# Le rappresentazioni dei numeri ed i sistemi numerici nell'antichità

# Sistema di numerazione sumero

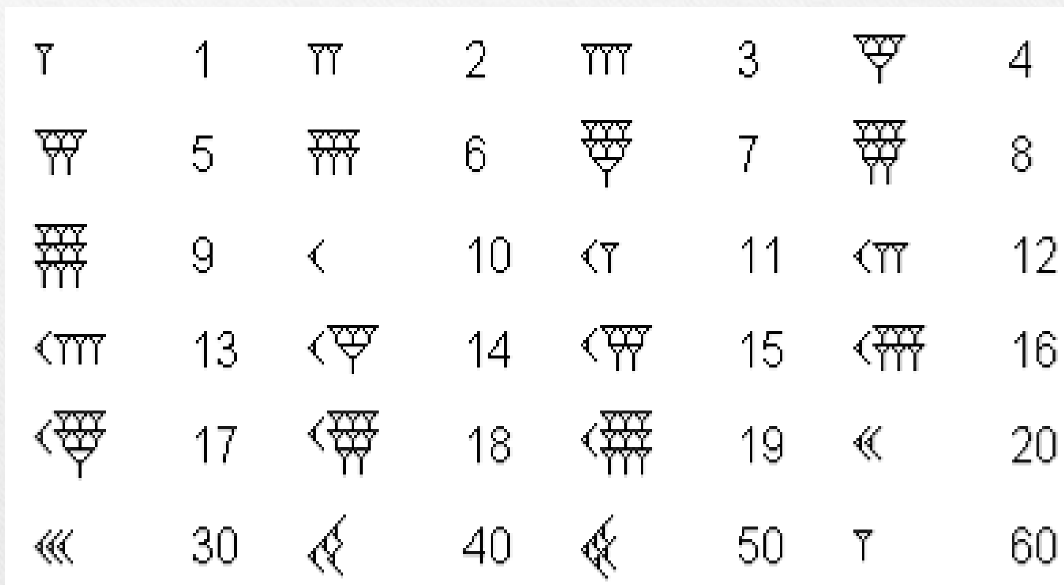
- Le prime forme di registrazione risalgono al paleolitico.
- Le prime testimonianze di un sistema numerico più organizzato risalgono al III millennio a.c. (Sumeri)

I sumeri scrivevano su tavolette di argilla cotta, utilizzando un bastone con una punta detta calamo che poteva imprimere due tipi di segno a seconda dell'inclinazione

