Dipartimento di Matematica

Sapienza Università di Roma

Contare l'infinito

ANNALISA MALUSA

Incontro con gli studenti dei LM Newton e Pascal

OGGI SI FESTEGGIA

3,

1415926535 8979323846 2643383279 5028841971 6939937510 5820974944 5923078164 0628620899 8628034825

3421170679 8214808651 3282306647 0938446095 5058223172 5359408128 4811174502 8410270193 8521105559

6446229489 5493038196 4428810975 6659334461 2847564823 3786783165 2712019091 4564856692 3460348610

4543266482 1339360726 0249141273 7245870066 0631558817 4881520920 9628292540 9171536436 7892590360

0113305305 4882046652 1384146951 9415116094 3305727036 5759591953 0921861173 8193261179 3105118548

0744623799 6274956735 1885752724 8912279381 8301194912 9833673362 4406566430 8602139494 6395224737

1907021798 6094370277 0539217176 2931767523 8467481846 7669405132 0005681271 4526356082 7785771342

7577896091 7363717872 1468440901 2249534301 4654958537 1050792279 6892589235 4201995611 2129021960

8640344181 5981362977 4771309960 5187072113 4999999837 2978049951 0597317328 1609631859 5024459455

3469083026 4252230825 3344685035 2619311881 7101000313 7838752886 5875332083 8142061717 7669147303

5982534904 2875546873 1159562863 8823537875 9375195778 1857780532 1712268066 1300192787 6611195909

2164201989 3809525720 1065485863 2788659361 5338182796 8230301952 0353018529 6899577362 2599413891

2497217752 8347913151 5574857242 4541506959 5082953311 6861727855 8890750983 8175463746 4939319255

0604009277 0167113900 9848824012 8583616035 6370766010 4710181942 9555961989 4676783744 9448255379

7747268471 0404753464 6208046684 2590694912 9331367702 8989152104 7521620569 6602405803 8150193511

2533824300 3558764024 7496473263 9141992726 0426992279 6782354781 6360093417 2164121992 4586315030

2861829745 5570674983 8505494588 5869269956 9092721079 7509302955 3211653449 8720275596 0236480665

4991198818 3479775356 6369807426 5425278625 5181841757 4672890977 7727938000 8164706001 6145249192

1732172147 7235014144 1973568548 1613611573 5255213347 5741849468 4385233239 0739414333 4547762416

Lo potremmo festeggiare in molti modi
visto che questo numero si rivela spesso fondamentale
nella matematica
nella tecnologia
nell'osservazione della natura.

Io ho pensato di festeggiarlo parlando di

INFINITI

Breve (e incompleta) carrellata di "infiniti"

Il **concetto di infinito**, a dispetto della sua connaturata innaturalità e controintuitività, è stato oggetto di studi filosofici fin dagli albori della cultura occidentale ed ha affascinato e coinvolto artisti e letterati di tutte le epoche.

Filosofia classica (Anassimandro, Zenone, Aristotele):
infinito=non finito, incompiuto quindi imperfetto.

Breve (e incompleta) carrellata di "infiniti"

Il **concetto di infinito**, a dispetto della sua connaturata innaturalità e controintuitività, è stato oggetto di studi filosofici fin dagli albori della cultura occidentale ed ha affascinato e coinvolto artisti e letterati di tutte le epoche.

Filosofia classica (Anassimandro, Zenone, Aristotele): infinito=non finito, incompiuto quindi imperfetto.

Filosofia medioevale (Clemente Alessandrino, Guglielmo d'Ockham): infinito=Dio.

Breve (e incompleta) carrellata di "infiniti"

Il **concetto di infinito**, a dispetto della sua connaturata innaturalità e controintuitività, è stato oggetto di studi filosofici fin dagli albori della cultura occidentale ed ha affascinato e coinvolto artisti e letterati di tutte le epoche.

Filosofia classica (Anassimandro, Zenone, Aristotele): infinito=non finito, incompiuto quindi imperfetto.

Filosofia medioevale (Clemente Alessandrino, Guglielmo d'Ockham): infinito=Dio.

Filosofia moderna (Bruno, Spinoza, Fichte, Hegel): infinito= attributo della realtà.

Dalla filosofia alla matematica (Newton, Leibniz, Cantor): approccio analitico all'infinito.

Va sicuramente menzionato **Dante**, che nella Divina Commedia propone l'identità "infinito=Dio".

Infiniti e letteratura

Va sicuramente menzionato **Dante**, che nella Divina Commedia propone l'identità "infinito=Dio".

L'infinito diventa una suggestione ricorrente in letteratura a partire dal Romanticismo (Leopardi, Pascoli, Borges, Joice).

Infiniti e letteratura

Va sicuramente menzionato **Dante**, che nella Divina Commedia propone l'identità "infinito=Dio".

L'infinito diventa una suggestione ricorrente in letteratura a partire dal Romanticismo (Leopardi, Pascoli, Borges, Joice).

Leopardi, Zibaldone: "L'infinito è un parto della nostra immaginazione, della nostra piccolezza ad un tempo e della nostra superbia [...] l'infinito è un'idea, un sogno, non una realtà: almeno niuna prova abbiamo noi dell'esistenza di esso, neppur per analogia"

Infiniti e letteratura

Va sicuramente menzionato **Dante**, che nella Divina Commedia propone l'identità "infinito=Dio".

L'infinito diventa una suggestione ricorrente in letteratura a partire dal Romanticismo (Leopardi, Pascoli, Borges, Joice).

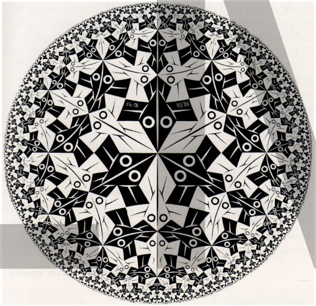
Leopardi, Zibaldone: "L'infinito è un parto della nostra immaginazione, della nostra piccolezza ad un tempo e della nostra superbia [. . .] l'infinito è un'idea, un sogno, non una realtà: almeno niuna prova abbiamo noi dell'esistenza di esso, neppur per analogia"

Borges, Altre inquisizioni: "C'è un concetto che corrompe e altera tutti gli altri. Non parlo del Male, il cui limitato impero è l'Etica; parlo dell'Infinito."

Infiniti e arte

Friedrich

Esher



Dalì Museum, Florida

Infiniti in matematica: ∞ e $\aleph$

In matematica ci sono almeno due concetti distinti di infinito:

- ∞ (**infinito "analitico"**): è legato alla nozione di **limite**, è un concetto ampiamente trattato nel programma dell'ultimo anno e potrebbe essere tradotto in maniera informale con **"oltre ogni numero finito"**

Infiniti in matematica: ∞ e $\aleph$

In matematica ci sono almeno due concetti distinti di infinito:

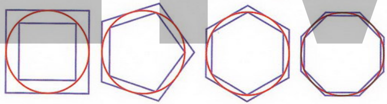
- ∞ (**infinito "analitico"**): è legato alla nozione di **limite**, è un concetto ampiamente trattato nel programma dell'ultimo anno e potrebbe essere tradotto in maniera informale con **"oltre ogni numero finito"**
- $\aleph$ (**infinito "insiemistico"**): è legato alla nozione di **cardinalità**, concetto meno trattato nelle scuole e potrebbe essere tradotto in maniera informale con **"numerosità degli elementi di insiemi"**

Infiniti in matematica: ∞ e $\aleph$

In matematica ci sono almeno due concetti distinti di infinito:

- ∞ (**infinito "analitico"**): è legato alla nozione di **limite**, è un concetto ampiamente trattato nel programma dell'ultimo anno e potrebbe essere tradotto in maniera informale con **"oltre ogni numero finito"**
- $\aleph$ (**infinito "insiemistico"**): è legato alla nozione di **cardinalità**, concetto meno trattato nelle scuole e potrebbe essere tradotto in maniera informale con **"numerosità degli elementi di insiemi"**

Un esempio di infinito del primo tipo è il **metodo di esaustione** di Archimede: possiamo approssimare l'area del cerchio con quella del poligono regolare inscritto con n lati, ma non troveremo mai il valore esatto della sua area.

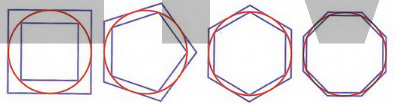


Infiniti in matematica: ∞ e $\aleph$

In matematica ci sono almeno due concetti distinti di infinito:

- ∞ (**infinito "analitico"**): è legato alla nozione di **limite**, è un concetto ampiamente trattato nel programma dell'ultimo anno e potrebbe essere tradotto in maniera informale con **"oltre ogni numero finito"**
- $\aleph$ (**infinito "insiemistico"**): è legato alla nozione di **cardinalità**, concetto meno trattato nelle scuole e potrebbe essere tradotto in maniera informale con **"numerosità degli elementi di insiemi"**

Un esempio di infinito del primo tipo è il **metodo di esaustione** di Archimede: possiamo approssimare l'area del cerchio con quella del poligono regolare inscritto con n lati, ma non troveremo mai il valore esatto della sua area.



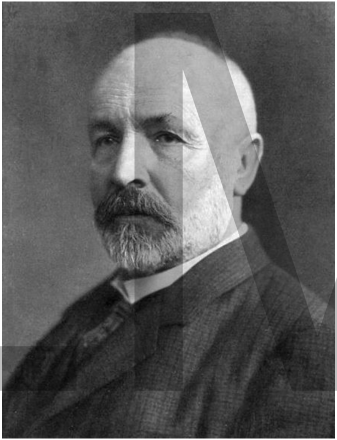
L'unico modo per raggiungere il valore che ci interessa è considerare n **arbitrariamente grande**: $n \to \infty$.

