversi viaggi in Oriente si trasferì in Magna Grecia, a Crotone. Qui costituì una comunità originariamente etico-religiosa che divenne poi anche un'associazione politica schierata con il partito aristocratico. Probabilmente solo gli iniziati potevano far parte della comunità e accedere alle verità fondamentali del pitagorismo. Verso la fine del VI secolo una rivolta organizzata dal partito democratico portò alla cacciata dei Pitagorici da Crotone. Pitagora, con ogni probabilità, riuscì a fuggire a Metaponto dove morì poco dopo, presumibilmente nel 496 a.C..

Matematica e purificazione dell'anima


Pitagora, Musei capitolini, Roma

La figura di Pitagora è avvolta nel mistero ed è spesso presentata dalla tradizione come quella di un profeta-mago, detentore di una sapienza segreta riservata agli iniziati. Probabilmente non scrisse nulla ed esistono molti dubbi sull'attribuzione a Pitagora stesso delle scoperte riferite alla sua persona, pertanto molte delle caratteristiche del pensiero pitagorico sono riferite alla Scuola pitagorica in generale.
La dottrina filosofica che può essere attribuita con maggiore certezza a Pitagora è la dottrina della metempsicosi, ovvero la trasmigrazione dell'anima che dopo la morte "viaggia" da un corpo all'altro. L'anima ha un'origine divina e dopo la "caduta" deve espiare con la vicenda della reincarnazioni la colpa originaria. Come punizione, infatti, l'anima viene imprigionata nel corpo che risulta perciò la "tomba" in cui viene momentaneamente sepolta. Dopo la morte del corpo, l'anima ritorna alla sua sede nella regione astrale, prima di reincarnarsi nuovamente.
Quando l'anima è imprigionata nel corpo deve prepararsi alla vita futura purificandosi. La purificazione può avvenire attraverso esercizi ascetici e pratiche purificatrici che hanno la funzione di "abituarla" al distacco dal corpo. Le disposizioni della Scuola pitagorica a carattere pratico morale, quali le prescrizioni alimentari (per esempio il divieto di mangiare carne) e le indicazioni per una vita austera, erano probabilmente rivolte agli uditori, detti "acusmatici", mentre per gli iniziati, i cosiddetti "matematici", la cura dell'anima si otteneva con la musica e con la conoscenza dell'armonia del mondo che si poteva raggiungere solamente con lo studio della matematica. La matematica diviene così uno strumento di conoscenza del

mondo, finalizzato a purificare l'anima e a condurla alla salvezza e alla liberazione. I purificati erano destinati ad una rinascita in una esistenza superiore o ad una sorta di beatitudine divina, ottenuta tramite la liberazione dal ciclo delle rincarnazioni.

Il numero come principio della realtà

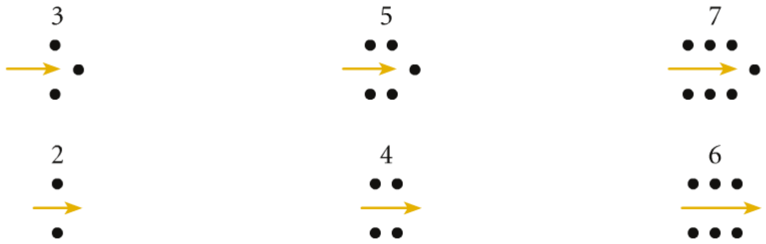
Alla Scuola pitagorica si deve la creazione della matematica come scienza. Una tradizione storiografica vuole che Pitagora abbia appreso le sue conoscenze matematiche durante i suoi viaggi in Mesopotamia e in Egitto. Ma la matematica elaborata da queste civiltà era essenzialmente finalizzata a risolvere problemi pratici, senza nessuna impalcatura concettuale e senza nessun fondamento filosofico. Pitagora e la sua Scuola elaborano, invece, le strutture concettuali della matematica, facendo astrazione di tutte le applicazioni pratiche e stabilendo il carattere rigoroso della dimostrazione matematica. Anche se è difficile stabilire con precisione quali siano le dottrine matematiche e i teoremi attribuibili al pitagorismo, è certo che si deve a Pitagora (e ai Pitagorici) la fondazione scientifica e filosofica della matematica.

La tesi fondamentale della filosofia pitagorica è che il numero è il principio di tutte le cose: i numeri rappresentano l'essenza del cosmo.

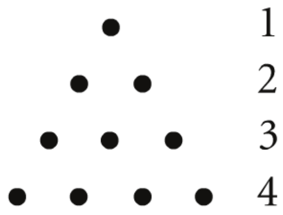
I numeri vengono concepiti come interi, riconducibili a collezioni di più unità. L'unità, a sua volta, è considerata coincidente con il punto geometrico. Aritmetica e geometria sono così unite: un numero è una figura geometrica e ogni forma geometrica è riconducibile ad un numero, la figura geometrica è un ordinamento di punti nello spazio e il numero rappresenta la misura di questo ordinamento.

"Il concetto che è alla base del principio pitagorico che le cose sono numeri è, dunque, quello di un ordine misurabile. Affermare, come facevano i Pitagorici, che le cose sono costituiti da numeri e che quindi tutto il mondo è fatto di numeri, significa che la vera natura del mondo, come delle singole cose, consiste in un ordinamento geometrico esprimibile in numeri (misurabile)" (Abbagnano, Fornero, 2009).

L'uno è il principio generatore perché da esso derivano tutti i numeri. L'uno è parimpari poiché se sommato ad un pari lo fa diventare dispari, se aggiunto ad un dispari lo fa diventare pari. I Pitagorici collegano la distinzione tra pari e dispari a quella tra illimitato e limite. I numeri pari sono riconducibili all'illimitato poiché se rappresentati come disposizione geometrica di punti, quando il numero viene diviso in due parti rimane un campo vuoto, senza limite; per questo motivo i numeri pari sono imperfetti. Al contrario quando un numero dispari viene diviso un due parti rimane sempre tra queste un'unita che pone un limite alla divisione; il dispari è dunque sempre delimitato e per tale motivo è perfetto.



