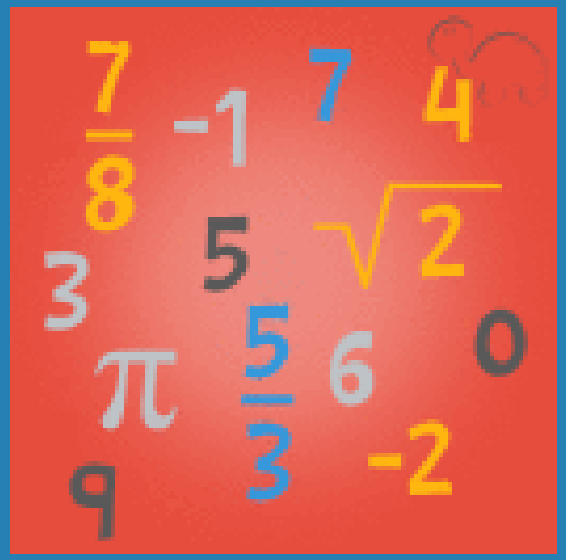
Gli insiemi numerici

QUANDO REALTÀ E IMMAGINARIO SI INCONTRANO E ….CREANO EMOZIONI

Liceo classico e linguistico Tito Lucrezio Caro-Roma

Prof.sse Erminia Izzo e Francesca Ruzzi

Tanti numeri…



L'esigenza di contare e quantificare è presente nella vita quotidiana sin dalle origini dell'umanità: il concetto di numero ha sempre accompagnato l'uomo durante la sua evoluzione. Le proprietà, le notazioni e i risultati che incontreremo sono frutto del lavoro di studiosi nel corso dei secoli.

«Dio ha creato i numeri interi, tutto il resto è opera dell'uomo.»

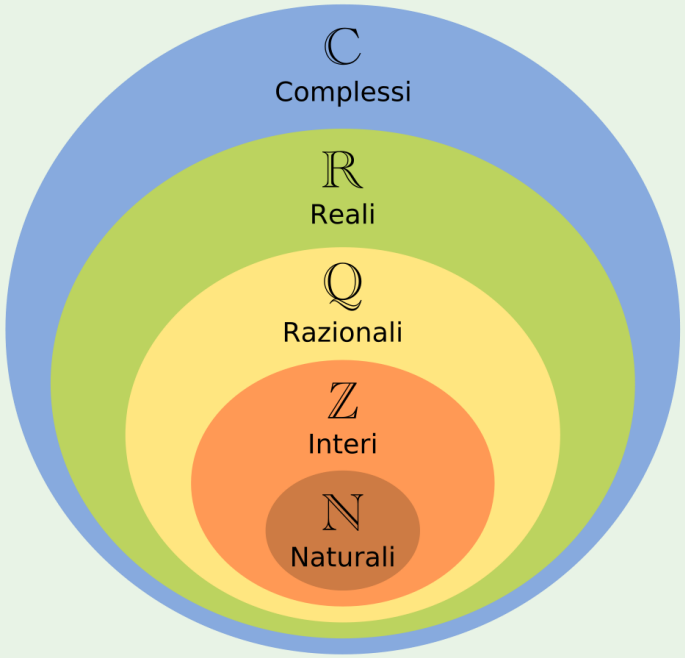
(Leopold Kronecker 1823-1891)

In questa celebre frase è contenuta l'idea che i numeri naturali sono un concetto primitivo, in un certo senso innato nell'uomo. In realtà il significato della affermazione di Kronecker è un po' più complesso: si intende che i numeri naturali sono posti come assiomi, mentre gli altri insiemi numerici vengono costruiti a partire da questi.

L'insieme **N** come generatore degli altri insiemi numerici

Abbiamo detto che i vari insiemi numerici sono ottenuti considerando come inizio l'insieme **N** dei numeri naturali ed applicando successivi ampliamenti: così abbiamo

N → Z → Q → R → C



2 → +2 → 2/1 → 2,0000.. → 2,0000.. + i 0

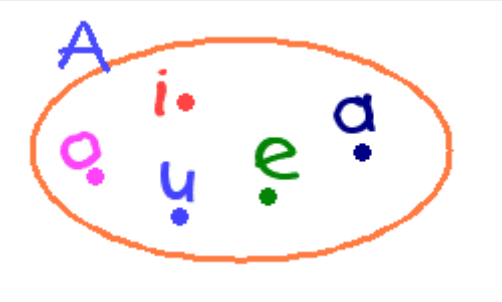
lo stesso numero è scritto in modo diverso nei diversi insiemi

Quello che interessa in questa breve trattazione non è tanto la natura o il modo di introdurre i vari insiemi numerici, quanto alcune delle loro proprietà e precisamente:

- **Le operazioni introdotte e le rispettive proprietà**
- **La possibilità di risolvere certe equazioni** come conseguenza delle proprietà delle operazioni, **e l'impossibilità di risolverne altre**
- **La cardinalità**
- **L'ordinamento**

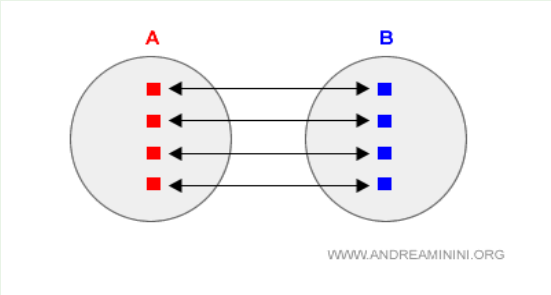
La cardinalità di un insieme

La cardinalità di un insieme finito è il <u>numero</u> di oggetti presenti nell'insieme.
L'insieme A delle vocali dell'alfabeto ha **<u>cardinalità</u>** $|A| = 5$



Gli elementi di un insieme finito si possono contare!

Due insiemi A e B sono **<u>equipotenti</u>** se è possibile stabilire una corrispondenza biunivoca tra A e B. In tal caso diciamo che **<u>gli insiemi hanno la stessa cardinalità</u>**.



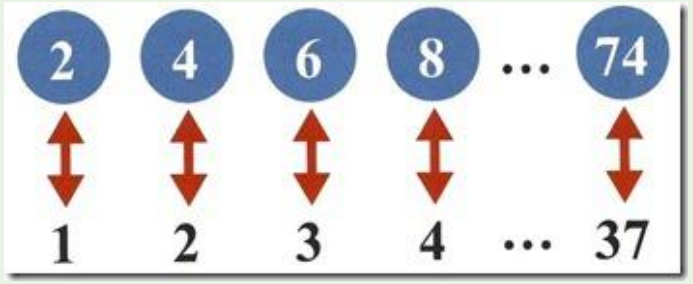
Cos'è un insieme infinito?

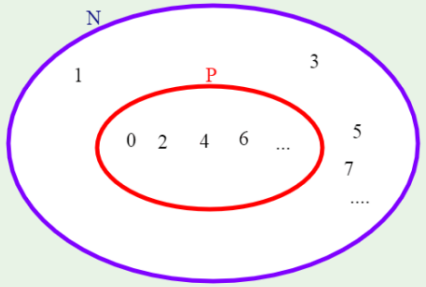
Perché l'insieme N è infinito?

Intuitivamente un insieme infinito è un insieme che NON contiene un numero FINITO di elementi.

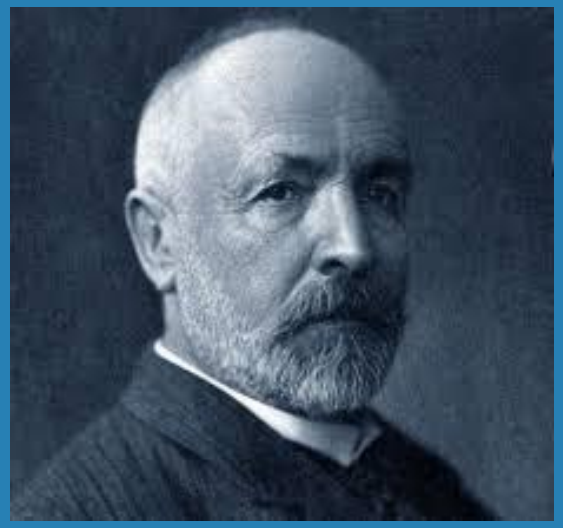
Più rigorosamente, si dice che un insieme è infinito se può essere messo in corrispondenza biunivoca con un suo sottoinsieme.

Ad esempio,
l'insieme dei numeri naturali $\mathrm{N} = \{0,1,2,3,..n,...\}$
può esser messo in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei numeri pari $\mathrm{P} = \{0,2,4,..2n,...\}$ che è un suo sottoinsieme





Il problema dell'infinito è antico.



Georg Cantor
(1848-1915)

Già i filosofi greci si interrogavano sulla questione dell'infinito:
Aristotele sosteneva che non esistesse l'infinito attuale ma solo l'infinito potenziale.

