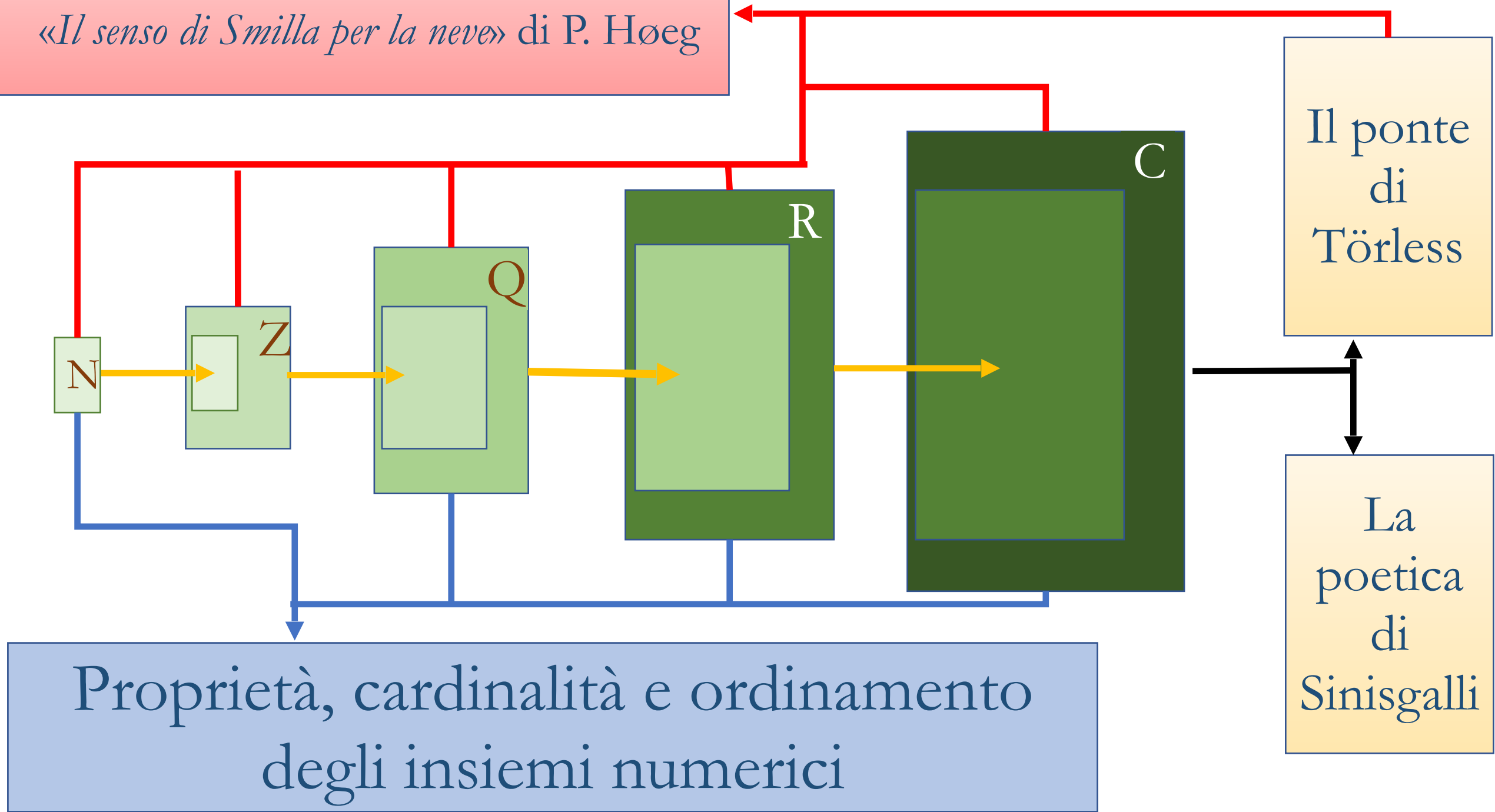


GLI INSIEMI NUMERICI

quando realtà e immaginario si incontrano...

*Liceo classico e linguistico Tito Lucrezio Caro-Roma
Prof.sse Erminia Izzo, Michela Prosperì e Francesca Ruzzi*

Sviluppo della personalità umana in una metafora offerta da un brano tratto da «*Il senso di Smilla per la neve*» di P. Høeg



► **Contenuti:**

- trattazione sistematica degli insiemi numerici, a partire da un brano tratto da *Il senso di Smilla per la neve* di P. Høeg
- cardinalità di ciascun insieme numerico (paradosso di Hilbert)
- i numeri complessi: forma algebrica e rappresentazione nel piano di Gauss
- la poetica di Sinisgalli: la poesia come numero complesso
- riflessione sulle specificità e analogie di matematica e letteratura, a partire da un brano tratto da *I turbamenti dell'allievo Törless* di Musil

► **Destinatari:** alunni del quarto anno del Liceo Matematico del liceo classico e linguistico Tito Lucrezio Caro

► **Durata:** 20 ore

► **Materie coinvolte:** italiano e matematica

► **Prodotto finale:** rappresentazione da parte dei ragazzi in occasione della Notte Nazionale dei Licei Classici