Come si può notare dalla figura, i numeri dispari sono entità limitate, ovvero compiute e terminate, quindi perfette; mentre i pari sono entità illimitate, ovvero non compiute e non terminate, quindi imperfette. Le serie di punti che costituiscono i numeri pari procedono indefinitamente e non trovano un punto che completi e "chiuda" la figura, al contrario le figure che rappresentano i numeri dispari sono complete e quindi perfette perché "chiuse" dall'unità.
Questo modo schema di pensiero rappresenta il modo di pensare tipico dei Greci, infatti mentre nella tradizione filosofica successiva e nella la mentalità odierna i concetti di illimitato e infinito sono associati alla perfezione, per i Greci la perfezione è rappresentata dal limite inteso come qualcosa di determinato e compiuto, mentre l'infinito e l'illimitato rappresentano qualcosa di incompiuto e indeterminato, quindi "difettoso".
Dall'opposizione fondamentale dispari/pari deriva il dualismo pitagorico che ricorre alla contrapposizione di coppie di opposti per spiegare l'intera realtà.
Alla coppie dispari/pari e limitato/illimitato i Pitagorici fanno corrispondere altre otto opposizioni fondamentali: unità/molteplicità; destra/sinistra, maschio/femmina, quiete/movimento, retta/curva, luce/tenebra, bene/male, quadrato/rettangolo. Come si nota dalle parte dei dispari stanno le determinazioni positive, mentre dalla parte dei pari quelle negative.
Il fatto che il numero complessivo di opposizioni sia 10 non è casuale: per i Pitagorici, infatti, tale numero è perfetto nonché sacro e rappresenta la "mistica decade". Il dieci viene rappresentato come un triangolo equilatero che è formato dai primi 4 numeri e che contiene egualmente il pari (2, 4, 6, 8) e il dispari (3, 5, 7, 9).



La sacralità del numero dieci deriva, altresì, dal fatto che esso rappresenta il numero dell'universo poiché contiene la somma di tutte le dimensioni geometriche. "Un punto è il generatore delle dimensioni, due punti determinano una linea a una dimensione, tre punti (non allineati) determinano un triangolo con un'area a due dimensioni, e quattro punti (non giacenti in uno stesso piano) determinano un tetraedro con un volume a tre dimensioni: la somma dei numeri rappresentanti tutte le dimensioni è pertanto il venerato numero dieci" (Boyer, 1976)

La scoperta delle grandezze incommensurabili

La matematica pitagorica presenta un elemento speciale che la differenzia dalle concezioni matematiche successive: la discontinuità. "Si dice che la scienza di Pitagora è una matematica del discontinuo, perché essa si fonda esclusivamente sui numeri interi e su ciò che può essere espresso con i numeri interi (per esempio sulle frazioni ordinarie, e non, invece, sui numeri irrazionali). Secondo essa, l'accrescimento di una grandezza procede per «salti discontinui», essendo impossibile aggiungere qualcosa che sia minore dell'unità" (Geymonat, 1970).

I numeri interi sono alla base del pilastro concettuale del pitagorismo secondo il quale la razionalità è misurabilità e armonia.

La crisi del pitagorismo è determinata dall'idea di discontinuità e dallo "scontro" con l'infinito, ovvero dalla scoperta che le figure geometriche sono costituite non da un numero finito ma da infiniti punti.

Il problema emerge proprio dal teorema attribuito a Pitagora, in particolare dalla scoperta dell'incommensurabilità del lato e della diagonale di un quadrato. Applicando, infatti, il teorema di Pitagora ai triangoli isosceli in cui la diagonale divide un quadrato, il lato e la diagonale del quadrato non hanno nessun sottomultiplo comune, sono quindi incommensurabili. "Proviamo a supporre che un segmento sia generato dall'accostamento di una serie finita di punti (piccoli, ma non nulli, e tutti uguali fra loro, come allora si immaginava): ne seguirebbe che uno qualunque di questi punti risulterebbe contenuto un numero intero, e finito, di volte (per esempio *m*

volte) nel lato e un altro numero intero, e finito, di volte (per esempio *n* volte) nella diagonale. Lato e diagonale avrebbero dunque un sottomultiplo comune, e non sarebbero - come si era dimostrato - incommensurabili. La loro incommensurabilità esige pertanto che essi siano costituite da una infinità di punti" (Geymonat, 1970).
La leggenda narra che lo "scandalo" sia stato tenuto nascosto fino a quando non fu svelato da Ippaso di Metaponto, cacciato dalla Scuola proprio per aver svelato il segreto delle grandezze incommensurabili. Ippaso, secondo la leggenda, sarebbe poi morto in un naufragio scatenato da Zeus come punizione per il suo "pecccato". Al di là degli aneddoti su Ippaso, vi era un notevole problema logico derivante dalla difficoltà di accordare l'infinita divisibilità dello spazio con la finitezza del numero, di conciliare la geometria con l'aritmetica, il continuo con il discontinuo. Questa crisi generata dall'incontro/scontro con l'infinito fu poi riaperta e alimentata dai paradossi di Zenone.
"Per uscire da essa, i maggiori scienziati greci non troveranno altra via se non quella di scindere completamente la geometria dall'aritmetica, interpretando la prima come studio del continuo e la seconda come studio del discontinuo.
Il rapporto tra discontinuo e continuo resterà, per tutta la storia del pensiero umano, un problema molto difficile e molto dibattuto [...]. L'averne intuito l'esistenza e la difficoltà va dunque considerato come un merito, e molto notevole, dello spirito greco.
Il primo passo della ragione umana si compie, in ogni ricerca, col porre a nudo le difficoltà ivi esistenti, per gravi che esse siano, non col nasconderle. Solo chi le conosce, non chi le ignora, può sentirsi spinto a cercare i mezzi indispensabili per risolverle o, comunque, dominarle; e questa ricerca è la molla più decisiva del progresso scientifico" (Geymonat, 1970).

Testi

Pitagora e i pitagorici

Essendo velleitario ogni tentativo di operare una netta distinzione tra le diverse fasi del pitagorismo antico, in questa raccolta antologica tratteremo il movimento pitagorico come un tutt'uno, adeguandoci alla scelta storiografica di Aristotele.

T3 > Il numero come principio

Nel I libro della *Metafisica*, da cui è tratto questo brano, Aristotele usa l'espressione «quelli che son detti pitagorici» per indicare il comune lavoro di ricerca portato avanti dalla fine del VI secolo a.C. all'inizio del IV da un gruppo di pensatori uniti non solo dalla pratica filosofica e scientifica, ma anche dall'adesione a precetti di carattere morale e religioso. Ai pitagorici Aristotele attribuisce l'identificazione del numero come principio di ogni realtà.