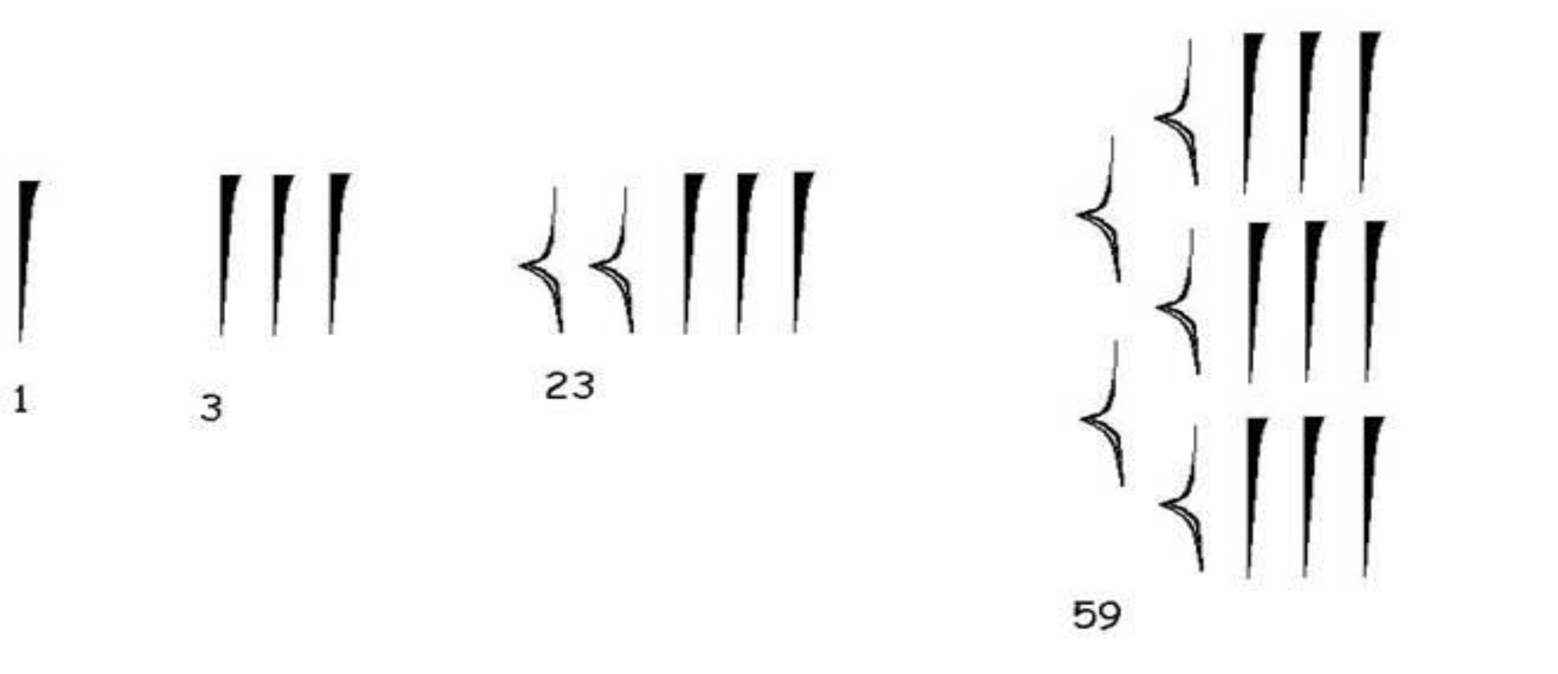
Chiodo 

Cuneo 

Il sistema di numerazione sumero fino al numero 60 è un sistema additivo

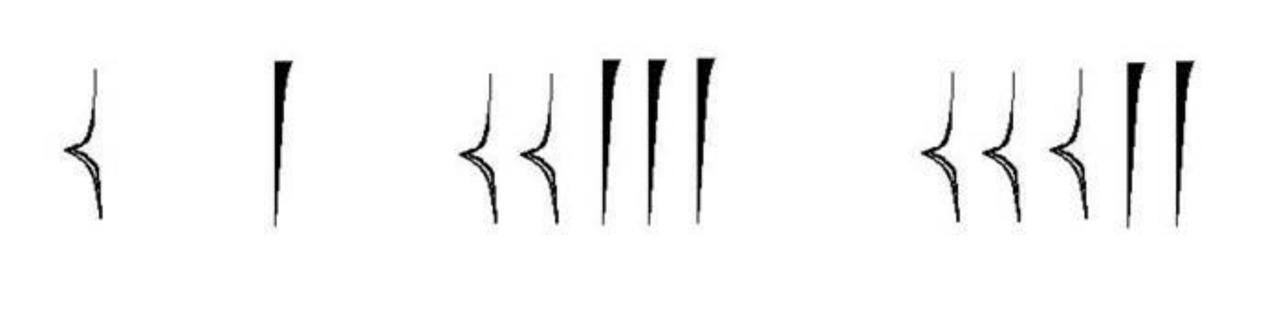


Esempi di raggruppamenti di numeri cuneiformi:

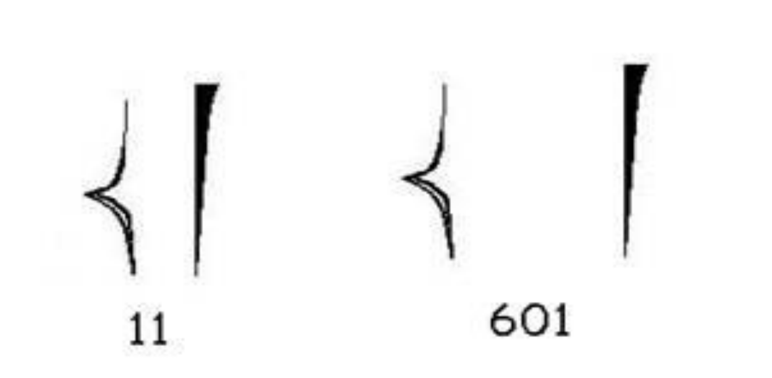


- Per rappresentare numeri superiori al 60, il sistema diventava posizionale (base 60)