In questa sede non ci occuperemo dell'infinito analitico
(più noto, anzi inflazionato)

e concentreremo la nostra attenzione sull'infinito insiemistico:
vogliamo imparare a **contare gli elementi di insiemi non finiti**.

Lo studio degli insiemi infiniti è iniziato nel decennio 1874-1884 ad opera del matematico tedesco

GEORG CANTOR



Prima di addentrarci nelle questioni concernenti gli insiemi qualsiasi, facciamo una breve rilettura di quello che sappiamo sugli insiemi finiti.

Cardinalità di insiemi finiti

Cosa vuol dire che in una palazzina ci sono 10 appartamenti?

Cardinalità di insiemi finiti

Per **contare** gli appartamenti abbiamo **associato univocamente** a ciascuno di essi un numero (naturale) tra 1 e 10.

In termini matematici, abbiamo determinato una **corrispondenza biunivoca** tra l'insieme degli appartamenti e l'insieme

$$\omega_{10} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

Siano A e B due insiemi qualsiasi e $f : A \to B$ una **funzione**, ossia una legge tale per cui

per ogni $a \in A$ **esiste uno e un solo** $b \in B$ tale che $f(a) = b$.

Definizione 1 (Corrispondenza biunivoca)

f è una corrispondenza biunivoca tra A e B se

per ogni $b \in B$ ***esiste uno e un solo*** $a \in A$ *tale che* $f(a) = b$.

Definizione 2 (Iniezione)

f è un'iniezione di A in B se è una corrispondenza biunivoca tra A e un ***sottoinsieme*** *di B*

Esercizio 1

Dire quali di queste funzioni sono iniezioni e quali sono corrispondenze biunivoche, giustificando la risposta.

(a) $f : \mathbb{N} \to \{numeri\ pari\},\ n \mapsto 2n$

(b) $f : \{esseri\ umani\} \to \{donne\},\ figlio \mapsto mamma$

(c) $f : quadrati \to \mathbb{R},\ quadrato \mapsto area\ del\ quadrato$

(d) $f : \{quadrati\ centrati\ in\ O\} \to \mathbb{R}^+,\ quadrato \mapsto area\ del\ quadrato$

(e) $f : \{quadrati\ centrati\ in\ O\} \to \mathbb{R},\ quadrato \mapsto area\ del\ quadrato$

Esercizio 1

Dire quali di queste funzioni sono iniezioni e quali sono corrispondenze biunivoche, giustificando la risposta.

(a) $f : \mathbb{N} \to \{\text{numeri pari}\}$, $n \mapsto 2n$

(b) $f : \{\text{esseri umani}\} \to \{\text{donne}\}$, $\text{figlio} \mapsto \text{mamma}$

(c) $f : \text{quadrati} \to \mathbb{R}$, $\text{quadrato} \mapsto \text{area del quadrato}$

(d) $f : \{\text{quadrati centrati in } O\} \to \mathbb{R}^+$, $\text{quadrato} \mapsto \text{area del quadrato}$

(e) $f : \{\text{quadrati centrati in } O\} \to \mathbb{R}$, $\text{quadrato} \mapsto \text{area del quadrato}$

Soluzione dell'Esercizio 1

(a) *corrispondenza biunivoca*

(b) *niente*

(c) *niente*

(d) *corrispondenza biunivoca*

(e) *iniezione*

Cardinalità degli insiemi finiti

In conclusione, per contare gli elementi di un insieme finito ci servono

- l'insieme dei **numeri naturali** $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \ldots\}$;
- i sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ della forma $\omega_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$;
- la nozione di **corrispondenza biunivoca**.

Definizione 3 (Cardinalità degli insiemi finiti)

Sia A un insieme e n un numero naturale.

*Diremo che A ha n elementi (o anche che ha **cardinalità** uguale ad n) se esiste una corrispondenza biunivoca tra A e l'insieme $\{1, 2, 3, 4, \ldots, n\}$. In questo caso scriveremo $|A| = n$;*

*Diremo che A è un insieme **finito** se esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $|A| = n$;*

*Diremo che A è un insieme **infinito** se non è finito.*

Proprietà della cardinalità di insiemi finiti

La **cardinalità degli insiemi finiti** gode di proprietà che ci sono ben note:

(1) due insiemi finiti hanno la stessa cardinalità se e solo se sono in corrispondenza biunivoca tra loro.

Proprietà della cardinalità di insiemi finiti

La **cardinalità degli insiemi finiti** gode di proprietà che ci sono ben note:

(1) due insiemi finiti hanno la stessa cardinalità se e solo se sono in corrispondenza biunivoca tra loro.

(2) un sottoinsieme $A \subseteq B$ di un insieme finito è un insieme finito.

Proprietà della cardinalità di insiemi finiti

La **cardinalità degli insiemi finiti** gode di proprietà che ci sono ben note:

(1) due insiemi finiti hanno la stessa cardinalità se e solo se sono in corrispondenza biunivoca tra loro.

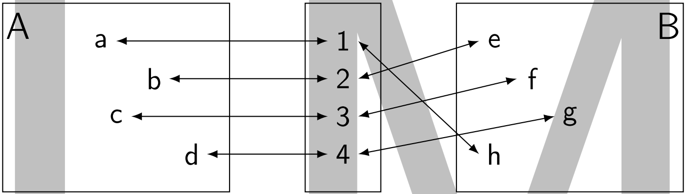
(2) un sottoinsieme $A \subseteq B$ di un insieme finito è un insieme finito.

(3) se A è un sottoinsieme proprio di un insieme finito B, allora $|A| < |B|$.

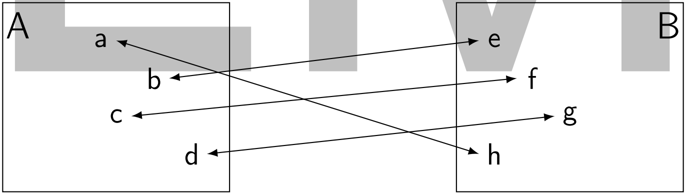
Riflettiamo un po' su queste proprietà...

Due insiemi finiti hanno la stessa cardinalità se e solo se sono in corrispondenza biunivoca tra loro.

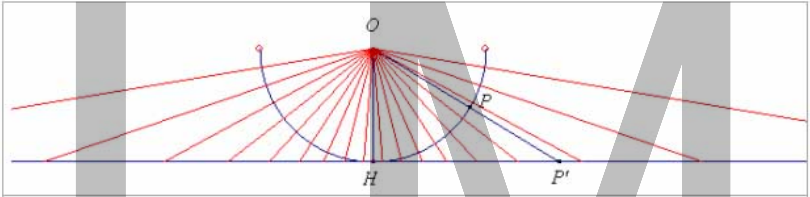
Ci sta semplicemende dicendo che le corrispondenzee biunivoche



equivalgono a

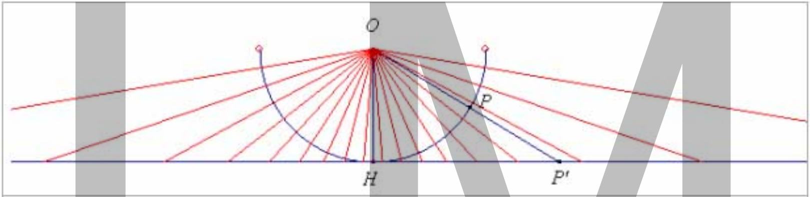


La nozione di corrispondenza biunivoca vale anche tra insiemi infiniti (ad esempio, i punti di una semicirconferenza sono in corrispondenza biunivoca con i punti di una retta).



Corrispondenza biunivoca tra semicirconferenza e retta

La nozione di corrispondenza biunivoca vale anche tra insiemi infiniti (ad esempio, i punti di una semicirconferenza sono in corrispondenza biunivoca con i punti di una retta).



Corrispondenza biunivoca tra semicirconferenza e retta

Questo ci permette di estendere il concetto di "equinumerosità":

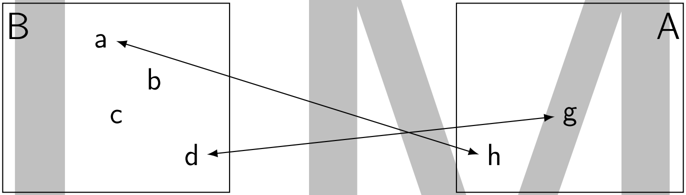
Diremo che due insiemi A e B (qualsiasi) hanno la **stessa cardinalità** (o sono equinumerosi) se esiste una corrispondenza biunivoca tra loro.
In questo caso scriveremo $|A| = |B|$.

Ovviamente, se gli insiemi sono infiniti **la cardinalità NON è un numero**.

Sempre "imparando" dagli insiemi finiti e utilizzando le funzioni, possiamo introdurre una nozione di "maggiore numerosità".

se A è un sottoinsieme proprio di un insieme finito B, allora $|A| < |B|$.

Inoltre, $|A| < |B|$ se e solo se esiste un'iniezione di A in B



Diremo che la cardinalità di un insieme A è minore o uguale di quella di un insieme B se esiste una iniezione di A in B. In questo caso scriveremo $|A| \leq |B|$.