Al tempo di costoro, e prima di costoro [Leucippo e Democrito], si dedicarono alle matematiche e per primi le fecero progredire quelli che son detti pitagorici. Questi, dediti a tale studio, credettero che i principi delle matematiche fossero anche i principi di tutte le cose che sono. Or poiché principi delle matematiche sono i numeri, e nei numeri essi credevano di trovare, più che nel fuoco e nella terra e nell'acqua, somiglianza con le cose che sono e divengono [...], e poiché inoltre vedevano espresse dai numeri le proprietà e i rapporti degli accordi armonici, poiché insomma ogni cosa nella natura appariva loro simile ai numeri, e i numeri apparivano primi tra tutto ciò ch'è nella natura, pensarono che gli elementi dei numeri fossero elementi di tutte le cose che sono, e che l'intero mondo fosse armonia e numero.

(DK 58 B 4, trad. it. di A. Maddalena, in *op. cit.*)

Analisi del testo

1-2 L'espressione «quelli che son detti pitagorici» va intesa, come abbiamo accennato nelle righe introduttive, come termine tecnico volto a indicare un gruppo, laddove fino a quel momento il testo aristotelico da cui il brano è tratto aveva preso in considerazione solo figure ben individuate di pensatori.

2-9 Il passo sembra suggerire che per i pitagorici le cose sono numeri e che, di conseguenza, gli elementi che compongono i numeri sono i medesimi di cui sono fatte tutte le cose. L'idea di fondo è che il numero sia davvero il costituente della realtà, come un mattone lo è di un edificio, in quanto esso esprime (e tende a coincidere con) le figure geometriche e queste, a loro volta, costituiscono i corpi in quanto ne identificano i limiti e la forma. I numeri, dunque, non sono la forma o la formulazione astratta di una sostanza altra o principio, ma davvero sono immanenti alle cose e finiscono quindi per identificarsi con queste.

La testimonianza aristotelica presenta peraltro un'ambiguità: i luoghi in cui si dice che il tutto è "formato" di numeri li presentano proprio come materia (r. **3**), mentre i passi in cui le cose sono semplicemente dette "conformi" ai numeri sembrano descriverli come pura forma (qui alle rr. **3-7**). Tali caratterizzazioni del numero, rispettivamente come immediato componente materiale della realtà o come principio della sua intelligibilità, possono essere posizioni distinte e successive del pitagorismo, o infiltrazioni interpretative posteriori. Ma è bene non dimenticare che i numeri sono considerati qui i costituenti di *tutte* le realtà, non solo di quelle fisiche, cosa naturale per i pitagorici, data anche l'incapacità dei primi filosofi di distinguere (come a noi moderni sembra invece naturale e ovvio) tra quanto è astratto e quanto è concreto.

L'idea di identificare il principio con il numero deriva ai pitagorici anche da osservazioni empiriche (rr. **5-9**): essi si rendono conto, infatti, del carattere periodico, cioè ritmico e regolare, dei principali fenomeni naturali, cosmici e forse anche biologici (ad esempio l'alternarsi del giorno e della notte, o delle stagioni, o l'andamento delle maree e delle costellazioni), nonché dell'esprimibilità numerica dei rapporti tra i suoni negli accordi armonici.

T4 > La struttura del numero

In questo passo della *Metafisica*, che segue di poco quello appena analizzato, Aristotele si sofferma sulla natura del principio identificato dai pitagorici, per poi considerarne la struttura, vale a dire la fondamentale divisione in dispari e pari. A questo dualismo si riconducono tutte le altre opposizioni individuabili nel mondo.

Pare che anche costoro, che pensavano che principio fosse il numero, pensassero il principio sia come materia e sia come qualità accidentale e condizione delle cose che sono. Elementi del numero ponevano il pari e il dispari, l'uno pensato come infinito e l'altro come limitato; l'unità la consideravano derivante da entrambi (dicevano quindi che essa è pari e dispari); e dall'unità pensavano che nascesse il numero e che nei numeri consistesse, come ho detto, tutto il mondo. Altri pitagorici dicevano che i principi sono dieci, quelli che secondo la serie son detti: limite e illimitato, dispari e pari, uno e molteplice, destro e sinistro, maschio e femmina, fermo e mosso, dritto e curvo, luce e tenebre, buono e cattivo, quadrato e rettangolare.

(DK 58 B 5, trad. it. di A. Maddalena, in *op. cit.*)

Analisi del testo

1-2 La prima parte del passo aristotelico risulta di difficile interpretazione, perché è oscuro il senso delle espressioni «qualità accidentale» e «condizione delle cose che sono», nonché il loro rapporto con il concetto di «principio» (gli stessi esegeti antichi propongono letture congetturali affatto diverse). Probabilmente, operando una semplificazione notevole, possiamo suggerire che la prima espressione indichi le proprietà delle cose e la seconda il loro stato: in ogni caso, sembra di poter affermare che per i pitagorici il numero è sia causa materiale, sia causa formale della totalità.

I TESTI

2-5 Il testo prosegue presentando la celebre differenziazione pitagorica tra pari e dispari e la loro derivazione dall'unità, detta anche "parimpari". Si noti come, nonostante innumerevoli testimonianze individuino il principio dei pitagorici nell'opposizione tra l'Uno (il dispari) e la Diade (il pari), tale opposizione prenda piede, in realtà, solo in epoca platonica: essa non è dunque da confondere con la dottrina, genuinamente pitagorica, del cosiddetto "parimpari", che costituisce l'autentico punto di partenza per la generazione del numero, ovvero del cosmo (v. rr. **4-5**), mentre l'opposizione tra limite e limitato, con la valenza cosmogonica che qui assume, deriva probabilmente da Anassimandro. Nonostante le difficoltà interpretative, possiamo affermare con sicurezza che, almeno nel campo dei numeri, l'illimitato è il pari e il limitato o limitante è il dispari, di modo che vi sono numeri originati per intero dall'illimitato (come 16, che corrisponde a 4x4), numeri originati per intero dal limitato (come 15, che corrisponde a 3x5) e infine numeri originati dal limite e dall'illimitato (come 6, che corrisponde a 2x3).

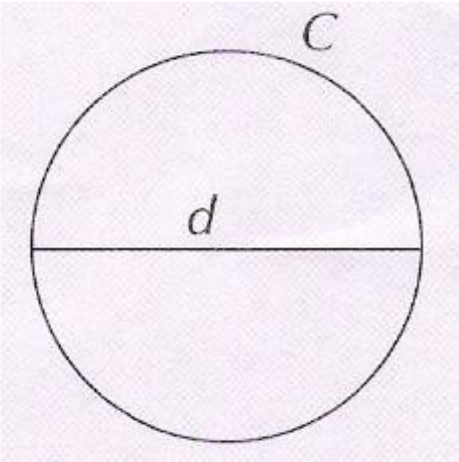
6-8 Con l'espressione «altri pitagorici» Aristotele si riferisce a una fase relativamente recente del pitagorismo: la tavola delle opposizioni è infatti attribuita, se non a Filolao, comunque a pensatori della sua generazione (siamo nella seconda metà del V secolo a.C.). In ogni caso, tutti i pitagorici concordavano nel derivare la totalità dei fenomeni da un'opposizione fondamentale, che si divideva quindi in serie derivate di contrari: le dieci coppie qui enunciate, sebbene si susseguano casualmente e senza un filo rosso nella loro deduzione, ci mostrano che il numero era caricato di connotati qualitativi e che, anzi, assumeva una serie di significati determinati, riflettendo in certi casi convinzioni o pregiudizi tipici della mentalità arcaica.