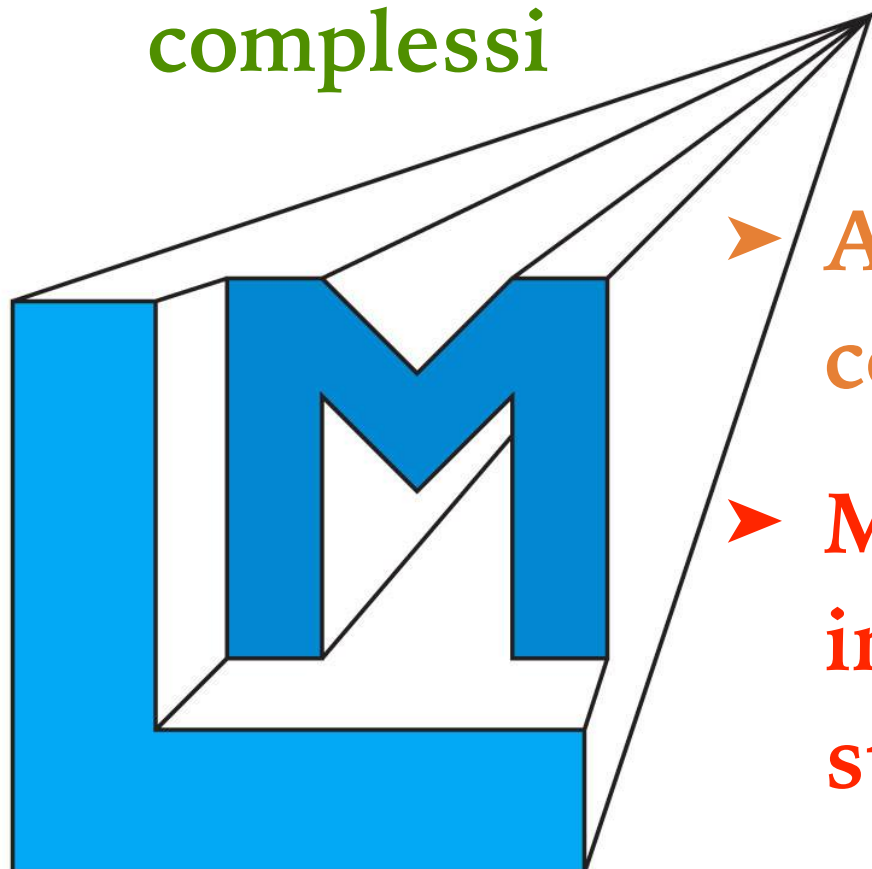
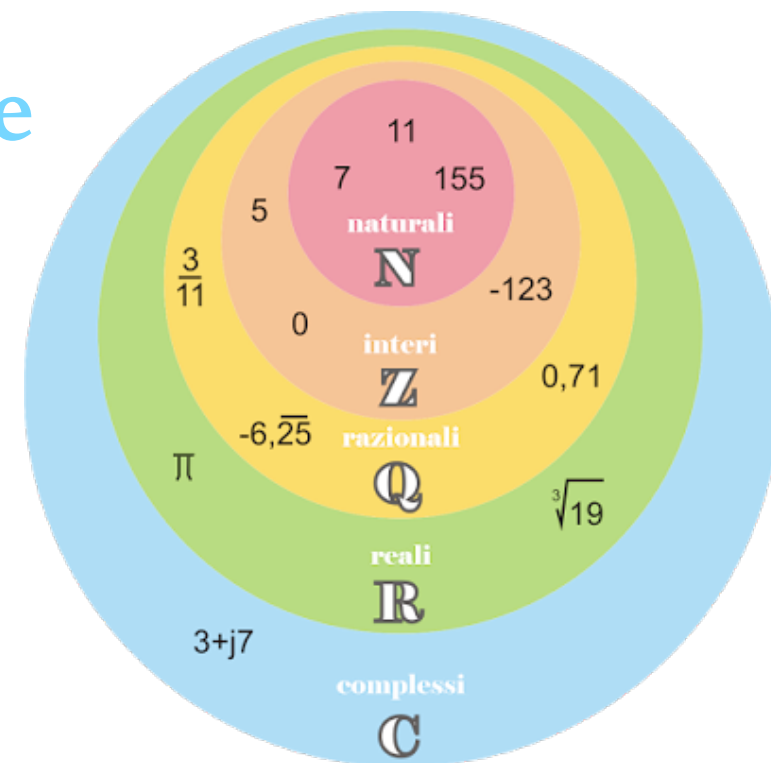


IL SENSO DI SMILLA PER LA NEVE

Peter Høeg (1992)

OBIETTIVI: FASE MOTIVAZIONALE E INTRODUTTIVA

- Recuperare le preconoscenze necessarie per inquadrare l'insieme dei numeri complessi all'interno del più vasto argomento degli ampliamenti numerici
- Introdurre l'insieme dei numeri complessi



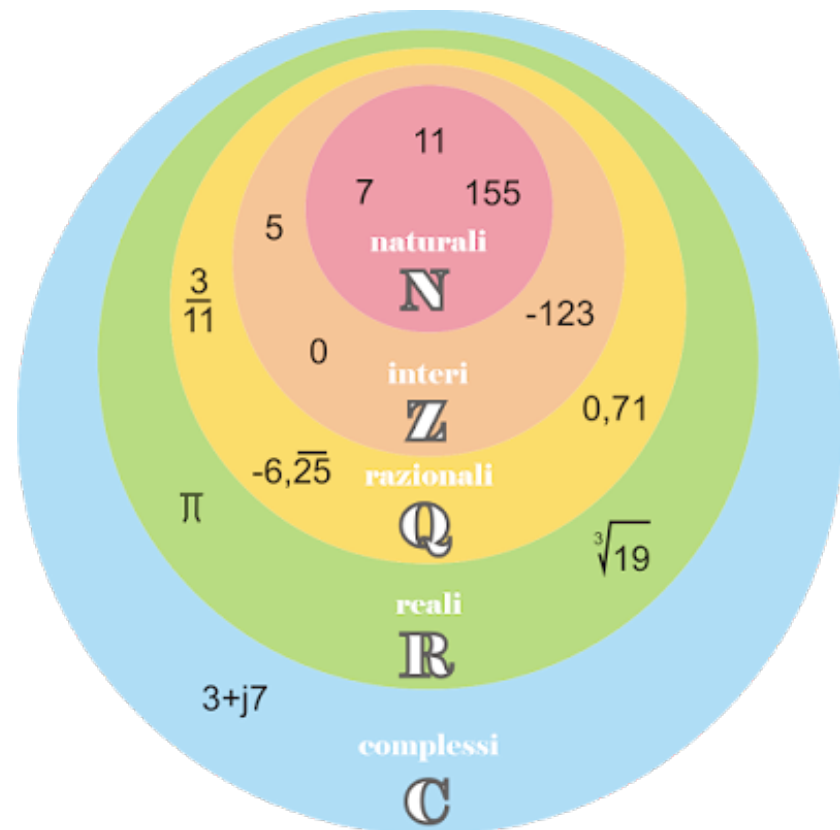
- Analizzare un testo e coglierne le relazioni con altri ambiti del sapere
- Mostrare che letteratura e matematica si incontrano molto più spesso di quanto gli studenti non pensino

METODOLOGIA E STRUTTURA DELLA LEZIONE



- **Lettura e analisi** condotte **in autonomia** dagli studenti
- **Scheda di lavoro** con **domande-dialogo** tese ad evidenziare le relazioni tra gli aspetti matematici e quelli umanistici
- **Lezione interattiva** a partire dalle risposte degli studenti

IL SISTEMA NUMERICO È COME LA VITA UMANA



- Mettere in **relazione ogni insieme numerico con un momento preciso dello sviluppo della personalità**

- **Ampliamenti progressivi** dove quello che era oggetto in una fase diventa soggetto nella successiva
- **Continua integrazione** in cui nulla delle fasi precedenti va perduto