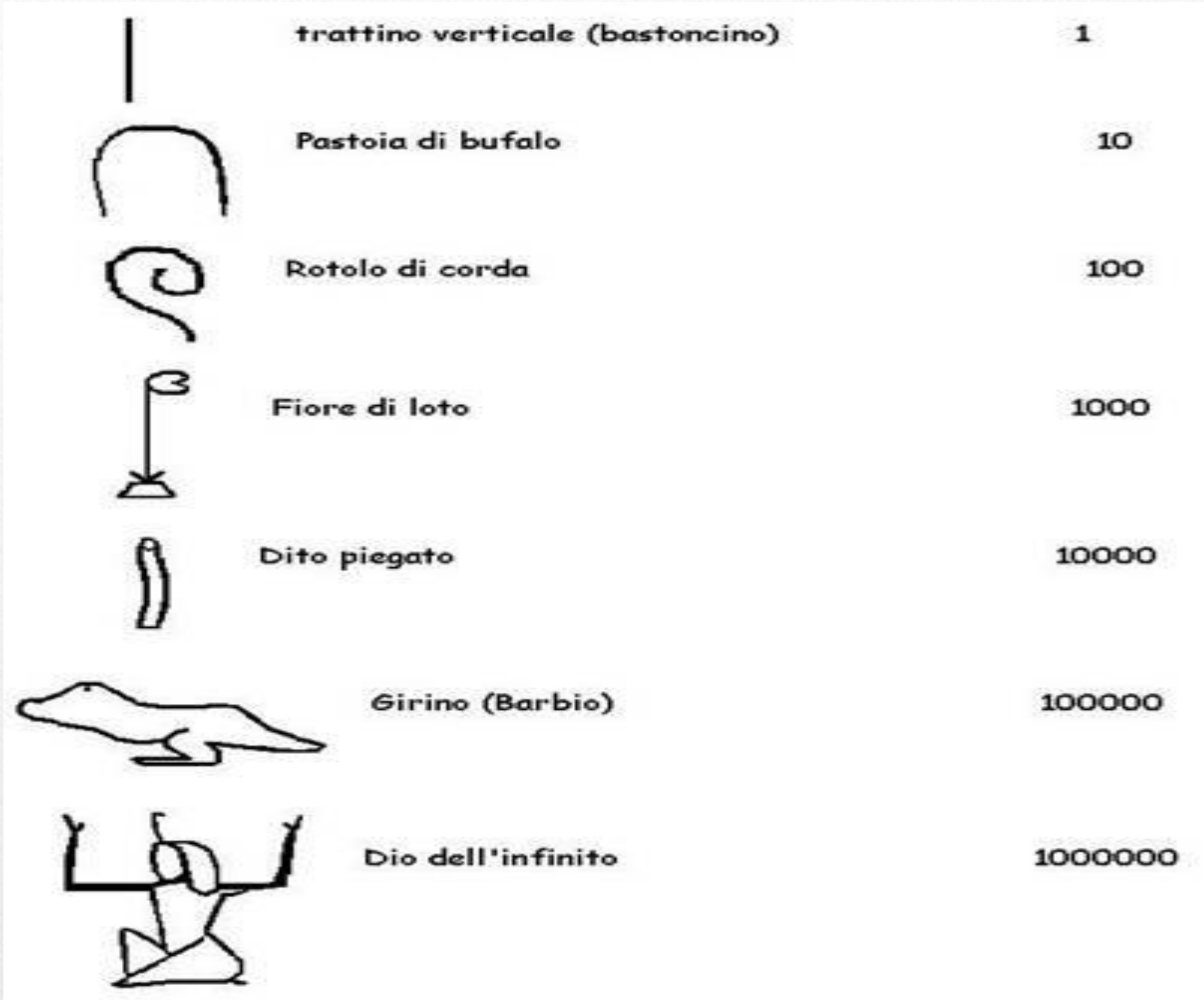
ESEMPIO:



Caratteristica  del sistema di numerazione sumero: ambiguità nell'interpretazione del numero, basata sul fatto che uno stesso simbolo poteva assumere valori numerici diversi a seconda della distanza dagli altri.



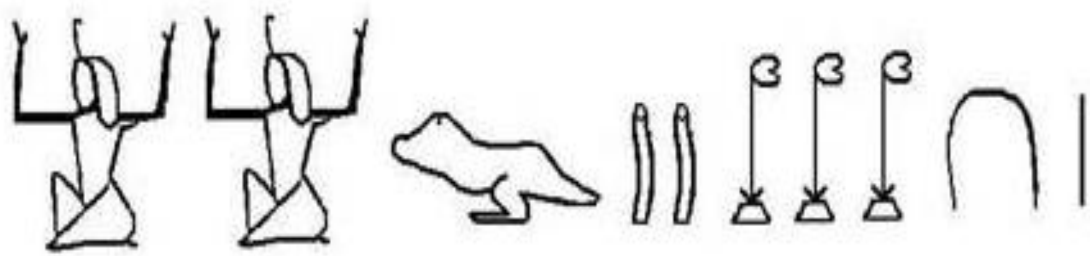
# Sistema di numerazione egizio




- E’ un sistema decimale ovvero in base 10.

- Attività: Indovina il numero

(1)



(2)

## Papiro di Rhind

- E’ il più grande documento egizio di Matematica. Noto anche come papiro di Ahmes, dal nome dello scriba che lo trascrisse. Risale al 1650 a.C.
- Pare che questo documento (30cm x 5,46 m) fosse un testo di carattere didattico orientato alle applicazioni pratiche.
- Contiene le soluzioni di 85 problemi matematici ricorrenti nella vita quotidiana degli uomini di affari, degli agrimensori e dei costruttori.
- I problemi sono di carattere **aritmetico, algebrico e geometrico** ma mancano completamente le dimostrazioni

## I gatti di Ahems

In un angolo del papiro, in mezzo a tanti calcoli seri, Ahmes trova lo spazio per scrivere un gioco, conosciuto come il problema 79 del papiro di Rhind.

***In una proprietà ci sono 7 case.***
***In ogni casa ci sono 7 gatti.***
***Ogni gatto acchiappa 7 topi.***
***Ogni topo mangia 7 spighe.***
***Ogni spiga dà 7 heqat di grano.***
***Quante cose ci sono in tutto in questa storia?***

*Nota: l'heqat era misura di capacità pari a circa 4,785 litri.*

## I gatti di Ahems

| | | | |
|---|---|---|---|
| *case* | *7* | | |
| *gatti* | *49* | | |
| *topi* | *343* | *1* | *2801* |
| *spighe di grano* | *2301* | *2* | *5602* |
| *misure di grano* | *16807* | *4* | *11204* |
| ***totale*** | ***19607*** | | ***19607*** |

Il problema è  l'unico "inutile" della raccolta ovvero senza una soluzione pratica. Viene proposto nel papiro non perché interessi la risposta particolare, **quanto il procedimento con cui si arriva a determinarne la risposta.**

**SUL PAPIRO COMPARE LA SEGUENTE TABELLA. SAI INTEPRETARLA?**

# I gatti di Ahems e la moltiplicazione egizia

| | |
|---|---|
| **1** | **2801** |
| **2** | 5602 |
| **4** | 11204 |
| **totale** | 19607 |

Per arrivare alla soluzione devi sommare

(7 +…+.....+…..+…....)