Bibliografia

- Ludovico Geymonat, *Storia del pensiero filosofico e scientifico*, Garzanti, 1970
- Carl B. Boyer, *Storia della matematic*a, Isedi, 1976
- Nicola Abbagnano, Giovanni Fornero, *La Filosofia*, Paravia 2009

1) Cos'è pi greco?

Innanzitutto si parte dalla definizione, che non è detto che tutti ricordino, di pi greco come rapporto tra lunghezza di una circonferenza e il proprio diametro (ricordando che tale valore è sempre costante poiché le circonferenze tra di loro sono tutte simili)



2) Perché il nome pi greco?

Fu il matematico Eulero (1707- 1783) a dare il nome a questo numero, in onore a Pitagora (la prima lettera del nome Pitagora utilizzando l'alfabeto greco).

3) Quali civiltà ne cominciarono a parlare?

I primi riferimenti storici?

Si può partire dal riferimento storico presente in un versetto della Bibbia in cui si fa riferimento ad una vasca che il re Salomone (che regnò in Israele dal 970 al 930 a. C: circa) avrebbe fatto costruire per i propri sacerdoti:

" *Fece un bacino di metallo fuso di dieci cubiti da un orlo all'altro, rotondo; la sua altezza era di cinque cubiti e la sua circonferenza di trenta cubiti"*

(1 Re 7, 23)

In questo modo si poneva il valore di p-greco uguale a 3!

Le prime approssimazioni di pi greco provengono invece addirittura dai Babilonesi, che ne constatavano un valore pari a $\frac{25}{8}$ = 3,125, come riporta una tavoletta d'argilla scoperta nel 1936.

Sempre in quel periodo gli Egizi usavano l'approssimazione $\left(\frac{16}{9}\right)^2$ = 3,1604.

Nello specifico, per quanto concerne gli Egizi, ciò è documentato dal rinvenimento, del **papiro di Rhind** , (1650 a. C. circa), conservato oggi al **British Museum** di Londra.

Nel Papiro di Rhind, lo scriba di nome Ahmes, scrisse appunto: "Togli $\frac{1}{9}$ ad un diametro e costruisci un quadrato sulla parte che ne rimane; questo quadrato ha la stessa area del cerchio". Poiché sappiamo che l'area del cerchio è uguale ad $A = \pi r^2$, se quest'area è il quadrato di $\frac{8}{9}$ del diametro, per il testo di Ahmes il rapporto tra la circonferenza e il proprio diametro è $4\left(\frac{8}{9}\right)^2$ = 3,16049.

Questo valore si discostava di meno dell'1 per cento del vero valore.

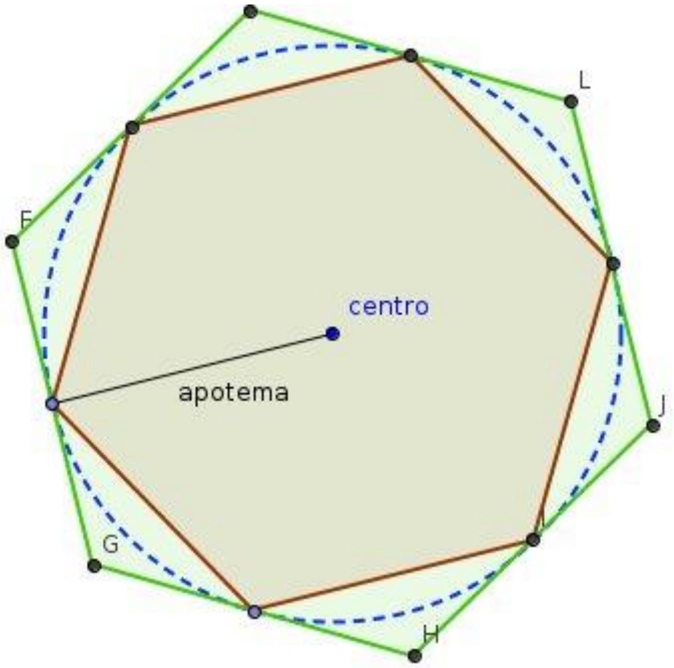
Questo risultato però non ebbe alcuna diffusione, si pensi che mille anni dopo i babilonesi e gli antichi ebrei continuavano ad usare il valore 3, che era molto meno esatto.
(N.B: Le formule contenute nel Papiro Rhind rappresentano il primo caso documentato di un tentativo di "quadrare il cerchio", ossia di costruire un quadrato con la stessa area del cerchio.)

Riguardo alla civiltà Egizia, da notare la strana coincidenza per cui dividendo il perimetro della base quadrata della Piramide di Cheope per la sua altezza si ottiene pi-greco!

Nel XII secolo a. C. i Cinesi furono più drastici o più pratici assumendo il valore di pi-greco uguale a 3.

In Occidente, dopo gli Egizi, la ricerca fu ripresa da **Archimede di Siracusa** (287 a . C. – 212 a. C.), uno fra i massimi pensatori della storia, straordinario matematico, fisico e inventore.

Archimede utilizzò i **metodi di esaustione** di **Antifonte** e **Brisone**, concentrandosi sui perimetri dei due poligoni, anziché sulle loro aree, trovando un'approssimazione alla circonferenza del cerchio. Egli raddoppiò quattro volte i lati di due esagoni, ottenendo due poligoni di 96 lati, di cui calcolò i perimetri. Successivamente rese pubbliche le sue scoperte nel libro **"Sulla misurazione del cerchio" (da pag.91 a pag 98)**: "La circonferenza di ogni cerchio è tripla del diametro, più una parte minore di un settimo del diametro e maggiore di dieci settantunesimi" (prop.3). Archimede sapeva di poter descrivere solo i limiti superiore e inferiore del rapporto, ma se si fa una media dei due valori si ottiene 3,1419, con un errore di meno di tre decimillesimi del valore reale.



Più aumento il numero dei lati del poligono, più il perimetro del poligono tende al valore della lunghezza della circonferenza $C = 2\pi r$, con $r = 1$.