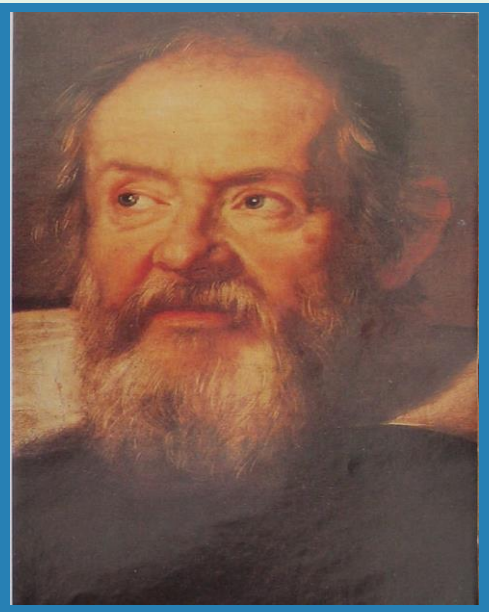
Per secoli i matematici hanno trattato il problema dell'infinito con una certa «cautela» senza creare una «teoria dell'infinito».

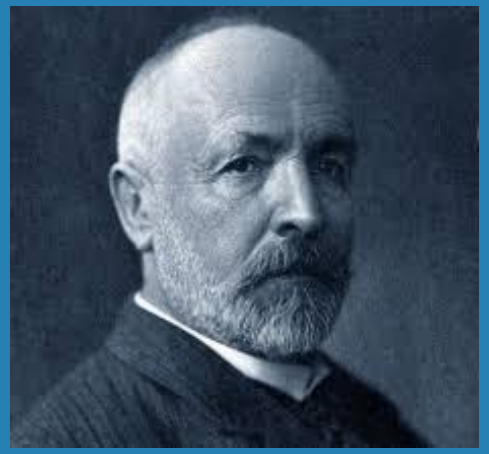
Nell' ottocento, secolo ricco di matematica e grandi matematici, nascono teorie riguardanti l'infinito.

Cantor riesce a congegnare una classificazione degli infiniti, una vera e propria aritmetica dell'infinito.

GLI INFINITI NON SONO TUTTI UGUALI: i numeri naturali sono tanti quanti i numeri razionali (possiamo contare i razionali)

I numeri della retta invece, ovvero i numeri reali non si possono contare.





Assiomi di Euclide:

1) Cose uguali ad una stessa cosa sono uguali tra loro
2) Se a cose uguali si aggiungono o sottraggono cose uguali si ottengono risultati uguali
3) Cose che coincidono l'una a l'altra sono uguali l'una all'altra
4) **L'intero è maggiore della parte**

Il quarto assioma risulta vero solo se l'insieme è finito. Non è così invece per gli insiemi infiniti come nel caso di N che può essere messo in corrispondenza biunivoca con dei suoi sottoinsiemi

I numeri naturali

N = {0; 1; 2; 3; 4; …}

- Sono i numeri "che si usano per contare"
- È un insieme infinito (ogni numero naturale ha un successivo)
- È un insieme ordinato, cioè è possibile introdurre una relazione d'ordine (<)
- In questo insieme sono interne due operazioni:
  Addizione
  Moltiplicazione (ed elevamento a potenza)

  Equivalentemente si dice che l'insieme N è chiuso rispetto all'addizione e alla moltiplicazione.
- Le operazione di somma e prodotto godono delle seguenti proprietà:
  Associativa.
  Esistenza dell'elemento neutro (rispettivamente 0 ed 1)
  Commutativa.
- Le proprietà indicate delle operazioni di somma e prodotto consentono, in N, di risolvere equazioni di primo grado del tipo $x+1=2$, o $2x=4$, ma non equazioni del tipo $x+3=2$, o $2x=3$.

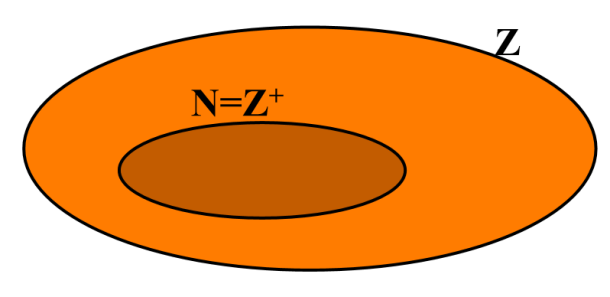
Perché non accontentarsi di N ?

Questo insieme numerico non è sufficiente per gli scopi della matematica, sostanzialmente per il fatto che le operazioni di somma e prodotto non godono della proprietà dell'esistenza del simmetrico. Questo impedisce di risolvere equazioni come quelle sopra riportate.