Insiemi Numerici	Periodo di vita	Fase di sviluppo della personalità
Naturali	0-5 mesi	il bambino non è distinto dall'ambiente
Negativi	5-9 mesi	il bambino inizia a sentire la mancanza
Razionali	3-6 anni	emerge la capacità di articolare pensieri
Irrazionali	1-3 anni	differenziazione delle emozioni
Reali		la personalità (Freud)
Immaginari		storia dell'immaginazione
Complessi		la personalità integrata



*Dio ha creato i numeri interi,
tutto il resto è opera dell'uomo*

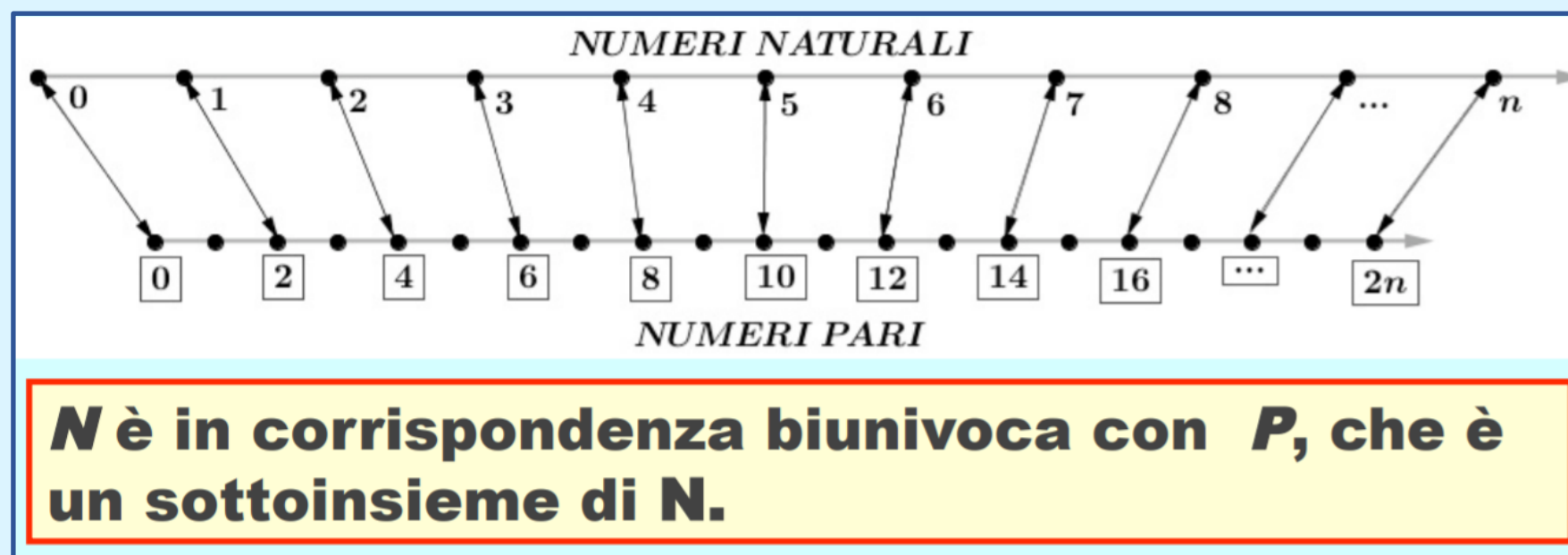
- Leopold Kronecker (1823-1891)

$$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; \dots\}$$

- È chiuso rispetto all'addizione e alla moltiplicazione
- Esistono di entrambe le operazioni gli elementi neutri (rispettivamente 0 ed 1)
- Non esistono gli elementi inversi per entrambe le operazioni
- È un insieme discreto
- È un insieme ordinato
- È un insieme infinito
- La cardinalità dell'insieme $\mathbb{N}$ (detta anche cardinalità del numerabile), si indica con il simbolo $\aleph_0$ (aleph zero)

Sono quelli
interi e positivi:
i numeri del
bambino

da:
«il senso di Smilla per la neve»

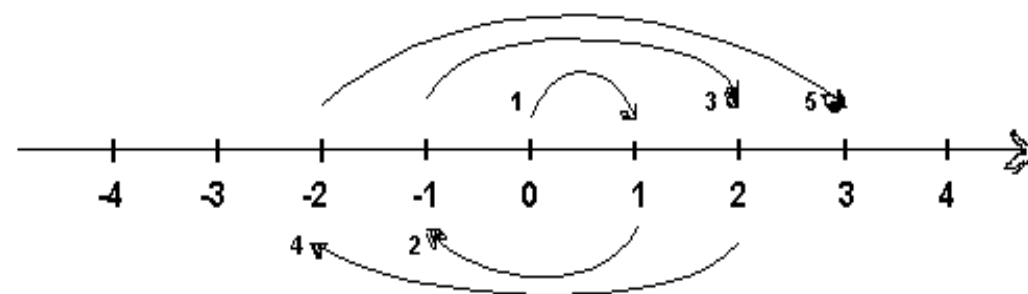


$$\mathbb{Z} = \{0; +1; -1; +2; -2; \dots\}$$

- È chiuso rispetto all'addizione, alla sottrazione e alla moltiplicazione
- Esiste l'elemento inverso rispetto all'addizione
- **Non esiste l'elemento inverso rispetto alla moltiplicazione**
- È un insieme discreto
- È un insieme ordinato
- È un insieme infinito
- La cardinalità dell'insieme $\mathbb{Z}$ è $\aleph_0$

*sono l'espressione
matematica del
desiderio*

da:
«il senso di Smilla per la neve»



$$f(n) = \begin{cases} -\frac{n}{2} & \text{se } n \text{ è pari} \\ \frac{n+1}{2} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

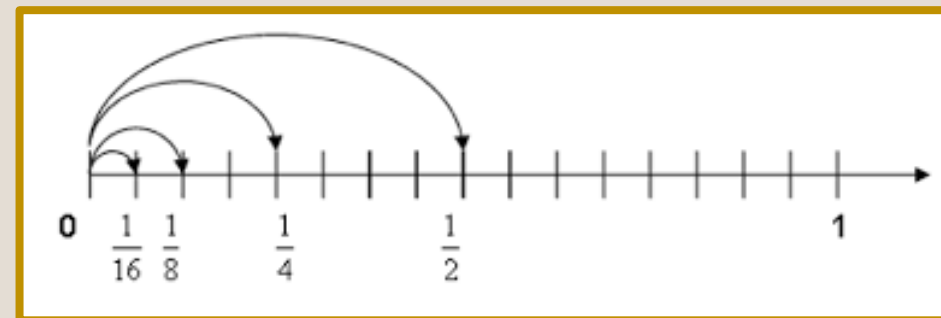


$$\mathbb{Q} = \{a/b: a, b \text{ sono numeri interi, } b \text{ è diverso da } 0\}$$