Nota: nel caso di insiemi finiti "$<$" è l'usuale simbolo per l'ordinamento tra numeri. Nel caso di insiemi infiniti denota una nozione astratta nuova, introdotta per analogia.

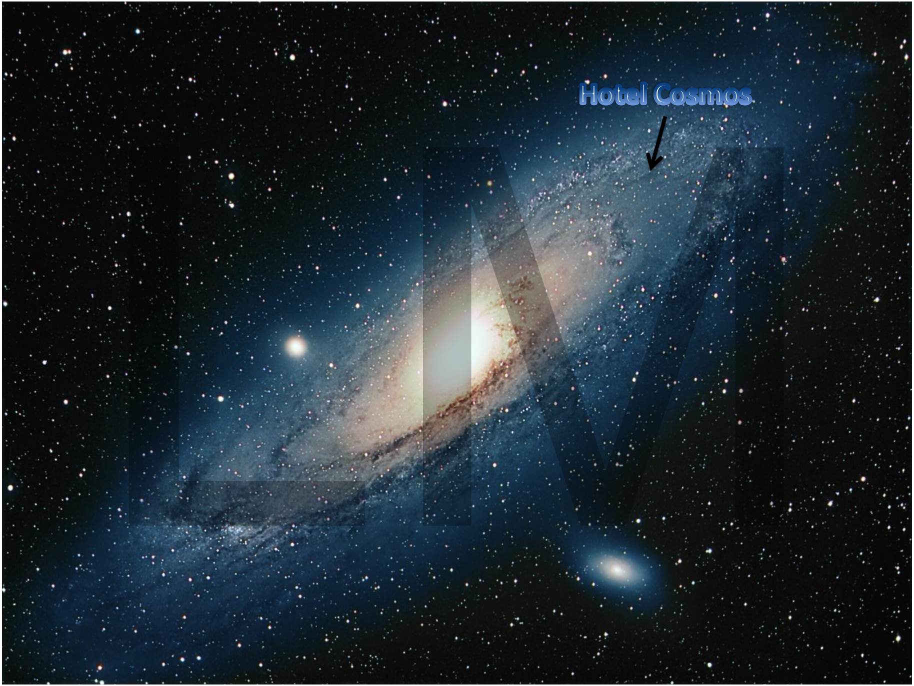
Abbiamo ora a disposizione gli strumenti per confrontare la cardinalità di insiemi qualsiasi.

Prima di procedere oltre, entriamo nello spirito giusto per studiare gli insiemi infiniti con una storia stravagante:

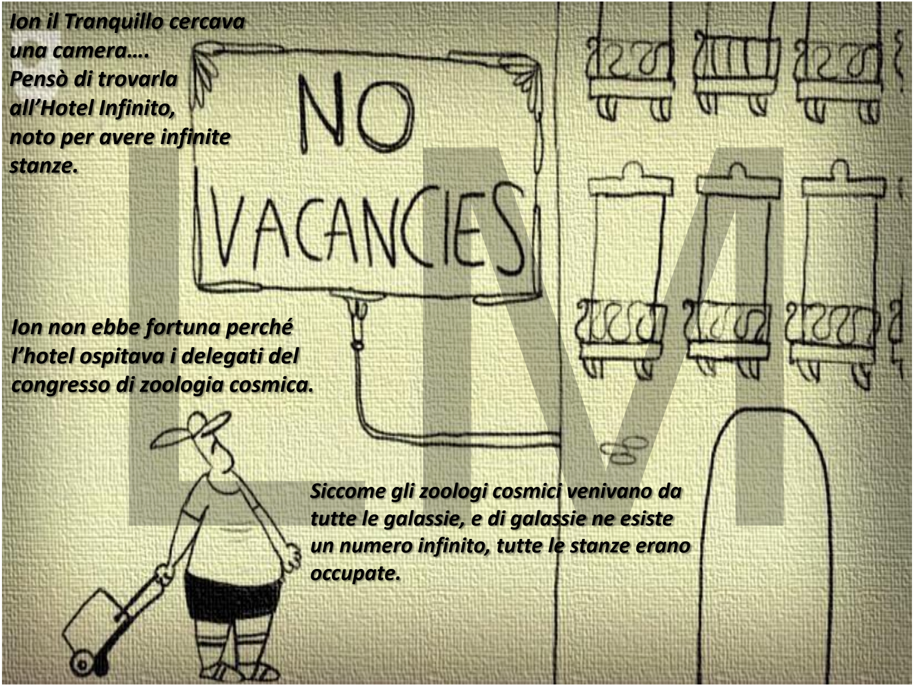
l'albergo di Hilbert

(immagini tratte da "A. Catalioto, Seminario TFA 2015")

L'insieme infinito protagonista di questa storia è l'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$.


Hotel Cosmos

*Ion il Tranquillo cercava una camera….
Pensò di trovarla all’Hotel Infinito, noto per avere infinite stanze.*



Ion non ebbe fortuna perché l’hotel ospitava i delegati del congresso di zoologia cosmica.

Siccome gli zoologi cosmici venivano da tutte le galassie, e di galassie ne esiste un numero infinito, tutte le stanze erano occupate.

…Soluzione del problema…

$$n \mapsto n+1$$

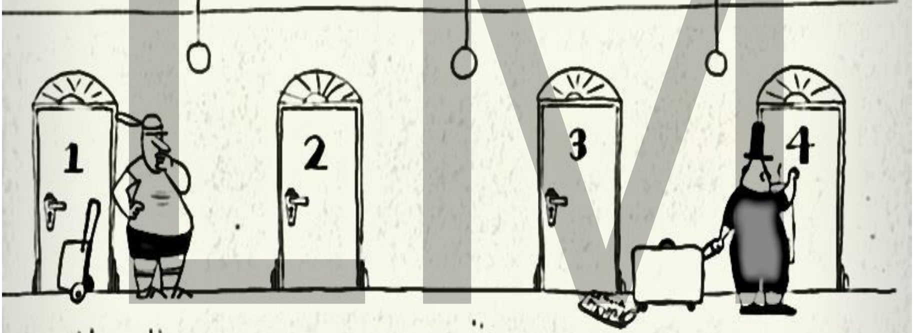
Il direttore decide di spostare lo zoologo della stanza 1 nella 2, quello della 2 nella 3 e così via… così può mettere Ion nella stanza 1! In generale, viene spostato lo zoologo della stanza «n» nella stanza «n+1»

Il problema si complicò perché arrivò un rappresentante dei filatelici per ogni galassia per partecipare al congresso interstellare dei filatelici

Il direttore, come soluzione al problema, decise di spostare l'ospite della 1 nella 2, quello della 2 nella 4, quello della 3 nella 6 e così via…

$$n \mapsto 2n$$

In generale mettere l'ospite della stanza «n» nella stanza «2n»

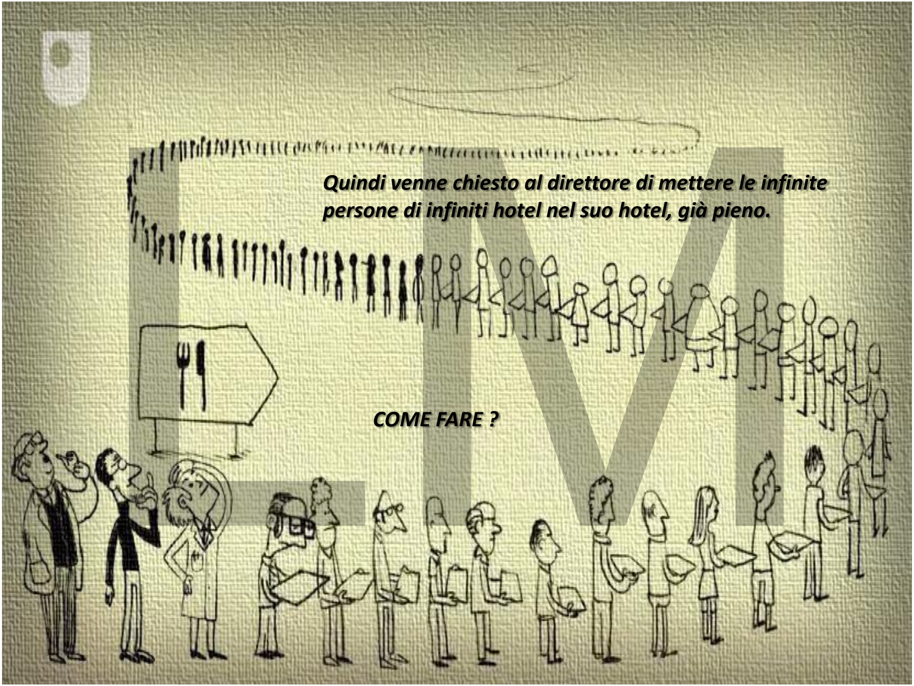


Così, gli zoologi occuparono l'insieme delle stanze dei numeri pari e i filatelici occuparono l'insieme delle stanze dei numeri dispari, visto che il filatelico n-esimo nella coda ottenne il numero di stanza «2n-1»

I costruttori dell'Hotel Cosmos avevano smantellato tantissime galassie per costruire infiniti hotel con infinite stanze.

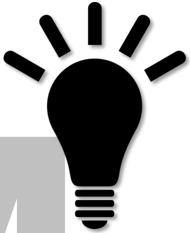
Furono costretti, però, a rimettere tutto in ordine e a chiudere tutti gli hotel, eccetto l'Hotel Cosmos

Quindi venne chiesto al direttore di mettere le infinite persone di infiniti hotel nel suo hotel, già pieno.