Con i **romani** abbiamo un'arretramento nello studio di II, poiché al culmine del loro impero (27 a.C.- 476 d.C.), usarono spesso per π il valore di 3+1/8 (pur sapendo che 3+1/7 era più esatto), perché per le loro legioni era più facile usare 1/8 (che è una metà di una metà di una metà). In effetti, un trattato romano di agrimensura contiene addirittura le seguenti istruzioni per la quadratura del cerchio: "Dividi la circonferenza di un cerchio in quattro parti e prendine una come lato di un quadrato; questo quadrato avrà l'area uguale al cerchio". Ciò implica che π = 4.

Nel 1202 Leonardo Pisano (**Fibonacci**) scrisse il Liber abaci, che contribuì alla diffusione in Europa dei numerali arabi e nel 1220, nella Practica geometriae, Fibonacci usò il valore approssimato di π di 1440/ (458+1/3) o di 864/275 (circa 3,1418).

Il matematico olandese Van Ceulen (1540-1610), riprendendo il metodo di Archimede trovò molte cifre decimali di π!!

Ludolph van Ceulen, infatti, spese gran parte della sua vita nel calcolo della costante matematica usando essenzialmente l'algoritmo usato da Archimede per approssimare la circonferenza con dei poligoni regolari, ma arrivando ad usare poligoni con 2 miliardi di lati!!!

Pubblicò nel suo libro *Von de circle* (Sul cerchio) (1596) un valore di pi con 20 cifre decimali. Successivamente portò il numero delle cifre a 35. Il valore ottenuto era:

3.14159265358979323846264338327950288...

Fu così orgoglioso di questo risultato che volle che fosse inciso sulla sua pietra tombale. Essa fu persa ma nel 2000 fu ritrovata. Pi greco viene talvolta chiamato anche "Costante Ludolphina" in suo onore.

Il matematico francese François Viète (1540 – 1602), riprendendo anch’egli il metodo di Archimede ed usando le radici quadrate per poligoni di 4, 8, 16, ecc.. lati, trovò la seguente formula :

$$\frac{2}{\pi}=\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots$$

Attenzione : l’approssimazione di Viète era meno precisa di quella di Van Ceulen, poiché approssimò π alla decima cifra decimale; inoltre era un metodo lento poiché:

con 4 prodotti ------------------------> si ottenevano le prime 2 cifre decimali di π

con 6 prodotti ------------------------> si ottenevano le prime 4 cifre decimali di π

con 10 prodotti ------------------------> si ottenevano le prime 6 cifre decimali di π

tuttavia la conquista maggiore di Viète fu quella di **esprimere π usando un prodotto infinito.**

Il matematico inglese John Wallis (1616 – 1703), calcolando l’area di opportuni trapezoidi, ricavò per π il prodotto infinito :

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\frac{2}{3}\frac{4}{3}\frac{4}{5}\frac{6}{5}\frac{6}{7}\frac{8}{7}\ \cdots$$

Questo metodo, attribuito anche a Newton, era anch’esso come quello di Viète un metodo abbastanza lento, se si pensa che occorrevano 1000 termini per ottenere le prime 2 cifre decimali esatte.

Però Wallis, a differenza di Viète, utilizzò un metodo che riguardava prodotti di numeri razionali, senza l’impiego delle scomode radici quadrate!!

Il matematico, filosofo, scienziato, logico, diplomatico **Leibniz** (1646 – 1716), ottenne invece il famoso risultato :

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

Ma il metodo era ancora lento.

Nel 1706 il matematico J. Machin, utilizzò una formula più veloce, con l'aiuto della goniometria ed arrivò ad approssimare π a 100 cifre esatte.

Nel 1743, il grande matematico Eulero (fu lui come ricordiamo ad usare il simbolo di π) trovò un'ennesima formula che approssimava π a 600 termini esatti .

4) Ma a questo punto: Che numero è π ?

Π è irrazionale !!

Il tentativo di comprendere la natura del π ha impegnato moltissimi matematici. Uno degli sviluppi più importanti fu la **dimostrazione** che π era un **numero irrazionale**, dimostrazione fornita nel 1767 da J.H. **Lambert** (1728-1777). Ricordiamo che gli irrazionali sono quei numeri reali che non possono essere scritti come quoziente di due numeri interi, cioè non sono numeri frazionari. E' abbastanza semplice mostrare che numeri come $\sqrt{2}$ o $\sqrt{3}$ sono irrazionali, ma si dovette attendere Lambert nel diciottesimo secolo per avere la dimostrazione dell'appartenenza di π a tale categoria. La sua scoperta assume un'importanza particolare se si pensa al fatto che i numeri razionali (le frazioni) hanno uno sviluppo decimale che può essere finito o periodico; cioè le cifre decimali o finiscono a un certo punto, o sono seguite solo da zeri, o mostrano una continua ripetizione di un certo blocco di numeri. Ora, se π fosse razionale dovrebbe mostrare uno di questi due comportamenti, e quindi prima o poi si dovrebbe determinarne definitivamente lo sviluppo decimale. Dimostrando che π era irrazionale Lambert garantiva invece che il computo dei suoi decimali non avrebbe mai avuto fine!!

A questo punto divenne inutile continuare a trovare le cifre di pigreco!!

5) π e la probabilità...

Tuttavia nel 1777 il Conte di Buffon trovò uno strano legame tra questo **numero magico** e la **probabilità.**

Ago di Buffon

Il problema dell'ago di Buffon è un problema statistico posto nel XVIII secolo da Georges-Louis Leclerc, conte di Buffon: supponiamo di avere un pavimento (o anche un foglio, o una qualsiasi superficie piana) con un motivo a linee parallele, tutte aventi la stessa distanza l'una dall'altra, e facciamo cadere un ago, più corto della distanza tra due linee, su di esso. Qual è la probabilità che l'ago cada su una di queste linee?