- È chiuso rispetto all'addizione, alla sottrazione, alla moltiplicazione e alla divisione
- Esistono gli elementi inversi rispetto all'addizione e alla moltiplicazione
- È un insieme denso
- È un insieme ordinato
- È un insieme infinito
- La cardinalità dell'insieme $\mathbb{Q}$ è $\aleph_0$

... e il bambino
scopre gli spazi
intermedi

da:
«il senso di Smilla per la neve»



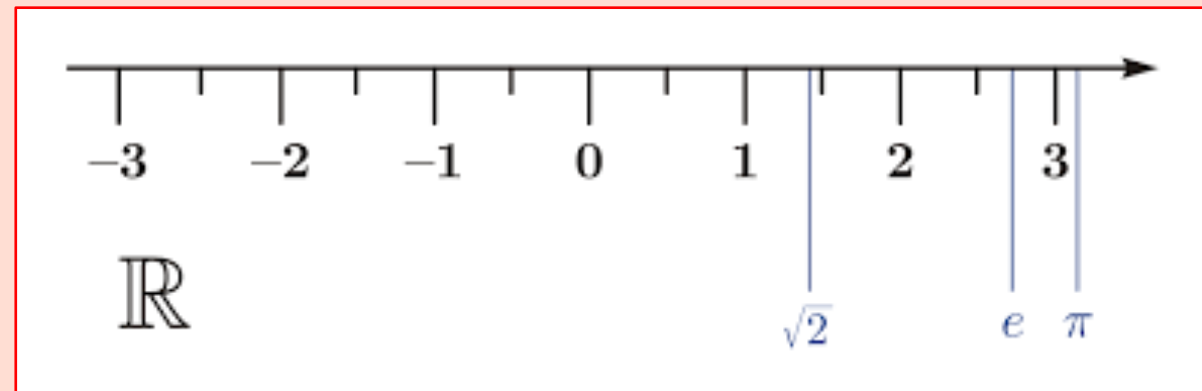
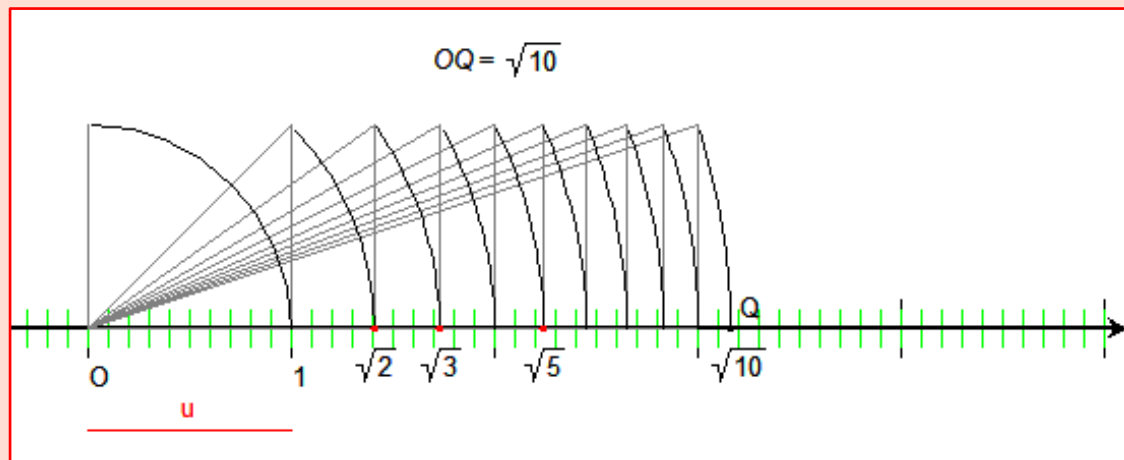
1	1/2	1/3	1/4	1/5
2/1	2/2	2/3	2/4	2/5
3/1	3/2	3/3	3/4	3/5
4/1	4/2	4/3	4/4	4/5
5/1	5/2	5/3	5/4	5/5

$$a_1=1, a_2=2/1, a_3=1/2, a_4=3/1, a_5=2/2, a_6=1/3, a_7=4/1, a_8=3/2, \dots$$

in generale

$$a_n = r/s, \text{ con } n = 1 + 2 + 3 + \dots + (r + s - 2) + s = \\ = (r + s - 2)(r + s - 1)/2 + s = \frac{(r + s)^2 - 3r - s + 2}{2}$$

La scoperta degli irrazionali e la costruzione di $\mathbb{R}$

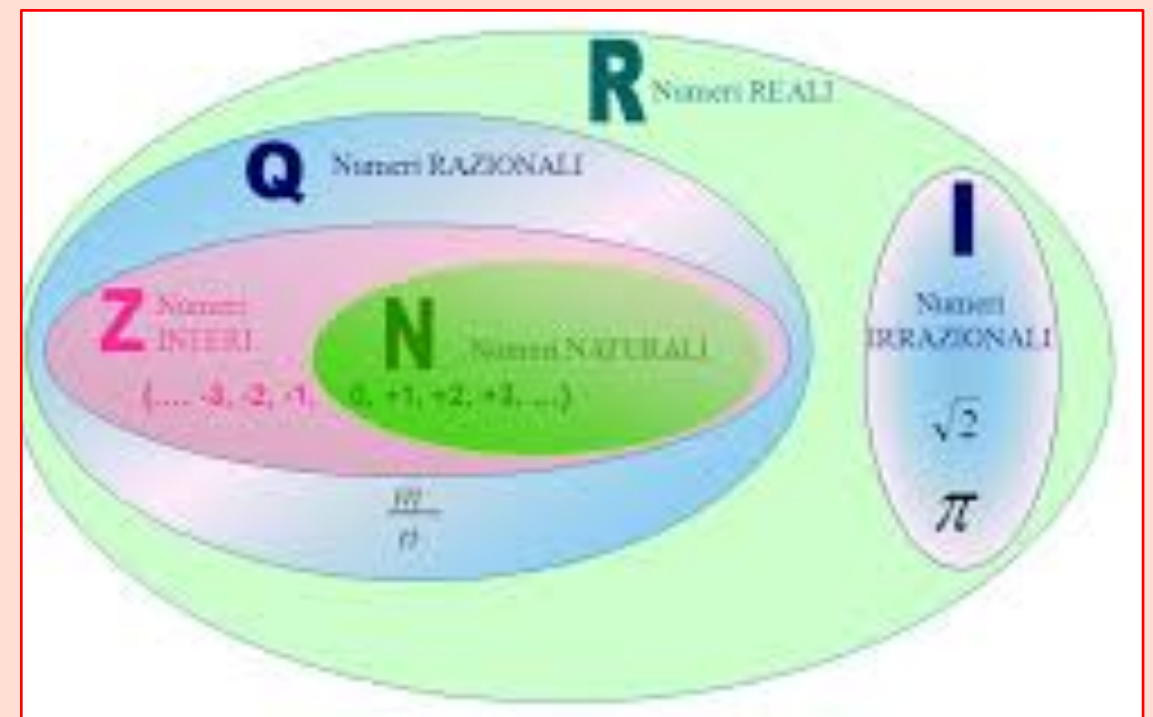


... ma la coscienza
non si ferma lì.
Vuole superare la
ragione

da:
«il senso di Smilla per la neve»