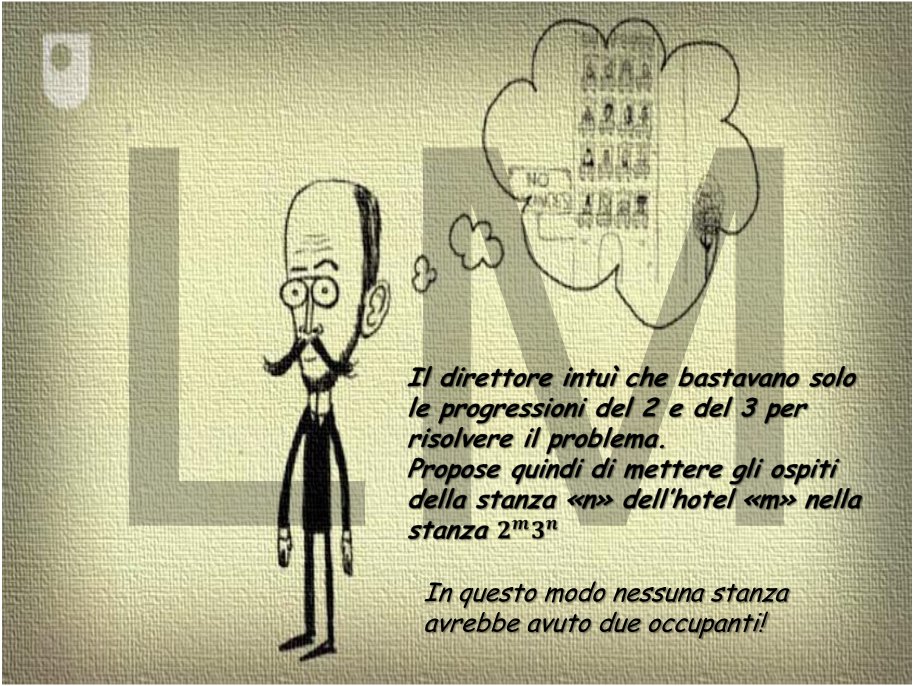
COME FARE ?

L'IDEA



*Ion propose di usare solo le progressioni dei **numeri primi** poiché se si prendono due numeri primi, nessuna delle potenze intere positive di uno può equivalere a quelle dell'altro.*

*Se **p** e **q** sono numeri primi, con **p≠q**, e **m** e **n** sono numeri naturali, allora* $p^m \neq q^n$.



Il direttore intuì che bastavano solo le progressioni del 2 e del 3 per risolvere il problema.
Propose quindi di mettere gli ospiti della stanza «n» dell'hotel «m» nella stanza $2^m 3^n$

In questo modo nessuna stanza avrebbe avuto due occupanti!

Vediamo cosa ci ha insegnato questa storia.

Esercizio 2

Mostrare che $\mathbb{N}$ *ha la stessa cardinalità dei suoi seguenti sottoinsiemi propri*

(1) $A = \{n \in \mathbb{N},\ n \geq 7\}$

(2) $A = \{2n + 1,\ n\ in\ \mathbb{N}\}$

Vediamo cosa ci ha insegnato questa storia.

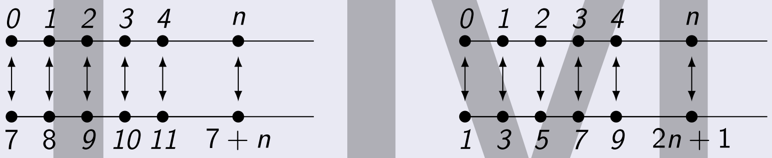
Esercizio 2

Mostrare che $\mathbb{N}$ ha la stessa cardinalità dei suoi seguenti sottoinsiemi propri

(1) $A = \{n \in \mathbb{N},\ n \geq 7\}$

(2) $A = \{2n + 1,\ n \ in\ \mathbb{N}\}$

Soluzione dell'Esercizio 2



L'ultimo caso descritto nella storia(quello degli infiniti convegni con infiniti partecipanti, che sostanzialmente ci racconta che l'insieme prodotto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ha la stessa cardinalità di $\mathbb{N}$) è più complicato e ci torneremo più tardi.

I risultati dell'Esercizio 2 sono una vera e propria rivoluzione del pensiero.

Povero Euclide!

Abbiamo imparato che se togliamo all'insieme $\mathbb{N}$ i primi n_0 termini (pensate n_0 grande quanto volete!), quello che resta ha esattamente la stessa cardinalità di tutto l'insieme.

Crolla così il principio fissato da **Euclide**:

"il tutto è maggiore di una sua qualsiasi parte" (Elementi,300 a.C.)

Ricordiamo che Euclide è probabilmente il più grande matematico dell'antichità e i suoi Elementi (opera in 13 libri) sono stati la principale opera di riferimento per la geometria fino al XIX secolo.

Quello citato è uno degli 8 enunciati di "nozioni comuni" contenuti nel Libro I, quello in cui vengono fissati tutti i fondamenti per la trattazione di tutta la geometria nota all'epoca.

Povero Galileo!

D'altra parte, di questo problema si era accorto anche **Galileo**, senza trovarne soluzione:

"queste son di quelle difficoltà che derivano dal discorrere che noi facciamo col nostro intelletto finito intorno agli infiniti, dandogli quegli attributi che noi diamo alle cose finite e terminate; il che penso che sia inconveniente, perché stimo che questi attributi di maggioranza, minorità ed ugualità non convenghino agli infiniti, dei quali non si può dire uno essere maggiore o minore o uguale all'altro" (Nuove Scienze, 1638)

Parafrasando Galileo, possiamo dire che la teoria della cardinalità di Cantor è esattamente
il giusto attributo di maggioranza, minorità ed ugualità che convenga agli infiniti

Riepilogo e domande

Finora sono stati solo definiti solo dei **metodi di confronto** tra cardinalità infinite.

Diremo che due insiemi A e B (qualsiasi) hanno la stessa cardinalità (o sono equinumerosi) se esiste una corrispondenza biunivoca tra loro.
In questo caso scriveremo $|A| = |B|$.

Diremo che la cardinalità di un insieme A è minore o uguale di quella di un insieme B se esiste una iniezione di A in B. In questo caso scriveremo $|A| \leq |B|$.

Riepilogo e domande

Finora sono stati solo definiti solo dei **metodi di confronto** tra cardinalità infinite.

Diremo che due insiemi A e B (qualsiasi) hanno la stessa cardinalità (o sono equinumerosi) se esiste una corrispondenza biunivoca tra loro.
In questo caso scriveremo $|A| = |B|$.

Diremo che la cardinalità di un insieme A è minore o uguale di quella di un insieme B se esiste una iniezione di A in B. In questo caso scriveremo $|A| \leq |B|$.

Ora è arrivato il momento di porsi qualche domanda:

- ci sono insiemi infiniti con cardinalità diverse?

Riepilogo e domande

Finora sono stati solo definiti solo dei **metodi di confronto** tra cardinalità infinite.

Diremo che due insiemi A e B (qualsiasi) hanno la stessa cardinalità (o sono equinumerosi) se esiste una corrispondenza biunivoca tra loro.
In questo caso scriveremo $|A| = |B|$.

Diremo che la cardinalità di un insieme A è minore o uguale di quella di un insieme B se esiste una iniezione di A in B. In questo caso scriveremo $|A| \leq |B|$.

Ora è arrivato il momento di porsi qualche domanda:

- ci sono insiemi infiniti con cardinalità diverse?
- c'è una "cardinalità infinita" più piccola di tutte le altre?

Riepilogo e domande

Finora sono stati solo definiti solo dei **metodi di confronto** tra cardinalità infinite.

Diremo che due insiemi A e B (qualsiasi) hanno la stessa cardinalità (o sono equinumerosi) se esiste una corrispondenza biunivoca tra loro.
In questo caso scriveremo $|A| = |B|$.

Diremo che la cardinalità di un insieme A è minore o uguale di quella di un insieme B se esiste una iniezione di A in B. In questo caso scriveremo $|A| \leq |B|$.

Ora è arrivato il momento di porsi qualche domanda:

- ci sono insiemi infiniti con cardinalità diverse?
- c'è una "cardinalità infinita" più piccola di tutte le altre?
- c'è una "cardinalità infinita" più grande di tutte le altre?

Riepilogo e domande

Finora sono stati solo definiti solo dei **metodi di confronto** tra cardinalità infinite.

Diremo che due insiemi A e B (qualsiasi) hanno la stessa cardinalità (o sono equinumerosi) se esiste una corrispondenza biunivoca tra loro.
In questo caso scriveremo $|A| = |B|$.

Diremo che la cardinalità di un insieme A è minore o uguale di quella di un insieme B se esiste una iniezione di A in B. In questo caso scriveremo $|A| \leq |B|$.

Ora è arrivato il momento di porsi qualche domanda:

- ci sono insiemi infiniti con cardinalità diverse?
- c'è una "cardinalità infinita" più piccola di tutte le altre?
- c'è una "cardinalità infinita" più grande di tutte le altre?

Ripartiamo dal caso dell'albergo di Hilbert che non abbiamo ancora discusso. La storia ci racconta che la funzione

$$(m, n) \mapsto 2^m 3^n$$

mette in corrispondenza biunivoca il prodotto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ con un sottoinsieme proprio di $\mathbb{N}$ e sembra complicato esibire una corrispondenza biunivoca tra questo e $\mathbb{N}$.
Facciamoci aiutare dalla teoria...