Tale somma, utilizzando la proprietà…...................................

si può scrivere

7 ·(…....+…..+.......+……+…....)

Quindi  bisogna moltiplicare

7 · …….

## Perché il numero 7?

*Thot, il dio che insegnò agli uomini la scrittura, la magia e la scienza.*

Il numero 7 era considerato sacro dagli Egizi che vi fondarono gli elementi di tutte le scienze e molte delle sue proprietà risalgono addirittura all'astrologia babilonese che riconosceva solo 7 pianeti e divideva il mese lunare in cicli di 7 giorni (da cui deriva l'origine della nostra settimana). Il numero 7 rappresentava quindi, in quel tempo, il cosmo e la sua perfezione e che nella cosmologia degli antichi Egizi corrispondeva esotericamente alla vita eterna.

# MOLTIPLICAZIONE EGIZIA

Per eseguire moltiplicazioni (ed anche le divisioni) usavano un procedimento basato su raddoppi successivi: cioè moltiplicavano (o dividevano) innanzitutto per 2! Era quasi più facile del metodo che usiamo noi!
Uno dei grandi meriti di questa tecnica è il fatto di richiedere solamente una conoscenza preliminare dell'addizione e della tabellina del 2.

**ESEMPIO: Moltiplicare 17 per 13:**

**Innanzi tutto si deve decidere quale dei due numeri è il moltiplicando. Generalmente si considera tale il numero più piccolo ma è solo una convenzione. (in questo caso 13)**
**Lo scriba avrebbe proceduto per moltiplicazioni successive di 13 x 2 (cioè continuando a raddoppiare tutti i risultati) e si sarebbe fermato prima di arrivare ad un numero che superasse il moltiplicatore 17. Così:**

| 1 | 13 |
|---|---|
| 2 | 26 |
| 4 | 52 |
| 8 | 104 |
| 16 | 208 |

**Poi si scelgono le righe contrassegnate da * che hanno per somma 17, e si sommano i multipli di destra (* *) :**

**Non sei convinto? Prendi la calcolatrice e verificherai che 13 x 17 = 221 !**

| * | 1 | 13 | * * |
|---|---|---|---|
| | 2 | 26 | |
| | 4 | 52 | |
| | 8 | 104 | |
| * | 16 | 208 | * * |
| | 17 | 221 | |

# DIVISIONE EGIZIA

La divisione segue un procedimento analogo a quello visto per la moltiplicazione. Infatti, nell'aritmetica egizia, queste due operazioni sono strettamente collegate. Nel papiro di Rhind, una divisione del tipo $x : y$ è preceduta dalle parole "fare calcoli con $y$ per ottenere $x$". Quindi uno scriba, invece di pensare di dividere $x$ per $y$, si sarebbe chiesto:

**Partendo da *y*, quante volte dovrei addizionare questo numero a se stesso per ottenere *x*?**

**ESEMPIO n.1: Dividere 696 per 29:**

**Consideriamo i raddoppi di 29**

| | | | |
|---|---|---|---|
| | **1** | **29** | |
| | 2 | 58 | |
| | 4 | 116 | |
| * * | 8 | 232 | * |
| * * | 16 | 464 | * |

| | |
|---|---|
| **24** | **696** |

**Ci siamo fermati al 16 perché il raddoppiamento ci avrebbe portati oltre al 696 ( infatti 32 x 29 = 928).**

**Osserviamo che la somma degli ultimi due termini (indicati con *) dà esattamente 696; considerando il lato sinistro, vediamo che ciò corrisponde a prendere esattamente 24 (= 8+16) volte il 29. Quindi:**

**696 : 29 = 24.**

**ESEMPIO n.2: Dividere 700 per 29:**

**Consideriamo i raddoppi di 29**

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 1 | 29 | |
| | 2 | 58 | |
| | 4 | 116 | |
| * * | 8 | 232 | * |
| * * | 16 | 464 | * |

| | |
|---|---|
| 24 | 696 |

**Qui la somma degli ultimi due termini (indicati con *) non dà 700, ma è il valore più grande che possiamo considerare sommando termini a destra senza superare il 700.**

**Dalla somma otteniamo 696; e 700 - 696=4.**

**Quindi:**

**696 : 29 = 24 , con il resto di 4 .**

Quando uno scriba si trovava di fronte al problema di non essere capace di ottenere nessuna combinazione di numeri nella colonna di destra per arrivare esattamente al valore del dividendo, la divisione aveva un resto. Per ottenere un risultato migliore si dovevano introdurre le frazioni. Ancora una volta, il modo con il quale gli egizi affrontarono il problema fu ingegnoso. . . .