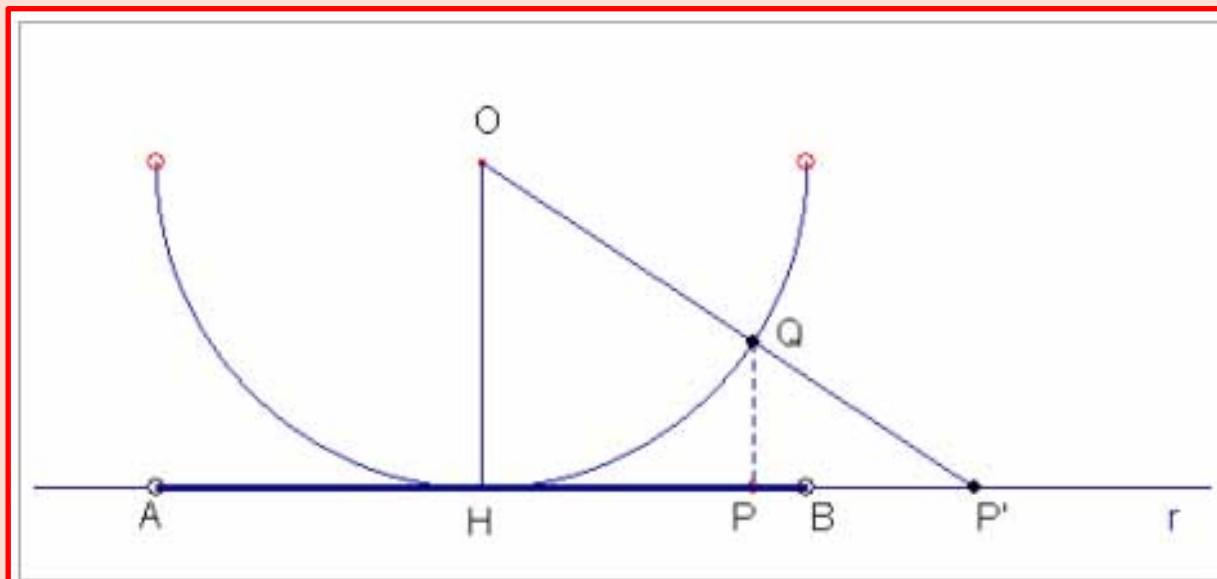
$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

- È un insieme denso
- È un insieme ordinato
- È un insieme completo



- $\mathbb{R}$ è un insieme infinito
- La cardinalità dell'insieme $\mathbb{R}$ (detta anche cardinalità del continuo) è maggiore di $\aleph_0$

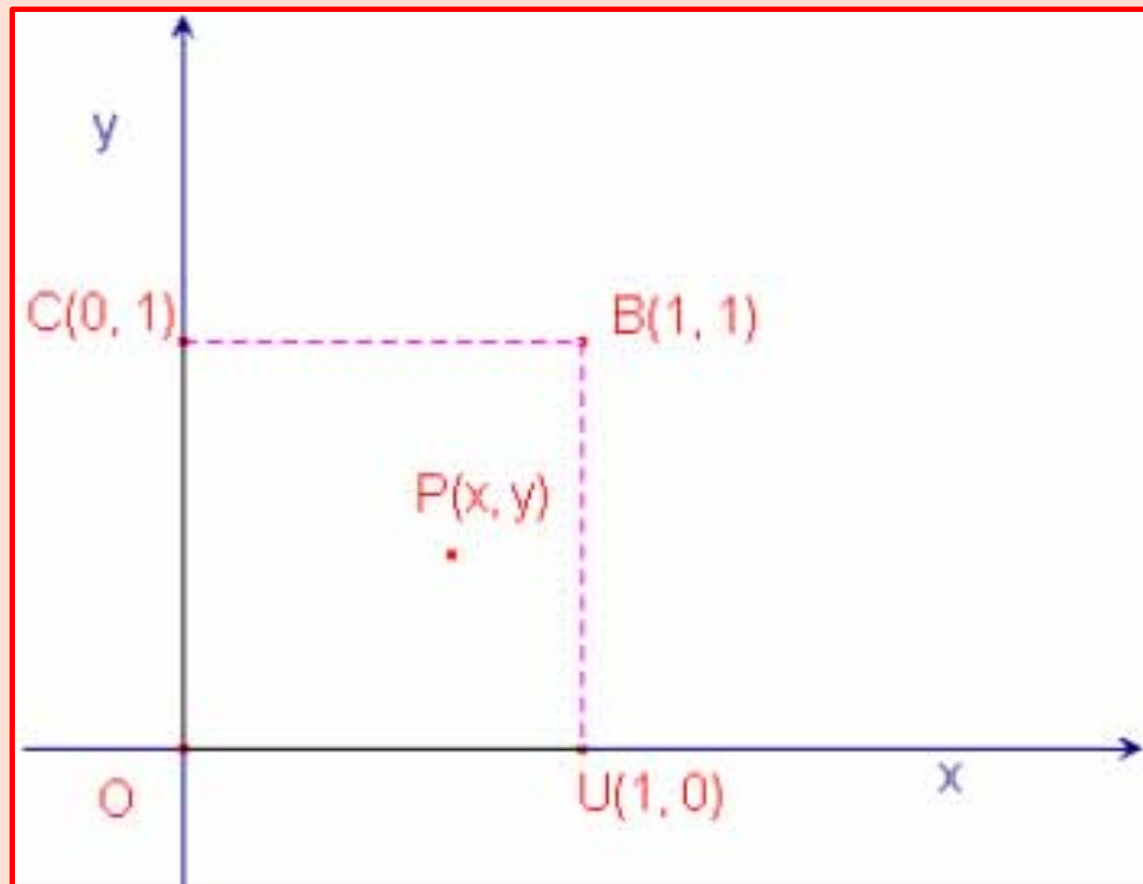
**Corrispondenza
biunivoca tra il
segmento AB e la
retta r**



**Argomento
Diagonale di
Cantor**

X1	=	0,	0	6	8	7	2	0	1	5	8	...
X2	=	0,	5	4	3	4	3	5	7	8	2	...
X3	=	0,	3	5	2	3	2	7	8	5	5	...
X4	=	0,	8	0	0	2	7	3	4	3	7	...
X5	=	0,	7	5	1	2	5	2	6	3	6	...
X6	=	0,	7	4	4	8	6	4	3	7	2	...
X7	=	0,	3	7	4	3	0	0	6	3	6	...
X8	=	0,	0	0	3	0	6	6	4	2	0	...
X9	=	0,	7	3	0	8	2	2	0	6	6	...
Y	=	0,	1	5	3	3	6	5	7	3	7	...