Ripartiamo dal caso dell'albergo di Hilbert che non abbiamo ancora discusso. La storia ci racconta che la funzione

$$(m, n) \mapsto 2^m 3^n$$

mette in corrispondenza biunivoca il prodotto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ con un sottoinsieme proprio di $\mathbb{N}$ e sembra complicato esibire una corrispondenza biunivoca tra questo e $\mathbb{N}$.
Facciamoci aiutare dalla teoria...

Esercizio 3

Se $A \subseteq B$, allora $|A| \leq |B|$.

Ripartiamo dal caso dell'albergo di Hilbert che non abbiamo ancora discusso. La storia ci racconta che la funzione

$$(m, n) \mapsto 2^m 3^n$$

mette in corrispondenza biunivoca il prodotto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ con un sottoinsieme proprio di $\mathbb{N}$ e sembra complicato esibire una corrispondenza biunivoca tra questo e $\mathbb{N}$.
Facciamoci aiutare dalla teoria...

Esercizio 3

Se $A \subseteq B$, allora $|A| \leq |B|$.

Soluzione dell'Esercizio 3

La funzione

$$f : A \to B, \qquad a \mapsto a$$

è un'iniezione di A in B.

Teorema

Sia A un insieme infinito. Allora $|\mathbb{N}| \leq |A|$.

Teorema

Sia A un insieme infinito. Allora $|\mathbb{N}| \leq |A|$.

Dim: Dobbiamo costruire un'iniezione di $\mathbb{N}$ in A, ossia associare ad ogni $n \in \mathbb{N}$ un unico elemento a_n di A. Lo faremo in **maniera ricorsiva**.

Teorema

Sia A un insieme infinito. Allora $|\mathbb{N}| \leq |A|$.

Dim: Dobbiamo costruire un'iniezione di $\mathbb{N}$ in A, ossia associare ad ogni $n \in \mathbb{N}$ un unico elemento a_n di A. Lo faremo in **maniera ricorsiva**.

Passo base: associamo a $n = 0$ un qualsiasi elemento $a_0 \in A$.
Siccome A è un insieme infinito, $A \neq \{a_0\}$, quindi siamo in grado di associare a $n = 1$ un elemento $a_1 \in A$, $a_1 \neq a_0$.

Teorema

Sia A un insieme infinito. Allora $|\mathbb{N}| \leq |A|$.

Dim: Dobbiamo costruire un'iniezione di $\mathbb{N}$ in A, ossia associare ad ogni $n \in \mathbb{N}$ un unico elemento a_n di A. Lo faremo in **maniera ricorsiva**.

Passo base: associamo a $n = 0$ un qualsiasi elemento $a_0 \in A$.
Siccome A è un insieme infinito, $A \neq \{a_0\}$, quindi siamo in grado di associare a $n = 1$ un elemento $a_1 \in A$, $a_1 \neq a_0$.

Meccanismo ricorsivo: supponiamo di aver associato ai numeri $0, 1, \ldots, n$ gli elementi distinti $a_0, a_1, \ldots, a_n$ di A. Siccome A è un insieme infinito, $A \neq \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$, quindi siamo in grado di associare al numero $n + 1$ un elemento $a_{n+1} \in A$ distinto da tutti i precedenti.

Conseguenza immediata del Teorema e dell'Esercizio 3:

Ogni sottoinsieme infinito di $\mathbb{N}$ ha la stessa cardinalità di $\mathbb{N}$.

Teorema

Sia A un insieme infinito. Allora $|\mathbb{N}| \leq |A|$.

Dim: Dobbiamo costruire un'iniezione di $\mathbb{N}$ in A, ossia associare ad ogni $n \in \mathbb{N}$ un unico elemento a_n di A. Lo faremo in **maniera ricorsiva**.

Passo base: associamo a $n = 0$ un qualsiasi elemento $a_0 \in A$.
Siccome A è un insieme infinito, $A \neq \{a_0\}$, quindi siamo in grado di associare a $n = 1$ un elemento $a_1 \in A$, $a_1 \neq a_0$.

Meccanismo ricorsivo: supponiamo di aver associato ai numeri $0, 1, \ldots, n$ gli elementi distinti $a_0, a_1, \ldots, a_n$ di A. Siccome A è un insieme infinito, $A \neq \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$, quindi siamo in grado di associare al numero $n+1$ un elemento $a_{n+1} \in A$ distinto da tutti i precedenti.

Conseguenza immediata del Teorema e dell'Esercizio 3:

Ogni sottoinsieme infinito di $\mathbb{N}$ ha la stessa cardinalità di $\mathbb{N}$.

In particolare, $\{p \in \mathbb{N}$ della forma $p = 2^m 3^n,\ n, m \in \mathbb{N}\}$, ha la stessa cardinalità di $\mathbb{N}$. Quindi $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ha la stessa cardinalità di $\mathbb{N}$.

Cardinalità numerabile

Quindi la cardinalità dell'insieme numerico $\mathbb{N}$ è

"la più piccola cardinalità infinita".

Per questo si è meritata un "nome proprio" e un simbolo speciale

$\aleph_0 = |\mathbb{N}|$ prende il nome di CARDINALITA' NUMERABILE.

Il simbolo "$\aleph$" è l'**aleph**, prima lettera dell'alfabeto ebraico.

Diremo che **un insieme** A **è numerabile** se $|A| = \aleph_0$, cioè se A può essere messo in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{N}$.

Esistono insiemi infiniti con cardinalità diversa (maggiore) da quella numerabile?

Per rispondere a questa domanda usiamo gli insiemi numerici come prototipo.

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \dots\}$ numeri NATURALI

$\mathbb{Z} = \{\dots, , -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ numeri INTERI

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q}, \ p \text{ intero}, \ q \neq 0 \text{ naturale} \right\}$ numeri RAZIONALI

$\mathbb{R}$ numeri REALI

Valgono le inclusioni strette:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Ricordiamo brevemente cosa sono per poi confrontare le loro cardinalità.

I numeri interi $\mathbb{Z} = \{\ldots,,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$

I numeri interi sono un'estensione dei numeri naturali, nata dall'esigenza di poter fare liberamente la sottrazione. Si ottengono considerando tutti i numeri naturali e tutti i loro **opposti**.
Possiamo rappresentare l'insieme dei numeri interi tramite punti di una retta ordinata. Basta

- fissare un punto che determina lo zero
- fissare un'unità di misura
- disegnare tutti punti equidistanti dal successivo.

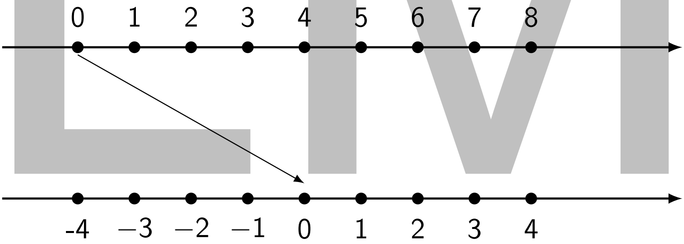
In un certo senso, i numeri interi sono "il doppio" dei numeri naturali, quindi è ragionevole pensare che siano un insieme numerabile.

Corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$

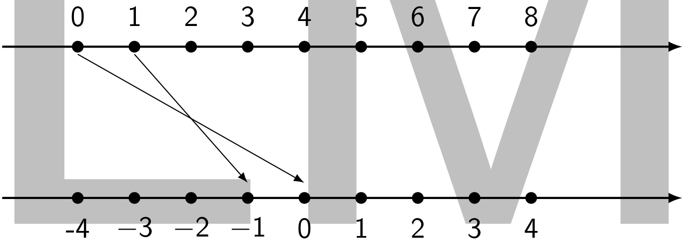
$$a_n = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{se } n = 0 \text{ oppure se } n \text{ è pari} \\ -\dfrac{n+1}{2} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

Corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$

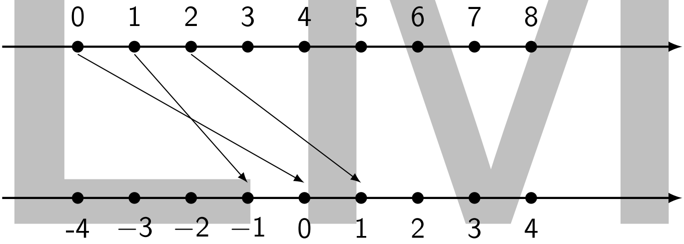
$$a_n = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{se } n = 0 \text{ oppure se } n \text{ è pari} \\ -\dfrac{n+1}{2} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$



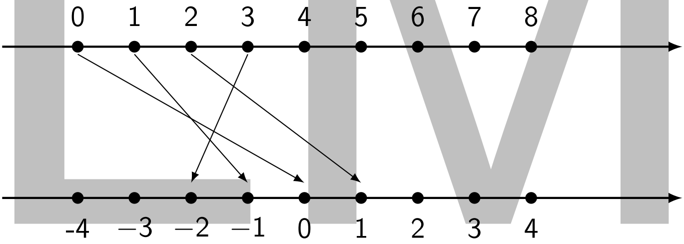
$$a_n = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{se } n = 0 \text{ oppure se } n \text{ è pari} \\ -\dfrac{n+1}{2} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$