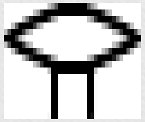
# LA FRAZIONE EGIZIA

Gli egizi sono stati fra i primi popoli ad aver utilizzato la nozione di frazione, da essi sempre usata con numeratore uguale ad uno (frazioni unitarie). Il fatto di operare con frazioni unitarie è una caratteristica singolare della matematica egizia. Per questo motivo una frazione scritta coma somma di distinte frazioni unitarie è chiamata FRAZIONE EGIZIA.

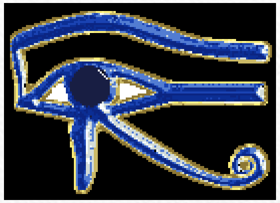
Nel Papiro di Rhind sono magistralmente esposte le regole per il calcolo delle frazioni unitarie, con cui essi avevano risolto il problema dell'espressione di parti decimali di un numero non intero.

Le iscrizioni geroglifiche egiziane presentano una notazione speciale per le frazioni aventi come numeratore l'unità. Il reciproco di un qualsiasi intero veniva indicato collocando al di sopra del segno indicante il numero, un ovale allungato.

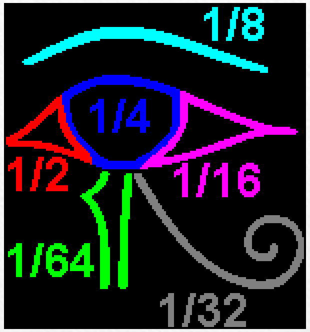
Un esempio di frazioni in geroglifico è:



**(l'equivalente del nostro 1/2).**



# L'occhio di Horus




Una leggenda egiziana diceva che "Seth aveva strappato a Horus l'occhio sinistro e glielo aveva ridotto in pezzi, ma Thot riuscì a ricomporlo".

Gli antichi egizi usavano le parti del simbolo dell'Occhio di Horus per descrivere le frazioni.

*Un occhio intero rappresentava l'unità, ma.....non avete notato nulla di strano?*
*Se provate a sommare tutti i pezzi, vedrete che si ottiene 63/64 e non 64/64!*
*Manca all'appello 1/64!*
*Anche in questo caso, però, gli egiziani ci hanno dato una spiegazione: " l'1/64 mancante sarebbe comparso grazie a una magia di Thot."*
*Tutto ciò esprime (in maniera certo molto suggestiva) che in generale nell'eseguire una divisione non importava andare oltre la approssimazione del risultato esatto per 1/64.*

Le frazioni ci permettono di risolvere il problema del resto in una divisione. In certi problemi, infatti, anche allora, poteva essere richiesto un risultato esatto o, in ogni caso, un'approssimazione molto precisa.
Vediamo ora un esempio di divisione , tratta dal Papiro di Rhind, che utilizza le frazioni:

Dividiamo 35 per 8:

| | 1 | 8 |
|---|---|---|
| | 2 | 16 |
| * | 4 | 32 |
| | 1/2 | 4 |
| * | 1/4 | 2 |
| * | 1/8 | 1 |

| | |
|---|---|
| 4+1/4+1/8 | 35 |

Come si vede, oltre ai "raddoppi" dell'8, si riportano anche i suoi "dimezzamenti", e si utilizzano anch'essi per ottenere la somma 35 (a destra), mentre a sinistra si ottiene il risultato, la cui parte frazionaria è espressa tramite le frazioni del tipo 1/2n. Quindi:

**35 : 8 = 4 + 1/4 + 1/8** **(in decimali = 4,375**) .

# Sistema di numerazione romano

Praticamente tutte le civiltà che si svilupparono nel bacino del Mediterraneo (Greci, Fenici, Ebrei ...) usarono notazioni additive in base 10 (con simboli diversi).

I Romani non fanno eccezione: le **cifre romane** sono anch'esse additive in base dieci (con base ausiliare 5).

I Romani erano (in origine) un popolo di pastori, e il conteggio delle pecore avveniva con l'intaglio di tacche su bastoni: per facilitare la lettura, ogni cinque tacche si faceva una tacca a forma di "V", ed ogni dieci una "X"; poi altre forme vennero introdotte per "50", "100" e così via.

| I | V | X | L | C | D | M |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 10 | 50 | 100 | 500 | 1000 |

**Esempio:**

27 = **XXVII** , 97 = **XCVII** , 588 = **DLXXXVIII**, 1939 = **MCMXXXIX**

Nel sistema di numerazione romano c'è una novità: la ***notazione sottrattiva***, che viene usata per indicare il quattro ed il nove (e similmente quaranta, novanta, novecento...)