► $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^2$ sono equipotenti



Sia $P(x;y)$ un punto del quadrato
di lato **OU** con

$$x = 0, a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 \dots$$

$$y = 0, b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 b_6 \dots$$

$$(0, a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 \dots ; 0, b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 b_6 \dots) \longleftrightarrow 0, a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 b_3 a_4 b_4 \dots \in \text{OU}$$

L'unità immaginaria

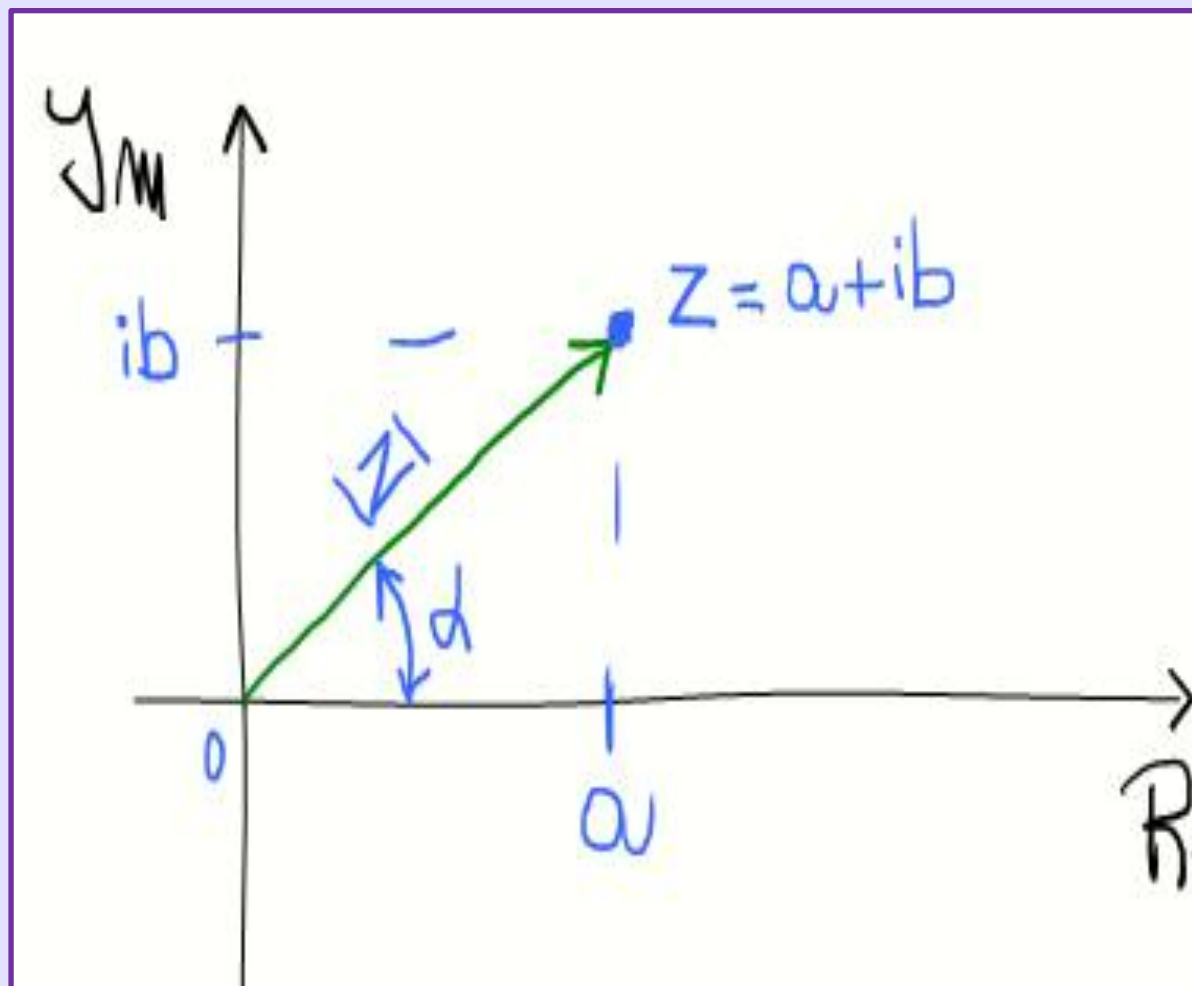
... ora, su due piedi,
espandiamo i numeri
reali con quelli
immaginari

da:
«il senso di Smilla per la neve»

$$i = \sqrt{-1}$$

$$\mathbb{C} = \{a+ib: a, b \text{ sono numeri reali}\}$$

- È un insieme infinito
- Ha la cardinalità del continuo
- Non è un insieme ordinato