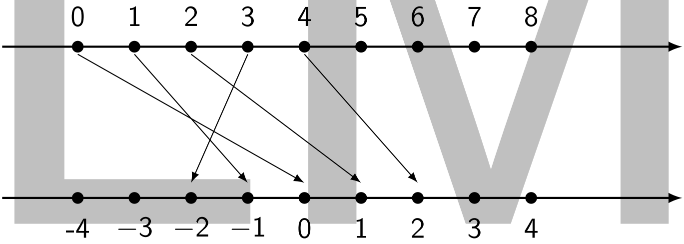
$$a_n = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{se } n = 0 \text{ oppure se } n \text{ è pari} \\ -\dfrac{n+1}{2} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$



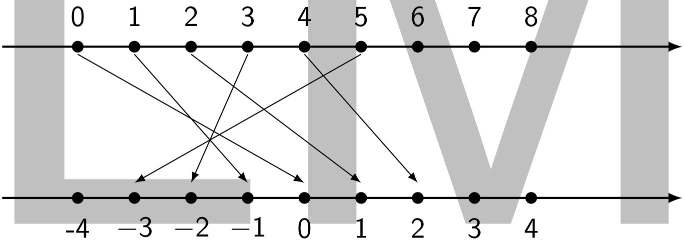
$$a_n = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{se } n = 0 \text{ oppure se } n \text{ è pari} \\ -\dfrac{n+1}{2} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$



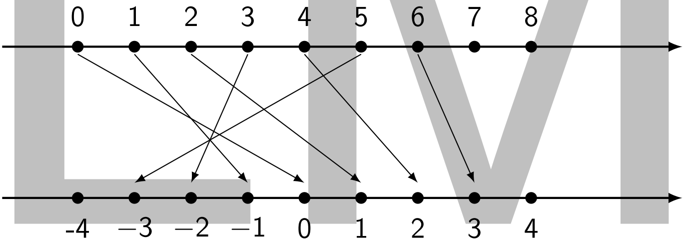
$$a_n = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{se } n = 0 \text{ oppure se } n \text{ è pari} \\[2ex] -\dfrac{n+1}{2} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$



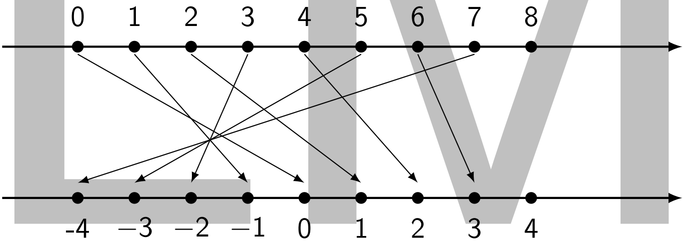
$$a_n = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{se } n = 0 \text{ oppure se } n \text{ è pari} \\ -\dfrac{n+1}{2} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$



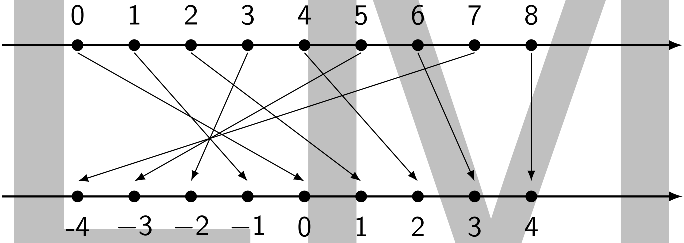
$$a_n = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{se } n = 0 \text{ oppure se } n \text{ è pari} \\[2ex] -\dfrac{n+1}{2} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$



$$a_n = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{se } n = 0 \text{ oppure se } n \text{ è pari} \\ -\dfrac{n+1}{2} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$



$$a_n = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{se } n = 0 \text{ oppure se } n \text{ è pari} \\ -\dfrac{n+1}{2} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$



Abbiamo così ottenuto che

$\mathbb{Z}$ è numerabile.

I numeri razionali $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q}, \; p \text{ intero}, \; q \neq 0 \text{ naturale} \right\}$

I numeri razionali sono un'estensione dei numeri interi, nata dall'esigenza di poter fare liberamente la **divisione**. Si ottengono considerando tutte le possibili frazioni con

- a numeratore un numero intero (che quindi determina il segno della frazione);
- a denominatore un naturale non nullo.

Cerchiamo di farci un'idea di "quanti siano" i numeri razionali.

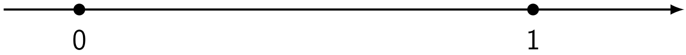
I numeri razionali $\quad \mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q},\ p \text{ intero},\ q \neq 0 \text{ naturale} \right\}$

I numeri razionali sono un'estensione dei numeri interi, nata dall'esigenza di poter fare liberamente la **divisione**. Si ottengono considerando tutte le possibili frazioni con

- a numeratore un numero intero (che quindi determina il segno della frazione);
- a denominatore un naturale non nullo.

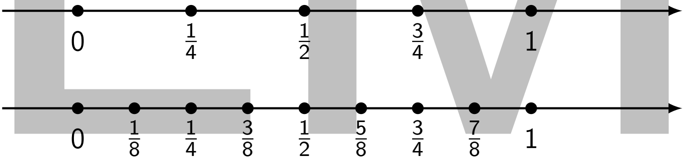
Cerchiamo di farci un'idea di "quanti siano" i numeri razionali.

Tra un numero intero e il suo successivo non c'è nessun altro numero intero (i numeri interi sono **discreti**).



Invece tra due numeri razionali distinti c'è sicuramente un altro numero razionale (ad esempio la loro media).

In realtà ce ne sono infiniti (tutte le possibili medie delle medie).



Si intuisce che i numeri razionali coprono abbastanza bene la retta.

Da quanto abbiamo detto sembrerebbe che i numeri razionali siano molti di più dei numeri interi (sono densi sulla retta reale), ma anche in questo caso gli insiemi infiniti tornano a stupirci:

Da quanto abbiamo detto sembrerebbe che i numeri razionali siano molti di più dei numeri interi (sono densi sulla retta reale), ma anche in questo caso gli insiemi infiniti tornano a stupirci:

$\mathbb{Q}$ ha cardinalità numerabile.

Per dimostrarlo, basta esibire una corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$, che possiamo pensare come un modo di "etichettare" con numeri interi gli elementi di $\mathbb{Q}$.

Per fare questo utilizzeremo il cosiddetto (primo)

metodo diagonale di Cantor.

Esercizio: trovare un percorso che passa una sola volta per ogni stellina e numerare le stelline man mano che si incontrano (nota: verso il basso e verso destra ci sono infinite stelline!)

$$
\begin{array}{cccccccc}
\star & \star & \star & \star & \star & \star & \star & \cdots \\
\star & \star & \star & \star & \star & \star & \star & \cdots \\
\star & \star & \star & \star & \star & \star & \star & \cdots \\
\star & \star & \star & \star & \star & \star & \star & \cdots \\
\star & \star & \star & \star & \star & \star & \star & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}
$$

Soluzione

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
1 & \to & 2 & & 6 & \to & 7 & & 15 & \to & 16 & & \star & & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & & & \\
3 & & 5 & & 8 & & 14 & & 17 & & \star & & \star & & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & & & & & \\
4 & & 9 & & 13 & & 18 & & \star & & \star & & \star & & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & & & & & & & \\
10 & & 12 & & 19 & & \star & & \star & & \star & & \star & & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & & & & & & & & & & \\
11 & & 20 & & \star & & \star & & \star & & \star & & \star & & \cdots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}
$$

Primo metodo diagonale di Cantor: costruire la tabella...

$$
\begin{array}{cccccccc}
\frac{1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{3}{1} & \frac{4}{1} & \frac{5}{1} & \frac{6}{1} & \frac{7}{1} & \cdots \\[1em]
\frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \frac{4}{2} & \frac{5}{2} & \frac{6}{2} & \frac{7}{2} & \cdots \\[1em]
\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & \frac{6}{3} & \frac{7}{3} & \cdots \\[1em]
\frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{3}{4} & \frac{4}{4} & \frac{5}{4} & \frac{6}{4} & \frac{7}{4} & \cdots \\[1em]
\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & \frac{5}{5} & \frac{6}{5} & \frac{7}{5} & \cdots \\[1em]
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}
$$

... e percorrerla con il metodo che abbiamo determinato

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
\frac{1}{1} & \rightarrow & \frac{2}{1} & & \frac{3}{1} & \rightarrow & \frac{4}{1} & & \frac{5}{1} & & \frac{6}{1} & & \frac{7}{1} & & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & & & & & & & \\
\frac{1}{2} & & \frac{2}{2} & & \frac{3}{2} & & \frac{4}{2} & & \frac{5}{2} & & \frac{6}{2} & & \frac{7}{2} & & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & & & & & & & & & & \\
\frac{1}{3} & & \frac{2}{3} & & \frac{3}{3} & & \frac{4}{3} & & \frac{5}{3} & & \frac{6}{3} & & \frac{7}{3} & & \cdots \\
 & \swarrow & & & & & & & & & & & & & \\
\frac{1}{4} & & \frac{2}{4} & & \frac{3}{4} & & \frac{4}{4} & & \frac{5}{4} & & \frac{6}{4} & & \frac{7}{4} & & \cdots \\
\frac{1}{5} & & \frac{2}{5} & & \frac{3}{5} & & \frac{4}{5} & & \frac{5}{5} & & \frac{6}{5} & & \frac{7}{5} & & \cdots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}
$$

Abbiamo così mostrato come mettere in corrispondenza biunivoca tutti i numeri razionali positivi con i numeri naturali.