**IV = 4 ; IX = 9 ; XIX = 19 ; XL=40 ; XC= 90, CM = 900**

La notazione sottrattiva è un residuo della pratica dell'intaglio vista sopra; la scrittura " **IV** " invece di "**IIII**" ricorda la posizione del quattro nella serie: " **IIIIV** ", come il nove si rappresenta "**IX**" dalla serie**: IIIIVIIIIX**

Per rappresentare numeri più alti il sistema romano impone di creare nuovi simboli per le potenze di dieci (per il 10.000, 100.000, ecc...) e le loro metà (5.000, 50.000,...); dall'età imperiale si trova l'uso di porre una barra sopra un simbolo per moltiplicarlo per mille e di racchiuderlo in un rettangolo aperto inferiormente per moltiplicarlo per 100.000.

| | |
|---|---|
| $\overline{V}$ | 5.000 |
| $\overline{X}$ | 10.000 |
| $\overline{L}$ | 50.000 |
| $\overline{C}$ | 100.000 |
| $\overline{D}$ | 500.000 |
| $\overline{M}$ | 1.000.000 |

| |
|---|
| $\boxed{V}$ = 500.000 |
| $\boxed{X}$ = 1.000.000 |
| $\boxed{L}$ = 5.000.000 |
| $\boxed{C}$ = 10.000.000 |
| $\boxed{D}$ = 50.000.000 |
| $\boxed{M}$ = 100.000.000 |

# Sistema di numerazione maya

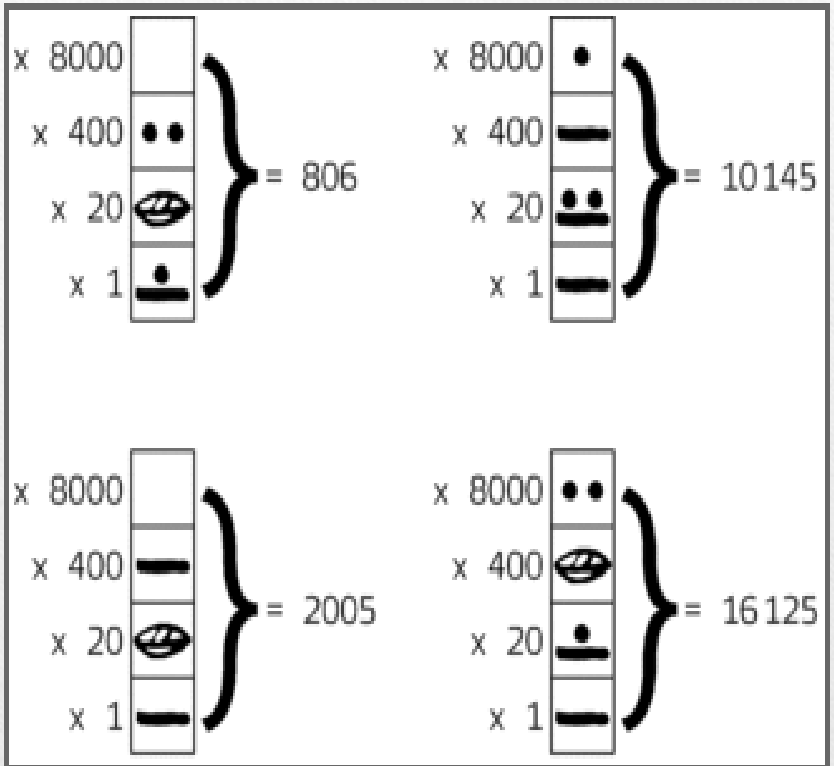
Il sistema di numerazione usato dai maya(uno dei popoli più evoluti dell'America precolombiana) era vigesimale, posizionale e comprendeva l'uso dello zero (il cui simbolo era una conchiglia vuota).

E' importante sottolineare che i maya usavano lo zero centinaia di anni prima che fosse in uso in India. Quando gli europei arrivarono in America, essi trovarono che l'abaco era in uso sia in Messico che in Perù.

| Numero | Forma verticale | Forma orizzontale | Numero | Forma verticale | Forma orizzontale |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | 10 | | |
| 1 | | | 11 | | |
| 2 | | | 12 | | |
| 3 | | | 13 | | |
| 4 | | | 14 | | |
| 5 | | | 15 | | |
| 6 | | | 16 | | |
| 7 | | | 17 | | |
| 8 | | | 18 | | |
| 9 | | | 19 | | |

Per i più curiosi….

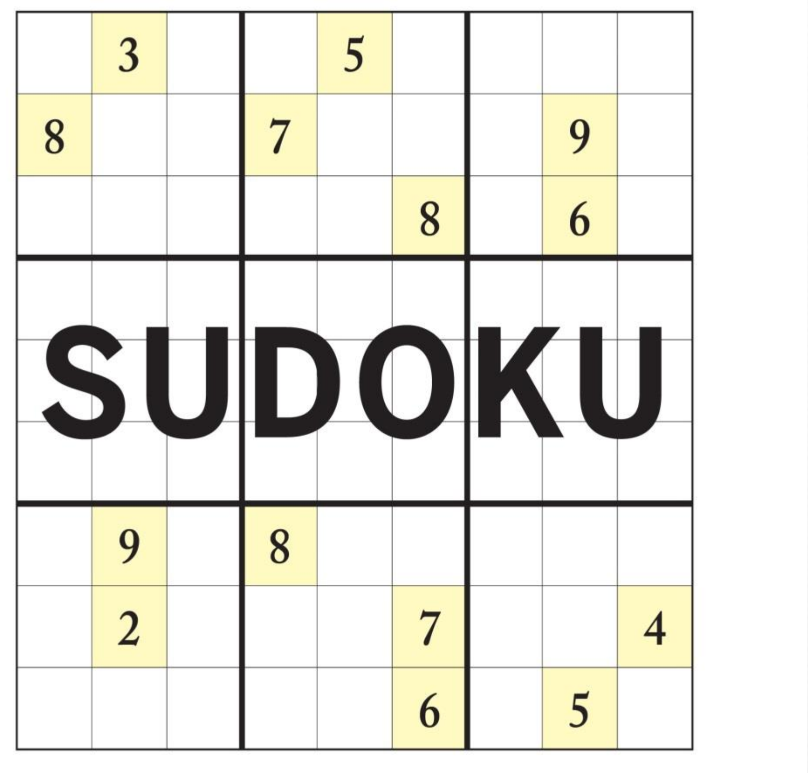
i maya rappresentavano i numeri dall'alto verso il basso