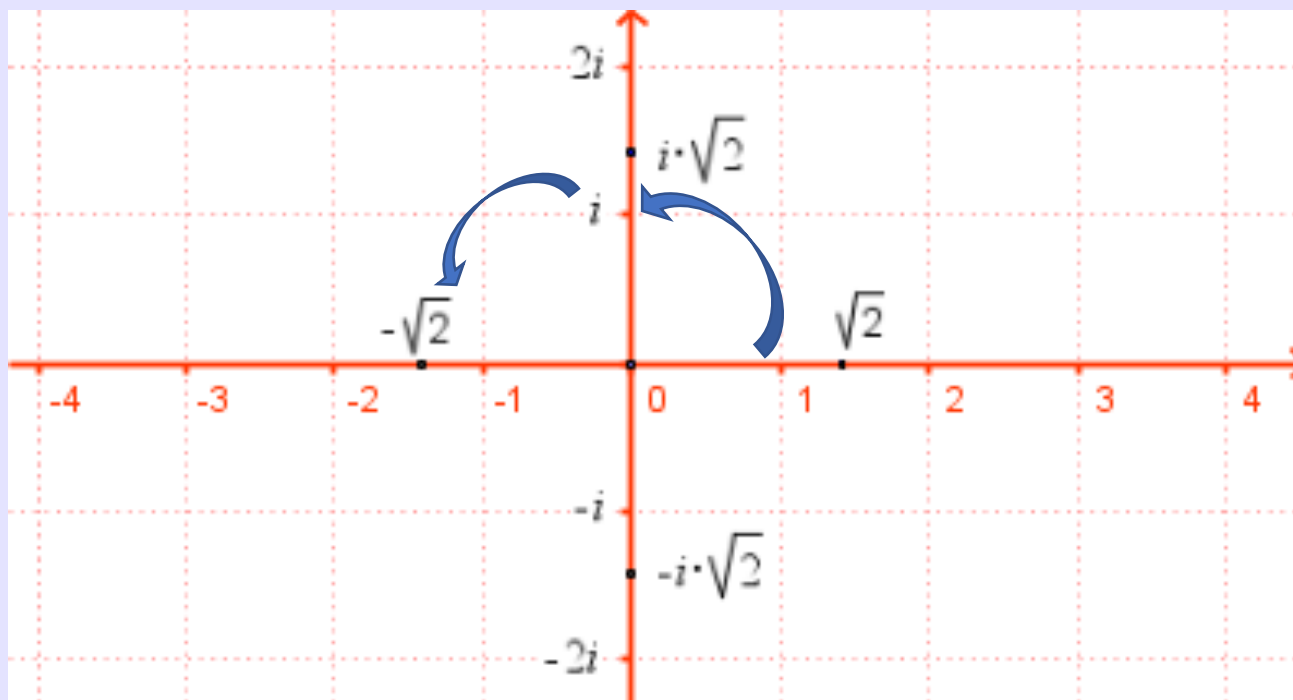


fornisce una
spiegazione
soddisfacente della
formazione dei cristalli
di ghiaccio

da:
«il senso di Smilla per la neve»

*Il numero complesso è un
vettore*

Rappresentano un ponte dal reale
all'immaginario...
per ritornare nel reale





I TURBAMENTI DELL'ALLIEVO TÖRLESS

Robert Musil (1906)

OBIETTIVI: FASE DI RINFORZO

- Rafforzare l'idea che i numeri complessi rappresentano un ponte tra reale e reale

Prova a pensarla così: in un calcolo del genere, tu hai all'inizio dei numeri solidissimi, in grado di quantificare metri, pesi o qualsiasi altro oggetto concreto, comunque numeri reali. Alla fine del calcolo, lo stesso. Ma l'inizio e la fine sono tenuti insieme da qualcosa che non c'è. Non è un po' come un ponte che consti soltanto dei piloni iniziali e finali, e sul quale tuttavia si cammina sicuri come se fosse intero? Un calcolo del genere mi dà il capogiro; come se un pezzo del cammino andasse Dio sa dove. Ma la cosa davvero inquietante per me è la forza insita in questi calcoli, una forza capace di sorreggerti fino a farti arrivare felicemente dall'altra parte





► Far riflettere i ragazzi sul loro rapporto con la matematica a partire dalle visioni esposte nel testo:

- Törless: visione più passionale in cui la matematica assume un carattere coraggioso e audace

Ma come si può se si sa con certezza, con matematica certezza, che è impossibile?

- Beinberg: una visione più opportunistica in cui la matematica è la matematica del calcolatore, del noto

Non è poi così difficile. Bisogna solo ricordare che l'unità di calcolo è data dalla radice quadrata di meno uno



- Far riflettere sulla specificità dell'età adolescenziale intesa come ponte tra l'infanzia e l'adulità

Se tutto questo costituisce davvero la preparazione alla vita, come dicono, dovrà pur trovarvisi almeno un accenno di ciò che io vado cercando

- Aiutare i ragazzi a sviluppare consapevolezza di sé e della propria età
- Introdurre il romanzo di formazione nel Novecento

METODOLOGIA E STRUTTURA DELLA LEZIONE

- Breve vita all'autore
- Contestualizzazione: cenni alla crisi dei fondamenti di inizio Novecento
- Introduzione all'opera e alcune considerazioni preliminari
- **Lettura e analisi** condotte **in autonomia** dagli studenti
- **Scheda di lavoro** con **domande-dialogo**
- **Lezione interattiva** a partire dalle risposte degli studenti