In definitiva, abbiamo dimostrato che i numeri razionali positivi hanno cardinalità numerabile.

Con lo stesso metodo si dimostra che tutti i numeri razionali negativi hanno cardinalità numerabile.

Abbiamo così mostrato come mettere in corrispondenza biunivoca tutti i numeri razionali positivi con i numeri naturali.

In definitiva, abbiamo dimostrato che i numeri razionali positivi hanno cardinalità numerabile.

Con lo stesso metodo si dimostra che tutti i numeri razionali negativi hanno cardinalità numerabile.

Resta da dimostrare che

se A e B sono due insiemi numerabili, allora $A \cup B$ è numerabile

Abbiamo così mostrato come mettere in corrispondenza biunivoca tutti i numeri razionali positivi con i numeri naturali.

In definitiva, abbiamo dimostrato che i numeri razionali positivi hanno cardinalità numerabile.

Con lo stesso metodo si dimostra che tutti i numeri razionali negativi hanno cardinalità numerabile.

Resta da dimostrare che

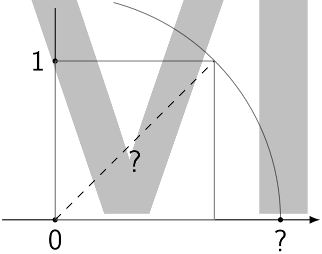
se A e B sono due insiemi numerabili, allora $A \cup B$ è numerabile

Dimostrazione. visto che A e B sono due insiemi numerabili, allora esiste una corrispondenza biunivoca tra A e l'insieme dei numeri pari e una corrispondenza biunivoca tra B e l'insieme dei numeri dispari.
Questo produce una corrispondenza biunivoca tra $A \cup B$ e $\mathbb{N}$.

$$\begin{array}{lcl} A & \longleftrightarrow & \{\text{pari}\} \\ B & \longleftrightarrow & \{\text{dispari}\} \end{array} \qquad \Longrightarrow \qquad A \cup B \longleftrightarrow \mathbb{N}.$$

Voglia di misurare...

Abbiamo visto che i numeri razionali coprono abbastanza bene la retta.
I Pitagorici pensavano che tutte le lunghezze fossero razionali (ossia che i punti corrispondenti ai razionali coprissero tutta la retta) e invece scoprirono presto che manca qualcosa...



LA DIAGONALE DEL QUADRATO DI LATO UNITARIO NON HA LUNGHEZZA RAZIONALE!

Quali numeri mancano?

Per capire come estendere i numeri razionali in modo da ottenere tutte le possibili lunghezze, ricordiamo che ogni numero razionale si può scrivere come **allineamento decimale finito** o **periodico** (con periodo diverso da 9).

Facciamo l'estensione di $\mathbb{Q}$ più ragionevole che ci viene in mente

$$\mathbb{R} = \{\text{allineamenti decimali con un numero arbitrario di cifre}\}$$

ed è quella giusta, nel senso che **i numeri reali sono in corrispondenza biunivoca con i punti della retta** (difficile da dimostrare).

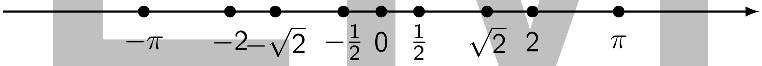
Quali numeri mancano?

Per capire come estendere i numeri razionali in modo da ottenere tutte le possibili lunghezze, ricordiamo che ogni numero razionale si può scrivere come **allineamento decimale finito** o **periodico** (con periodo diverso da 9).

Facciamo l'estensione di $\mathbb{Q}$ più ragionevole che ci viene in mente

$$\mathbb{R} = \{\text{allineamenti decimali con un numero arbitrario di cifre}\}$$

ed è quella giusta, nel senso che **i numeri reali sono in corrispondenza biunivoca con i punti della retta** (difficile da dimostrare).



Quindi, geometricamente, possiamo pensare di aver "tappato i buchi" sulla retta lasciati dai punti corrispondenti ai numeri razionali (abbiamo aggiunto tutti i numeri **irrazionali**).

Non sembra che siano stati aggiunti tanti elementi... invece...

l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$

NON

ha cardinalità numerabile!

$\mathbb{R}$ **NON** ha cardinalità numerabile!!

Dimostreremo questa sorprendente proprietà in tre passi:

- l'intervallo $(0, 1)$ non è numerabile;
- due intervalli distinti (a, b) e (c, d) hanno la stessa cardinalità;
- ogni intervallo (a, b) ha la stessa cardinalità di $\mathbb{R}$

(Ricordiamoci che $\mathbb{R}$ è in corrispondenza biunivoca con i punti della retta, quindi i due insiemi hanno la stessa cardinalità)

Secondo metodo diagonale di Cantor

Dimostriamo, **per assurdo**, che l'intervallo $(0,1)$ non ha cardinalità numerabile.
Ipotesi per assurdo: supponiamo che $(0,1)$ abbia una quantità numerabile di elementi ed enumeriamoli nel modo seguente:

$$\begin{aligned} r_1 &= 0, a_{11}\, a_{12}\, a_{13}\, a_{14} \dots \\ r_2 &= 0, a_{21}\, a_{22}\, a_{23}\, a_{24} \dots \\ r_3 &= 0, a_{31}\, a_{32}\, a_{33}\, a_{34} \dots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Il numero reale $x = 0, \beta_1\, \beta_2\, \beta_3\, \dots$ con

$$\beta_j \neq a_{jj}, \qquad \beta_j \neq 0, \qquad \beta_j \neq 9, \qquad \forall j$$

appartiene all'intervallo $(0,1)$ (è positivo e ha parte intera uguale a zero), ma è diverso da tutti i numeri reali r_j, in contraddizione col fatto di aver enumerato tutti i valori nell'intervallo.

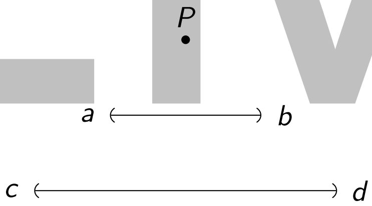
Quindi sicuramente la cardinalità dell'intervallo $(0, 1)$ è diversa da quella del numerabile.

Passiamo a dimostrare che tutti gli intervalli della retta reale hanno la stessa cardinalità, dando solo un'idea grafica della dimostrazione.

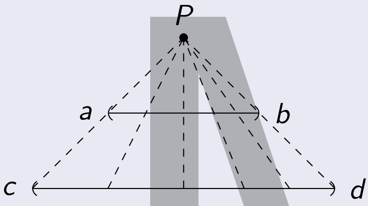
Esercizio 4

Determinare (geometricamente) una corrispondenza biunivoca tra due intervalli aperti (a, b) e (c, d) della retta reale.

Suggerimento: allineare i due segmenti e considerare un punto P come in figura:



Soluzione dell'Esercizio 4

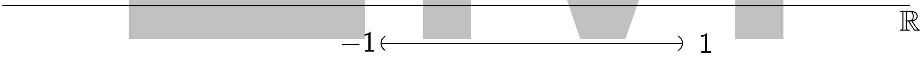


si proietta ogni punto di (a, b) *in un unico punto di* (c, d) *dal punto* P *esterno ai due segmenti.*
Ovviamente questa operazione geometrica si può scrivere in formule utilizzando la ***geometria analitica*** *e si trova la corrispondenza biunivoca cercata.*

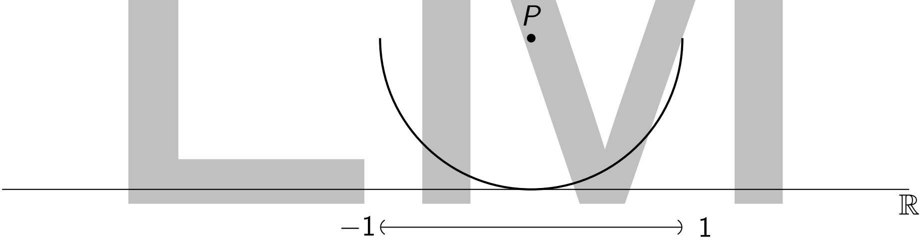
Infine, per mettere in corrispondenza biunivoca un intervallo limitato, diciamo $(-1, 1)$, con tutta la retta reale, serve una sorta di "meccanismo di amplificazione" (**proiezione stereografica**).