La soluzione del problema, non semplice da spiegare, è:

$$p = \frac{2l}{\pi d}$$

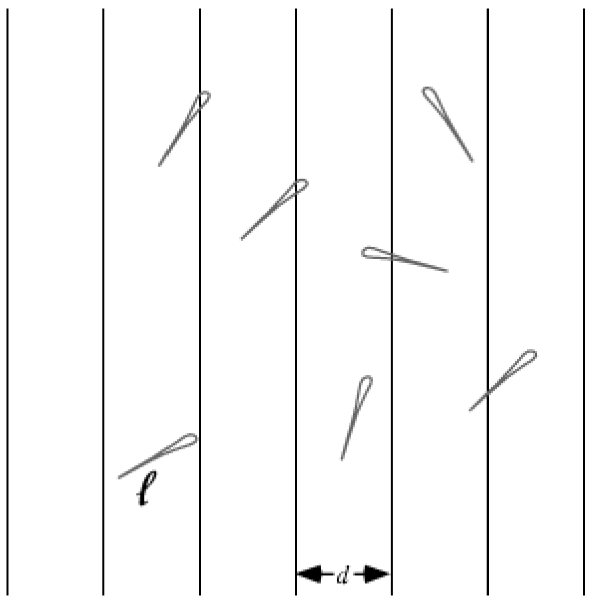
dove p è la probabilità che *l'ago* tocchi una delle linee parallele, l la lunghezza dell'*ago* e d la distanza tra le linee parallele.

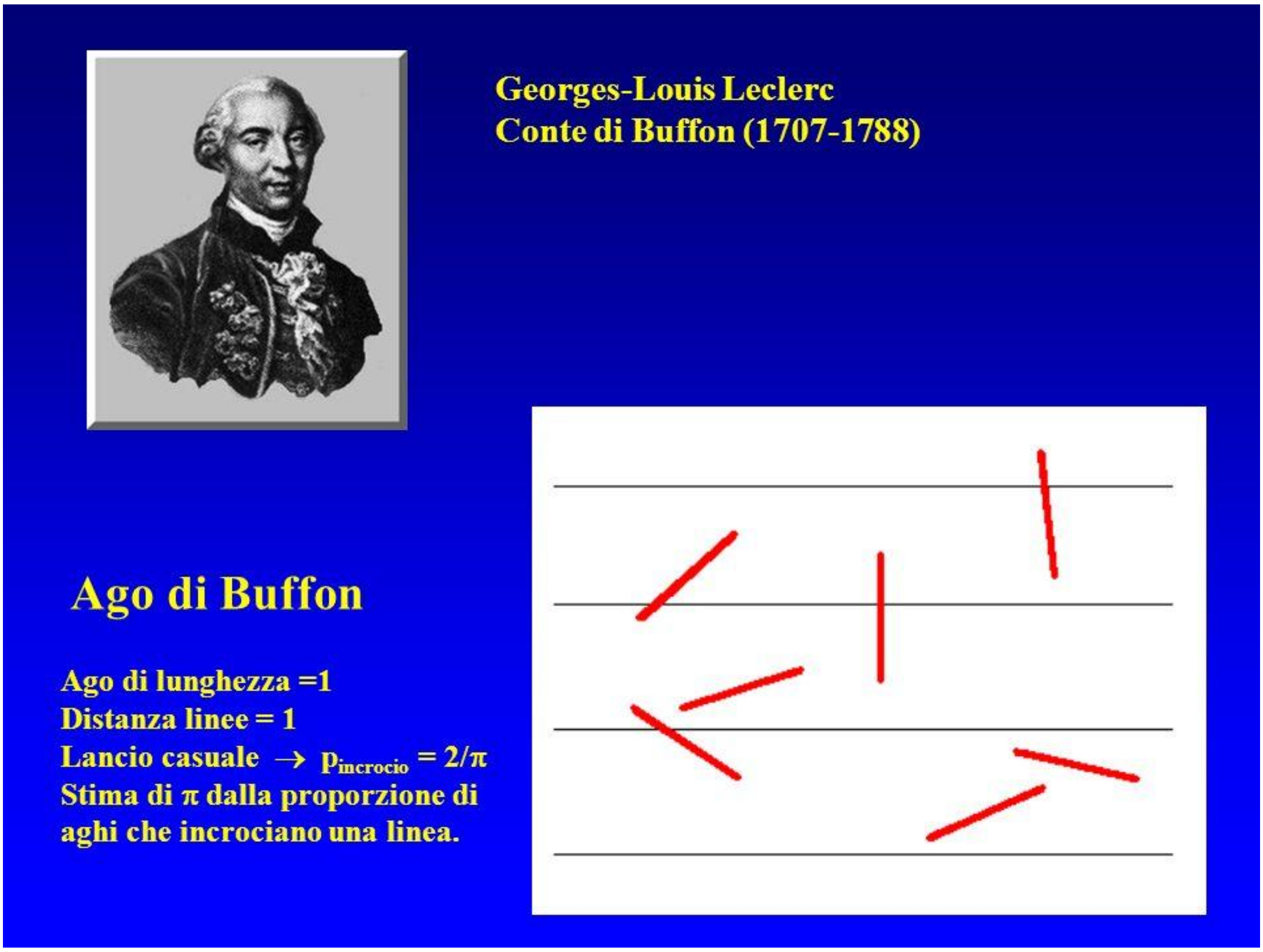
Per calcolare un'approssimazione di p (pi greco) allora, è possibile determinare la probabilità p in modo sperimentale. Si lancia , in maniera casuale, un numero *grande* di *aghi* su un foglio appositamente preparato con linee parallele calcolando la probabilità come

$$p = \frac{numero\ aghi\ che\ toccano\ una\ linea}{numero\ aghi\ che\ sono\ stati\ lanciati}$$

Successivamente si determina l'approssimazione di p (pi greco) dalla formula:

$$\pi = \frac{2l}{pt}$$





6) π i calcolatori...

Oramai che è stato dimostrato che π è irrazionale, che senso ha calcolare ulteriori cifre di π ?

Oggi il calcolo di π è diventato una sorta di parametro per l'elaborazione: serve come misura della raffinatezza e dell'affidabilità dei calcolatori che lo effettuano. Inoltre, la ricerca di valori sempre più precisi di π porta i matematici a scoprire risvolti inattesi e interessanti della teoria dei numeri. Un'altra motivazione, più sincera, è semplicemente l'esistenza di π : "perché c'è". In effetti, π è un tema fisso della cultura matematica da più di due millenni e mezzo. Per di più, esiste sempre la possibilità che questi calcoli servano a gettar luce su alcuni dei misteri che circondano π, una costante universale ancora non ben conosciuta nonostante la sua natura relativamente elementare.

7) Scoperta la 2 000.000.000.000.000 cifra!!

Questa notizia risale ad esempio al 2010:

Scoperta la 2 000.000.000.000.000ma cifra di pi greco: è uno 0!!!!