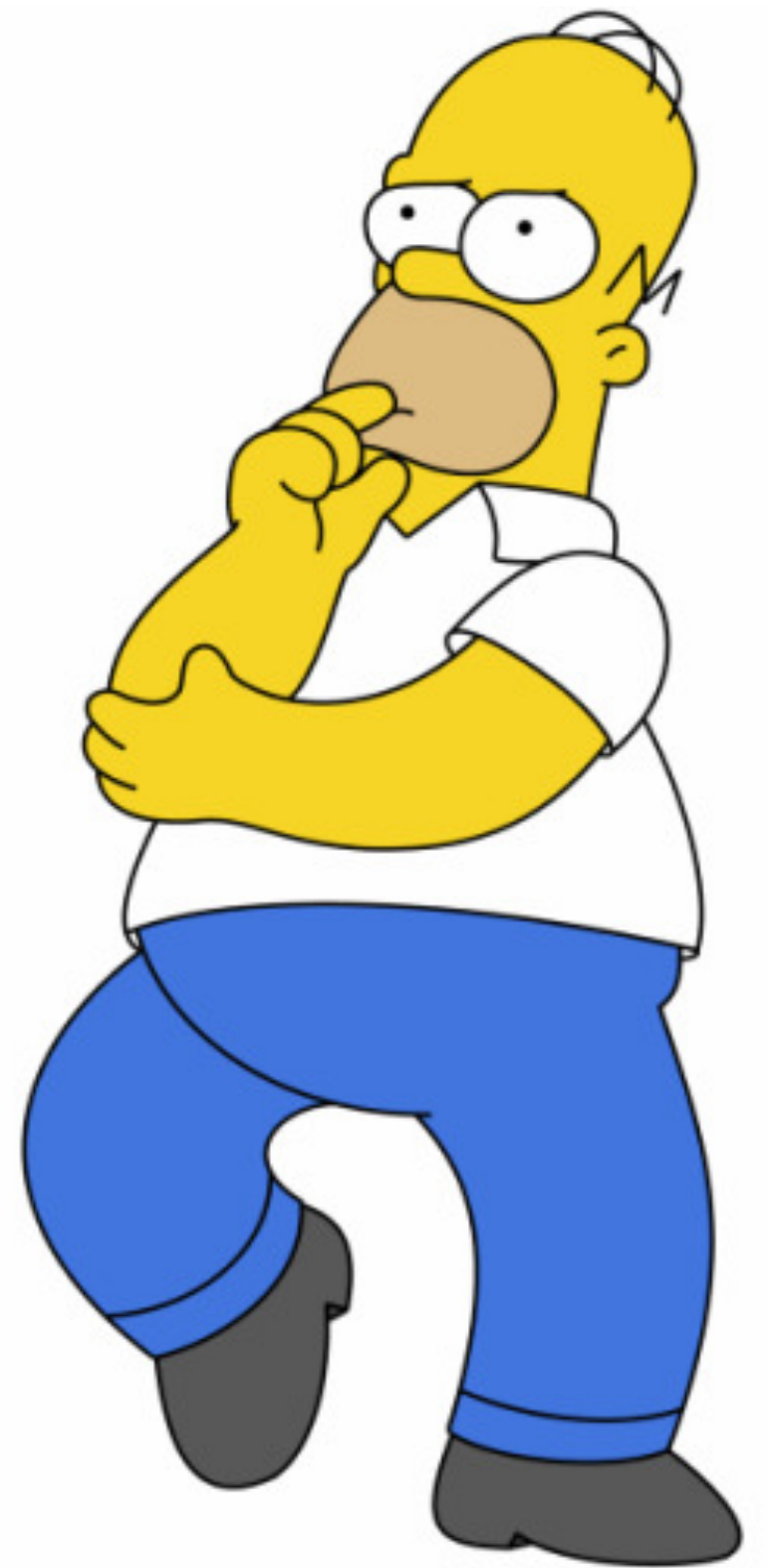
LEONARDO SINISGALLI

La poesia come numero complesso

METODOLOGIA E STRUTTURA DELLA LEZIONE

- **Scheda con i testi analizzati** durante la lezione
- **Domande-dialogo:**
 - Motivazione: **Non vi pare che nei cristalli la natura si esprima in versi?** (L. Sinisgalli)
 - Breve presentazione della vita e del personaggio: il Leonardo del '900
 - **Cos'è la geometria?** - L. Sinisgalli, da *Furor mathematicus*
 - **Cos'è la poesia?** - G. Ungaretti, *Il porto sepolto*
 - Specificità del linguaggio poetico - F. de Suassure: *langue e parole*
 - **Cos'hanno in comune matematica e poesia?** - La poetica di L. Sinisgalli
 - Contestualizzazione: l'Ermetismo - S. Quasimodo, *Ed è subito sera*
 - Riflettere sulla funzione dell'immaginazione - Leopardi, *L'infinito*
 - Verifica: Analisi degli studenti di due testi di L. Sinisgalli tratti dalla raccolta *Vidi le Muse*

**COS'HANNO IN
COMUNE
MATEMATICA E
POESIA?**





Io non ho mai pensato che la **matematica** e la meccanica siano la stessa cosa della **poesia**. Quello che ci trovo **in comune** è **un tensione dell'intelligenza, e la felicità nella fatica, nello sforzo**. **Nel sonetto c'è molto di più di quello che c'è scritto. E in una macchina c'è molto di più di quello che è disegnato.** Sono forse **entrambi dispositivi capaci di produrre energia e di trasfromarla, di trasfigurarla**

–L. Sinisgalli, «Calder scultore ingegnoso» in *Civiltà delle macchine*, n. 1, 1953

$$z = a + bj$$

ENTRAMBE PARTONO
DALL'ANALISI DEL REALE,
NE INTUISCONO L'ESSENZA,
LA SINTETIZZANO IN SEGNI

Carissimo Gianfranco,

cerca di approfondire questa idea che mi sono fatto della **poesia: un quantum, una forza, un'estrema animazione esprimibile mediante un numero complesso $a + bj$** : *idealism mundi monstrum, inter ens et non ens amphibium* (Leibniz); una quantità silvestre (Cardano); somma di un reale e di un immaginario (Cartesio); un vettore, diremo noi con Marcolongo. [...] Ma torniamo ai **numeri complessi e alla poesia**, al binomio **$a + bj$ dove a e b sono quantità reali, e j è il famoso operatore immaginario**. Questo operatore dà un senso, un'inclinazione al numero che, per sua natura, è orizzontale e inerte, lo rende attivo, lo traduce in una forza. A me pare **analoga l'azione di j a quella che il poeta esercita sulla «cosa»**. Le parole per formare un verso devono avere una particolare inclinazione (scritta così, questa frase sembra ora addirittura lapalissiana). Voglio dire, insomma, che **il simbolo j ci darebbe un'idea di quella che è l'alterazione provocata dal linguaggio sulla realtà, del rapporto, cioè, tra «cosa» e «immagine»**.

$$z = a + bj$$

Immaginazione

+

=

**Poesia e
Matematica**

Elemento

Reale



			
Comprensione dell'argomento	82%	18%	
Organizzazione del proprio lavoro	50%	50%	
Organizzazione del lavoro: collaborazione	75%	25%	
Organizzazione del lavoro: gestione dei tempi	87,5%	12,5%	
Utilizzo delle conoscenze	63%	31%	6%
Grado di soddisfazione	85%	15%	

Il percorso è stato
stimolante ed interessante.

Abbiamo analizzato vari
aspetti della matematica
dal punto di vista teorico.

È stato bello vedere ciò che avevamo
studiato in una rappresentazione
pratica.

Mi è piaciuto soprattutto perché mi
sembra di aver unito una parte
umanistica con una scientifica
(come un numero complesso)

Scrivi un commento sull'attività che hai svolto:
Il percorso è stato stimolante ed interessante.
Abbiamo analizzato vari aspetti della matematica
dal punto di vista teorico. È stato bello vedere
ciò che avevamo studiato in una rappresentazione pratica.
Mi è piaciuto soprattutto perché mi sembra di aver
unito una parte umanistica con una scientifica
(come un numero complesso!)

-Livio

Ho trovato molto interessante il collegamento tra la matematica e la letteratura, forse da sola non sarei stata in grado di metterlo a fuoco, ma in questo modo mi è risultato chiaro.

Mi ha dato una prospettiva diversa per vedere la matematica e forse anche un maggior stimolo a capirla.

Scrivi un commento sull'attività che hai svolto:
Ho trovato molto interessante il collegamento tra la matematica e la letteratura, forse da sola non sarei stata in grado di metterlo a fuoco ma in questo modo mi è risultato chiaro.
Mi ha dato una prospettiva diversa per vedere la matematica e forse anche un maggior stimolo a capirla.

-Emma