Diamo un'idea geometrica della corrispondenza biunivoca:

- disegnamo la retta reale;
- dalla retta reale "stacchiamo l'intervallo $(-1, 1)$" e disegnamone una copia;

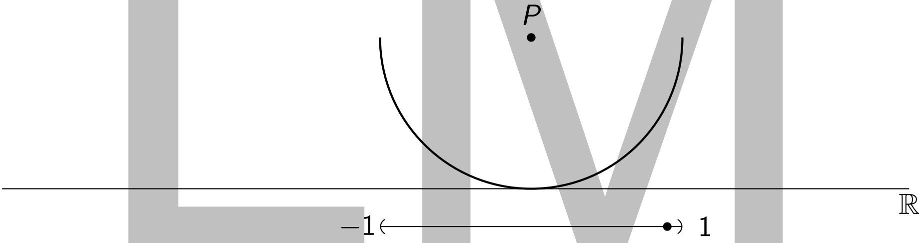


- disegnamo la semicirconferenza di raggio 1 tangente alla retta reale in 0;
- indichiamo con P il centro di tale circonferenza;



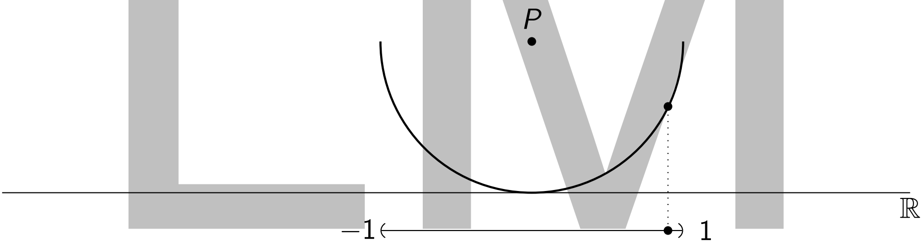
Proiezione stereografica

- fissiamo un qualsiasi punto dell'intervallo $(-1, 1)$;



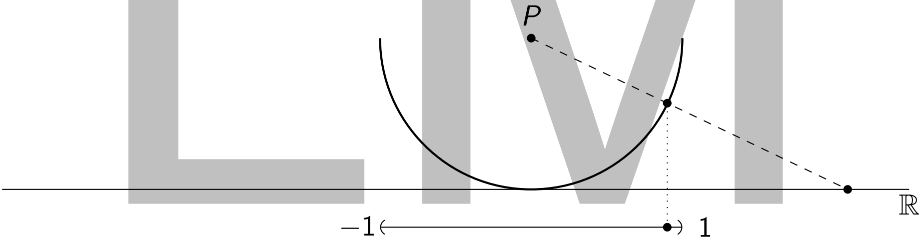
Proiezione stereografica

- fissiamo un qualsiasi punto dell'intervallo $(-1, 1)$;
- proiettiamolo verticalmente sulla circonferenza;

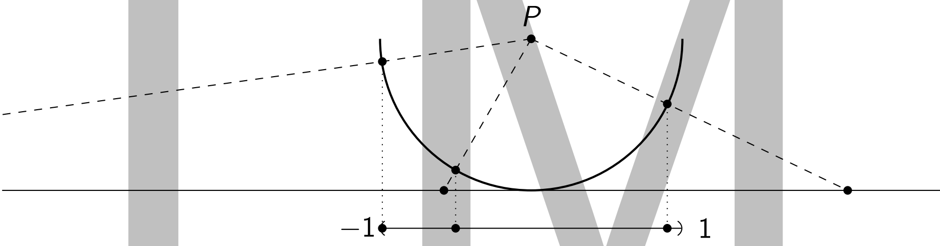


Proiezione stereografica

- tracciamo la retta per P e il punto della circonferenza;
- associamo al punto di partenza in $(-1, 1)$ i punto intersezione tra la retta considerata e la retta reale;



Se facciamo questa operazione per ogni punto dell'intervallo $(-1, 1)$ costruiamo una corrispondenza biunivoca tra questo intervallo e tutta la retta reale.



Il meccanismo di amplificazione funziona perchè proiettiamo tramite una semicirconferenza che ha tangente verticale agli estremi: i punti molto vicini a -1 o a 1 si proiettano sempre più lontano.

Cardinalità del continuo

La cardinalità della retta reale prende il nome di **cardinalità del continuo**.

Possiamo dividere i numeri reali in tre gruppi:

- **razionali**
- **irrazionali algebrici**: le soluzioni di equazioni algebriche a coefficienti interi (ad es. tutte le radici quadrate, cubiche, ecc...)
- **irrazionali trascendenti**: tutti gli altri irrazionali (ad es. π)

Conosciamo esplicitamente tantissimi irrazionali algebrici e abbastanza pochi trascendenti.

Abbiamo visto che **i numeri reali sono molti di più dei numeri razionali** (ma ricordiamoci anche che i numeri razionali sono densi in $\mathbb{R}$).
Si può essere più precisi sulle informazioni riguardanti la cardinalità dei numeri irrazionali. Precisamente, si può dimostrare che

- i numeri irrazionali algebrici sono una quantità numerabile;
- quindi i numeri irrazionali trascendenti sono veramente tanti!

Quante e quali altre cardinalità ci sono?

Studiando gli insiemi numerici abbiamo trovato due cardinalità distinte, quella del **numerabile** e quella del **continuo**.

E' del tutto naturale porsi due domande:

- ci sono cardinalità intermedie tra queste due?
- ci sono cardinalità superiori a quella del continuo?

La prima apre una questione particolarmente affascinante (o frustrante, dipende dai punti di vista) che prende il nome di **Ipotesi del continuo**

La seconda ha una risposta stupefacente:
ci sono **infinite cardinalità** (infinite) **distinte!**

CH "Continuum Hypothesis"

non c'è nessuna cardinalità strettamente compresa tra quella dei naturali e quella dei reali.

- **Cantor** era fermamente convinto del fatto che **CH fosse vera**.

CH "Continuum Hypothesis"

non c'è nessuna cardinalità strettamente compresa tra quella dei naturali e quella dei reali.

- **Cantor** era fermamente convinto del fatto che **CH fosse vera**.
- nel 1940 **Kurt Gödel** dimostrò che nell'ambito della usuale teoria degli insiemi **non si poteva dimostrare che CH fosse falsa**.

CH "Continuum Hypothesis"

non c'è nessuna cardinalità strettamente compresa tra quella dei naturali e quella dei reali.

- **Cantor** era fermamente convinto del fatto che **CH fosse vera**.
- nel 1940 **Kurt Gödel** dimostrò che nell'ambito della usuale teoria degli insiemi **non si poteva dimostrare che CH fosse falsa**.
- nel 1963 **Paul Cohen** dimostrò che nell'ambito della usuale teoria degli insiemi **non si può nemmeno dimostrare che CH sia vera**.

CH "Continuum Hypothesis"

non c'è nessuna cardinalità strettamente compresa tra quella dei naturali e quella dei reali.

- **Cantor** era fermamente convinto del fatto che **CH fosse vera**.
- nel 1940 **Kurt Gödel** dimostrò che nell'ambito della usuale teoria degli insiemi **non si poteva dimostrare che CH fosse falsa**.
- nel 1963 **Paul Cohen** dimostrò che nell'ambito della usuale teoria degli insiemi **non si può nemmeno dimostrare che CH sia vera**.

Quindi, la CH è **indecidibile** nell'ambito della usuale teoria degli insiemi, nel senso che è altrettanto coerente prenderla come vera che prenderla come falsa.

Per fortuna i modelli della matematica applicata non dipendono dalla validità o meno di CH, quindi la sua indecidibiltà non incide sui risultati che vengono utilizzati nella vita reale (fisica, ingegneria, informatica...)

L'insieme delle parti

Per rispondere alla seconda domanda introduciamo una nuova nozione.

Insieme delle parti

Dato un insieme X, il suo insieme delle parti $\mathcal{P}(X)$ è dato da

$$\mathcal{P}(X) = \{A \text{ sottoinsieme di } X\}.$$

Esempio. Se $X = \{a, b, c\}$, allora $\mathcal{P}(X)$ è l'insieme formato dai seguenti 8 insiemi:

$$\emptyset \quad \{a\} \quad \{b\} \quad \{c\} \quad \{a, b\} \quad \{a, c\} \quad \{b, c\} \quad \{a, b, c\}$$

Si può dimostrare che se $|X| = n$ allora $|\mathcal{P}(X)| = 2^n > |X|$.

Esistono infinite cardinalità infinite

Teorema di Cantor

Sia X un insieme. Allora $|\mathcal{P}(X)| > |X|$.

Come conseguenza del Teorema di Cantor, otteniamo che

esiste una sequenza di cardinalità infinite, ciascuna strettamente maggiore della precedente.

Partendo da $|\mathbb{N}|$, che sappiamo essere la cardinalità infinita minima, basta **iterare** il **passaggio all'insieme delle parti**:

$$|\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})| < |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))| < |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})))| < |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))))| < \cdots$$

Dimostriamo il teorema di Cantor.
L'applicazione "$x \mapsto \{x\}$" è un'iniezione di X in $\mathcal{P}(X)$. Quindi $|\mathcal{P}(X)| \geq |X|$.

Dimostriamo ora che non esiste un'applicazione biunivoca tra X e $\mathcal{P}(X)$. Supponiamo, per assurdo, che esista e indichiamola con "$x \leftrightarrow A(x)$". Consideriamo l'insieme $C \in \mathcal{P}(X)$

$$C = \{x \in X \text{ tali che } x \notin A(x)\}.$$

L'ipotesi per assurdo garantisce che esiste un'unico $x_0 \in X$ tale che $C = A(x_0)$. Si ha che

- se $x_0 \in C = A(x_0)$, allora, per come sono definiti gli elementi di C, deve essere $x_0 \notin C = A(x_0)$ 
- se $x_0 \notin C = A(x_0)$, allora, per come sono definiti gli elementi di C, deve essere $x_0 \in C = A(x_0)$ 

Le contraddizioni trovate dipendono dal fatto che abbiamo supposto che "$x \leftrightarrow A(x)$" sia biunivoca. Se ne conclude che non può esistere nessuna corrispondenza biunivoca tra X e l'insieme delle sue parti.

Questo che abbiamo descritto prende il nome di "Paradiso di Cantor":

nessuno ci caccerà mai dal paradiso che Cantor ha creato per noi (D. Hilbert)

GRAZIE PER L'ATTENZIONE