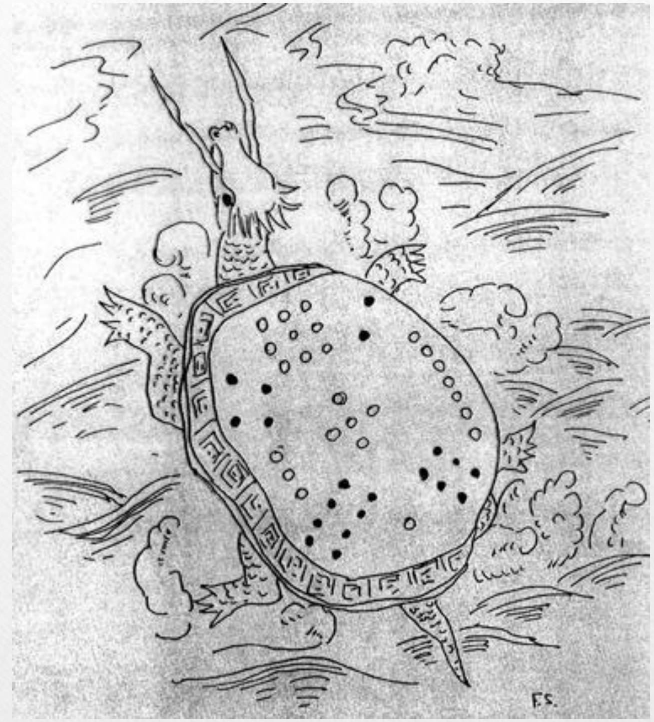
Questi quattro esempi mostrano come il valore di numeri Maya può essere calcolato

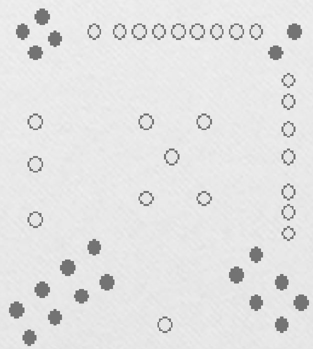
# Giochi moderni o antichi?

**Il Sudoku** ("Su" significa numero e "Doku significa solitario) è un gioco di logica.
<u>**Scopo del gioco**</u>: riempire tutte le caselle bianche in modo che in ogni riga, in ogni colonna, in ogni sottogriglia ci siano tutte le cifre da 1 a 9 senza ripetizioni.
Ci sono 6.670.903.752.021.072.936.960 schemi possibili!



Gli antenati del sudoku sono i **“quadrati magici” noti in Cina** 3000 anni prima di Cristo.
La leggenda narra di un pescatore che trovò lungo le rive di un affluente del fiume Giallo una tartaruga che portava incisi sul dorso degli strani segni geometrici che i matematici presenti a corte interpretarono come un quadrato di numeri con somma costante 15 su ogni riga, colonna o diagonale.
Questo schema di nove numeri diventò uno dei simboli sacri della Cina.





| | | |
|---|---|---|
| 4 | 9 | 2 |
| 3 | 5 | 7 |
| 8 | 1 | 6 |

Altro antico antenato del sudoku è il ***quadrato latino*** uno schema noto già nel Medioevo ripreso poi ed approfondito nel XVIII secolo dal matematico svizzero Leonhard Euler (Eulero). Si tratta di una griglia quadrata di n x n caselle nella quale compaiono n simboli diversi. In ogni riga e in ogni colonna ogni singolo simbolo deve comparire una sola volta.


| | | |
|---|---|---|
| a | b | c |
| b | c | a |
| c | a | b |

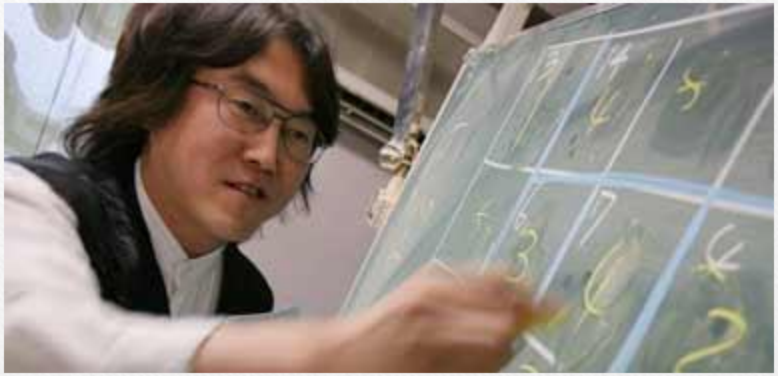
| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 2 | 1 | 4 | 3 |
| 4 | 3 | 1 | 2 |
| 3 | 4 | 2 | 1 |