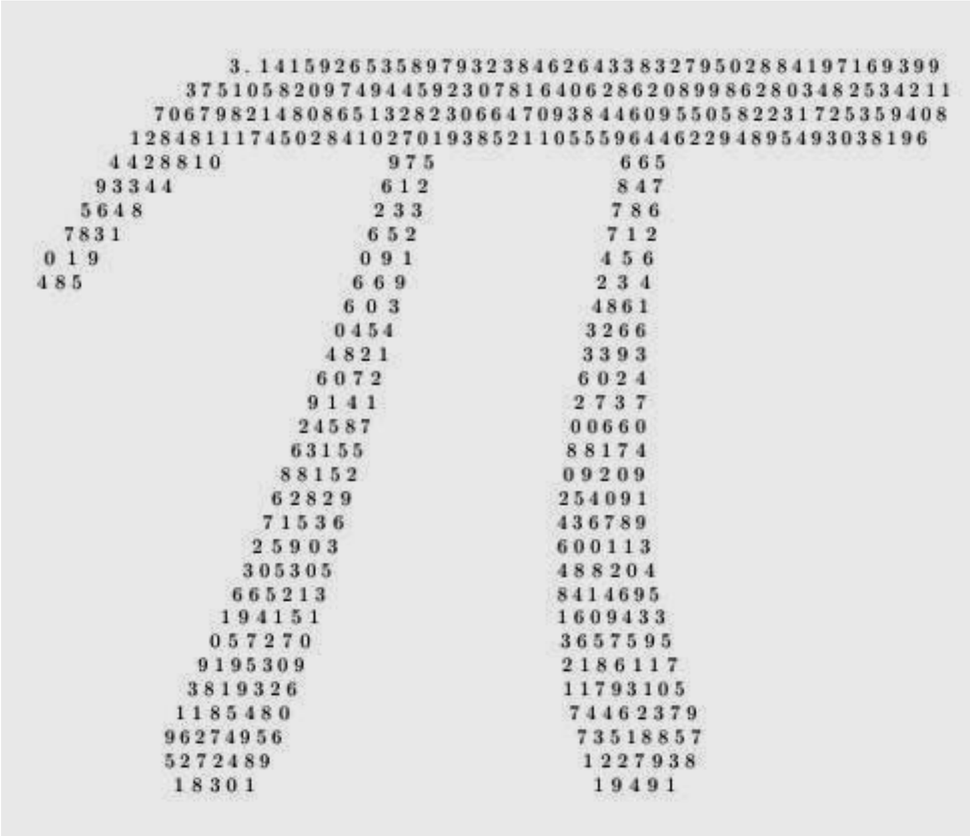
On October 17, 2010

La cifra decimale numero 2.000.000.000.000.000 di pi greco equivale ad uno zero. Lo ha annunciato recentemente Nicholas Sze, di Yahoo!, che ha lasciato 1000 computer accesi a calcolare, convertire e verificare per 23 giorni di fila.

8) π = 3,14 tuttavia è una buona approssimazione...

Per i nostri scopi pratici, per i nostri problemi di geometria, di fisica o anche di vita quotidiana, l'approssimazione che si fa di π a 3,14 è più che sufficiente.

Infatti, un grosso quantitativo di cifre di pi-greco non ha nessuna utilità pratica dato che **30 cifre decimali sono sufficienti ad ottenere una precisione non raggiungibile con nessun microscopio su una circonferenza pari a quella del sistema solare.** E' però di grande interesse teorico potere compiere studi sulla periodicità delle cifre, sulla ripetizione consecutiva di una stessa cifra e sulla distribuzione delle cifre.



9) π…i suoi amici irrazionali….e il problema di Delo

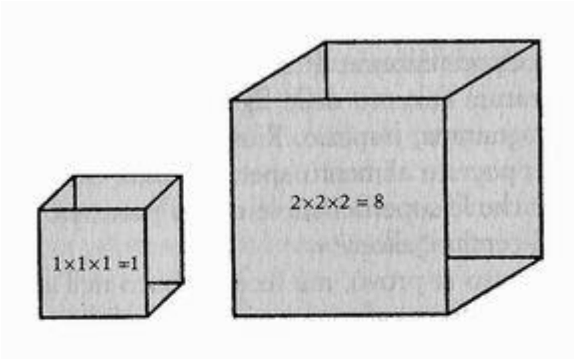
Una leggenda narra che nell’anno 400 a.C. la città di Atene fu colpita da una terribile epidemia di peste. Una delegazione di ateniesi si diresse a Delfi per consultare l’oracolo, nelle speranza che potesse indicare un modo per porre fine all’epidemia.

Questo fu il responso dell’oracolo : “ Ateniesi, per far cessare la peste, dovete duplicatre l’altare consacrato ad Apollo nell’isola di Delo”.

Qual è la risposta?

L’altare di Apollo, famoso in tutta la Grecia, aveva una forma particolare : era, infatti, un cubo.

Per soddisfare la richiesta dell'oracolo occorreva dunque costruire un nuovo altare di uguale forma ma con volume doppio. La leggenda narra che per prima cosa gli ateniesi si recarono sull'isola di Delo e costruirono un nuovo altare, con il lato doppio del precedente.

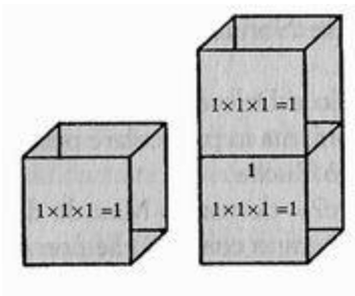


Se l era il lato dell'altare originale, il suo volume era $V = l^3$, mentre il volume del nuovo altare valeva , $V' = (2l)^3 = 8l^3 = 8V$.

La peste non cessò : gli ateniesi avevano infatti costruito un altare, non due, ma otto volte più grande di quello iniziale.

Resisi conto dell'errore, si rimisero al lavoro e costruirono un nuovo altare, mettendo sopra a quello vecchio un altro cubo delle stesse dimensioni.

Anche questa volta la peste non terminò: il volume era quello richiesto, ma l'altare non era più un cubo.

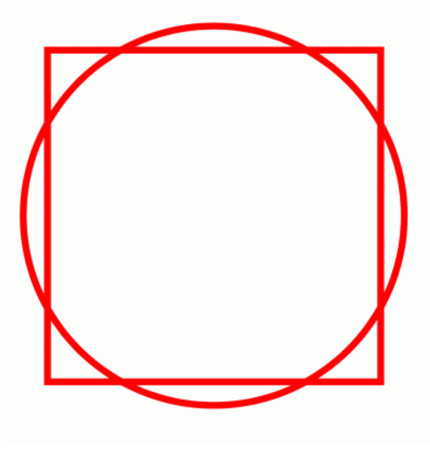


Analizziamo il problema dal punto di vista algebrico. Per costruire un altare cubico di volume doppio rispetto a quello originale deve essere $V' = 2V$ e quindi $l'^3 = 2l^3$, e quindi $l' = \sqrt[3]{2}l$. In conclusione, bisogna poter misurare un lato pari a $\sqrt[3]{2}l$; se per semplicità assumiamo l= 1, si tratta di costruire un segmento a cui corrisponda il numero $\sqrt[3]{2}$.