**<u>Attività</u>**: completa il quadrato 8x8 (pubblicato nel 1767) costruito da **Benjamin Franklin** (inventore del parafulmine).
La somma costante di ogni riga e colonna è 260 e ancora la somma su ogni mezza riga o ogni mezza colonna è 130. I numeri che devi usare vanno da 1 a 64 e li puoi scrivere una sola volta

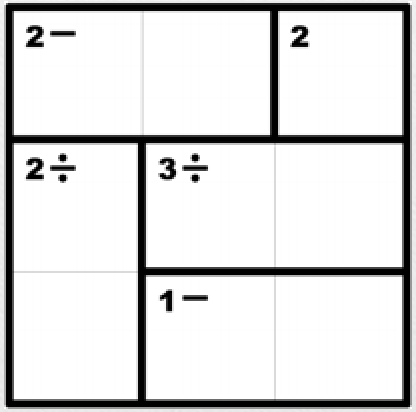
| 52 | 61 | 4 | 13 | 20 | 29 | 36 | 45 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 14 | 3 | | | | | 30 | 19 |
| 53 | | 5 | | | 28 | | 44 |
| 11 | | | 54 | 43 | | | 22 |
| 55 | | | 10 | 23 | | | 42 |
| 9 | | 57 | | | 40 | | 24 |
| 50 | 63 | | | | | 34 | 47 |
| 16 | 1 | 64 | 49 | 48 | 33 | 32 | 17 |

**Il KenKen** (che significa «intelligenza al quadrato» si gioca su schemi quadrati di 3x3, 4x4, 5x5 o 6x6 caselle. La regola è che in ogni riga e colonna devono trovare posto i numeri da 1 a 3 per lo schema 3 x 3 e così via. Su alcune caselle è riportato un numero con un segno di operazione. Applicando l'operazione bisogna ricavare il numero corrispondente.

<u>**Attività:** completa il Kenken</u>



*Tetsuya Miyamoto, inventore del KenKen*



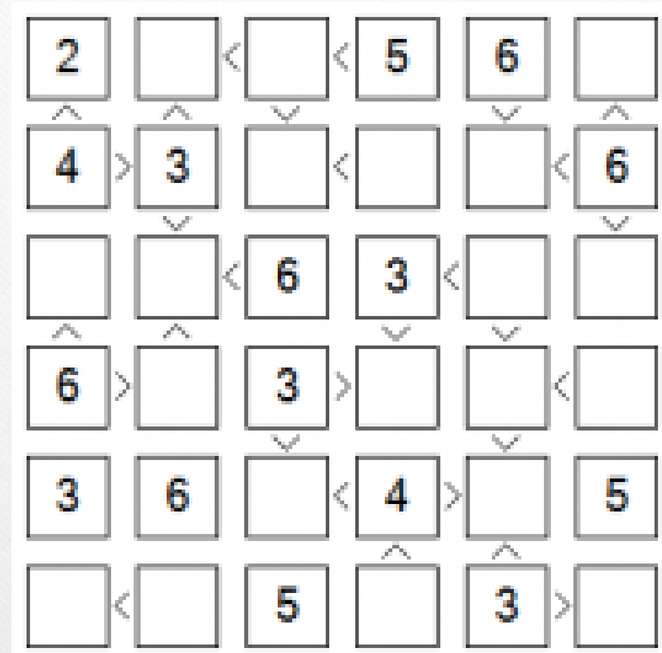
**Il Futoshiki** è un gioco matematico giapponese che significa «diseguale» e si basa sulle seguenti regole:

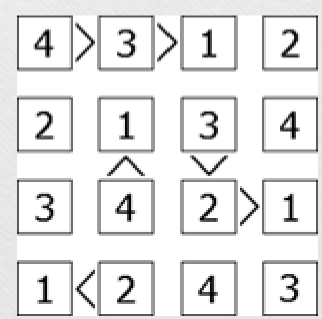
1) si gioca su una griglia quadrata 3 x 3

2) si inseriscono i numeri in modo che ciascun numero sia presente una ed una sola volta in ciascuna riga e in ciascuna colonna

3) i numeri inseriti devono concordare con i simboli > e < posti tra celle contigue anche in verticale

<u>**Attività:** completa il Futoshiki</u>



**Sitografia**:

http://digilander.libero.it/scienza_in_gioco/La%20storia%20dei%20numeri.htm

http://areeweb.polito.it/didattica/polymath/htmlS/Interventi/Articoli/AvventuraCubi/AvventuraCubi.htm

**Bibliografia:**

Odifreddi, Il museo dei numeri