Le regole fondamentali delle costruzioni della geometria euclidea, applicate nell'antica Grecia, permettono il solo utilizzo di riga e compasso. Tali strumenti sono ben diversi da quelli odierni: per esempio, la riga euclidea non ha unità di misura e tacche utili per misurare, ma è una semplice asta che serve solo a tracciare segmenti di retta. Oggi sappiamo, tramite dimostrazione algebrica, che con tali mezzi è impossibile ottener un semento di lunghezza $\sqrt[3]{2}$. Il problema di Delo della duplicazione del cubo costituisce una delle questioni più discusse nella Grecia classica. E' importante osservare che il segmento ottenuto attraverso questi procedimenti, ovvero $\sqrt[3]{2}$, risulta un grandezza incommensurabile rispetto al segmento di misura 1, cioè non esiste un sottomultiplo comune. Questo significa che $\sqrt[3]{2}$ non è un numero razionale. Si tratta quindi di un numero irrazionale.

L a leggenda narra che la peste terminò quando gli ateniesi si rivolsero al filosofo Platone, che spiegò finalmente la risposta dell'oracolo : il dio non aveva bisogno di un altare dal volume duplicato, ma voleva far capire ai Greci che trascuravano lo studio della matematica e in particolare della geometria.

10) La quadratura del cerchio



Un altro dei problemi celebri della geometria classica che coinvolge i numeri irrazionali è quello della quadratura del cerchio.

Dato un cerchio, bisogna costruire un quadrato di area pari a quella del cerchio.

Dal punto di vista algebrico. Indicati con r il raggio del cerchio e con l il lato del quadrato da trovare, vale la relazione :

$\pi r^2 = l^2$, ossia $l = \sqrt{\pi} r$.

Assunto per semplicità r = 1, si tratta di costruire un lato di misura $\sqrt{\pi}$.

Nel 1882 venne dimostrata l'impossibilità di tale costruzione attraverso le regole euclidee di riga e compasso. Abbandonando tali regole è possibile ottenere la sua rappresentazione attraverso vari metodi.

Il numero $\sqrt{\pi}$ è come $\sqrt[3]{2}$, un numero irrazionale.

Scheda lavoro

Come fece **Archimede** all'epoca, ora dovete provare voi!

Consideriamo, così come fece anche lui, una circonferenza ci raggio $r = 1$.

La formula per trovare la lunghezza della circonferenza è $C = 2\pi r$

Nel mio caso, quindi $C = 2\pi$.

Di conseguenza $\pi = \frac{C}{2}$.

Ora, consideriamo, come fece Archimede, poligoni di lati 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384….ecc.

In realtà Archimede si fermò ad un poligono di 96 lati.

APPROSSIMAZIONE PER DIFETTO (CONSIDERIAMO I POLIGONI INSCRITTI)

Ora se chiamiamo con **lato n** il lato del poligono iscritto di n lati, applicando il teorema di Pitagora si dimostrano i seguenti risultati :

1. la formula per trovare l'apotema del poligono inscritto di n lati:

$$\textbf{apotema n} = \sqrt{\mathbf{1} - \left(\frac{\boldsymbol{lato\ n}}{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{2}}}$$

2. la formula per trovare il lato del poligono iscritto di 2n lati (il doppio):

$$\boldsymbol{L_i(2n)} = \sqrt{\left(\frac{lato\ n}{2}\right)^2 + (1 - apotema\ n)^2}$$

3. la formula per trovare il lato del poligono circoscritto di 2n lati:

$$\boldsymbol{L_C(2n) = \frac{L_i(2n)}{apotema\ (2n)}}$$

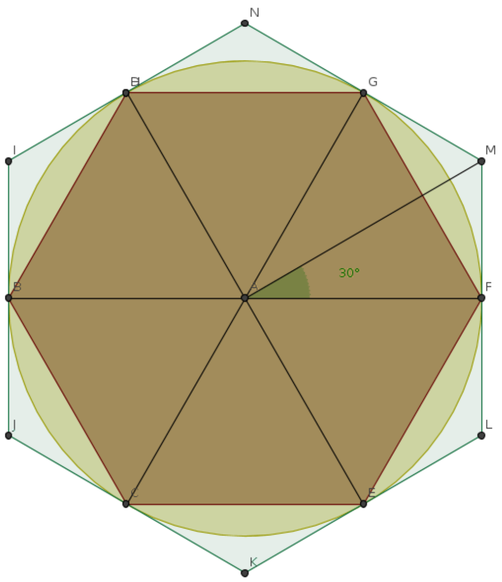
Procedendo per ricorsione dunque si arriva, con l'aiuto della calcolatrice, a trovare i valori dei lati dei poligoni successivi.

Poiché partiamo dall'esagono, come da figura sotto dovreste ricordare che l'esagono regolare inscritto nella circonferenza di raggio 1 ha il lato uguale al raggio, quindi vale 1.

Ricordiamo, inoltre, che l'apotema dell'esagono regolare inscritto in un circonferenza di raggio 1 vale **apotema n** $=\frac{\sqrt{3}}{2} \cong 0{,}86$, (si può verificare applicando il teorema di Pitagora) anche qui potete iniziare a riempire la seguente tabella, sempre con l'aiuto della calcolatrice.

Quindi, provate a riempire la tabella sottostante riempiendo i dati richiesti a partire dall'esagono, ottenendo così la prima approssimazione di π.

Chiaramente, nei passaggi successivi la calcolatrice vi servirà….anche se…pensate….ai tempi di Archimede la calcolatrice ancora non era stata inventata!!!



r = 1

APPROSSIMAZIONE DI π PER DIFETTO (POLIGONI INSCRITTI)

Numero lati	Lato poligono inscritto	Apotema poligono inscritto	Perimetro poligono inscritto	Approssimazione di π per difetto (Perimetro poligono inscritto) : 2
6				
12				
24				
48				
96				

APPROSSIMAZIONE DI π PER ECCESSO (POLIGONI CIRCOSCRITTI)

Numero lati	Lato poligono circoscritto	Apotema poligono inscritto	Perimetro poligono circoscritto	Approssimazione di π per eccesso (Perimetro poligono inscritto) : 2
6				
12				
24				
48				

96				