Per fronteggiare questa situazione si procede per gradi, introducendo innanzitutto l'insieme **Z** degli **<u>interi</u>**

I numeri interi

$$Z = \{0; +1; -1; +2; -2; \ldots\}$$



- È un insieme infinito
- Contiene:

  Numeri negativi

  Zero

  Numeri positivi

  Identificando i numeri positivi con quelli naturali (considerando Z+=N), possiamo dire che N è un sottoinsieme di Z.
- In questo insieme sono interne tre operazioni:

  Addizione e sottrazione

  Moltiplicazione (ed elevamento a potenza)

  Equivalentemente si dice che l'insieme Z è chiuso rispetto all'addizione, alla sottrazione e alla moltiplicazione.
- Le operazioni di addizione e moltiplicazione godono delle seguenti proprietà:

  Associativa.

  Esistenza dell'elemento neutro (rispettivamente 0 ed 1)

  Commutativa.

  Esistenza dell'elemento simmetrico rispetto all' addizione
- Per quanto riguarda la risolubilità delle equazioni è chiaro che, ora, una qualunque equazione del tipo $x + a = b$ sarà risolubile.

I numeri interi

Il passaggio dall'insieme dei naturali a quello degli interi produce un notevole salto in termini di qualità:
esiste il simmetrico di ogni elemento rispetto alla somma, mentre conserva quasi le stesse caratteristiche dei naturali nei riguardi del prodotto.

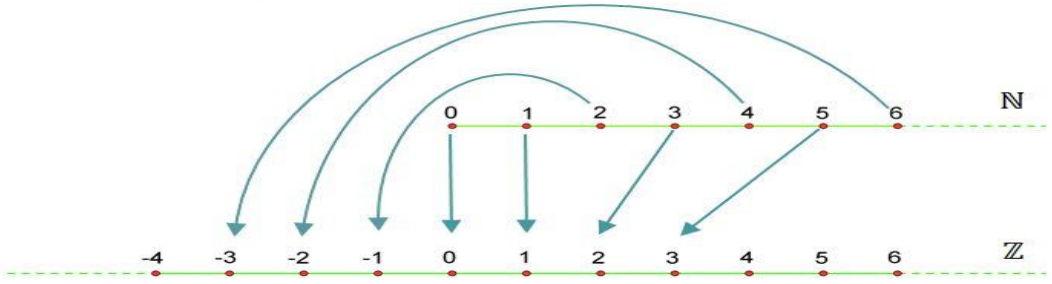
I numeri interi

Il passaggio da N a Z non produce nessun aumento in termini di cardinalità (cioè di quantità).

E' possibile provare che gli interi e i naturali sono equipotenti: il cardinale rimane ancora $\aleph_0$

costruendo la corrispondenza biunivoca tra i naturali e gli interi che associa ad ogni naturale pari un intero negativo e ad ogni naturale dispari un intero positivo.

... anche $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ hanno la stessa cardinalità!



$$f(n) = \begin{cases} -\frac{n}{2} & \text{se } n \text{ è pari} \\ \frac{n+1}{2} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

... potrebbe venire il sospetto che tutti gli insiemi infiniti abbiano la stessa cardinalità, ma non è così!

Domande di questo genere se le poneva anche Cantor, arrivando spesso a risposte inattese!

Perché non accontentarsi di Z ?

La successiva estensione è motivata da esigenze analoghe a quelle viste a proposito dell'insieme Z:

- rendere totale l'operazione di divisione (con l'eccezione del divisore nullo); in altre parole si tratta di trovare un ambiente nel quale tutte le equazioni del tipo $x*b = a$ (con $b \neq 0$) ammettano soluzione
- superare l'inadeguatezza dei numeri interi nel misurare le grandezze
- stabilire una corrispondenza biunivoca fra numeri e punti sulla retta (*come fra due punti distinti di una retta ce n'è sempre un altro, così è ragionevole cercare un insieme di numeri in cui l'ordine risulti denso*)

Il secondo passo nell'ampliamento del nostro insieme numerico costituisce quindi nel costruire un insieme in cui anche il prodotto goda della proprietà dell'esistenza del simmetrico: si otterrà l'insieme **Q** dei **razionali**

I numeri razionali

Ampliamo l'insieme Z in modo che si possano svolgere anche tutte (quasi) le divisioni. • L'insieme Z si può "ampliare" aggiungendo le frazioni. • Nasce così l'insieme Q dei numeri razionali.

Q = {a/b : a, b sono numeri interi, b è diverso da 0}

- È l'insieme dei numeri razionali (ratio = rapporto)
- Q è un insieme infinito, che ha Z come sottoinsieme
- Q è chiuso rispetto alle operazioni: – Addizione e sottrazione – Moltiplicazione (ed elevamento a potenza) e divisione*
- Le operazioni di addizione e moltiplicazione godono delle seguenti proprietà:

  Associativa.

  Esistenza dell'elemento neutro (rispettivamente 0 ed 1)

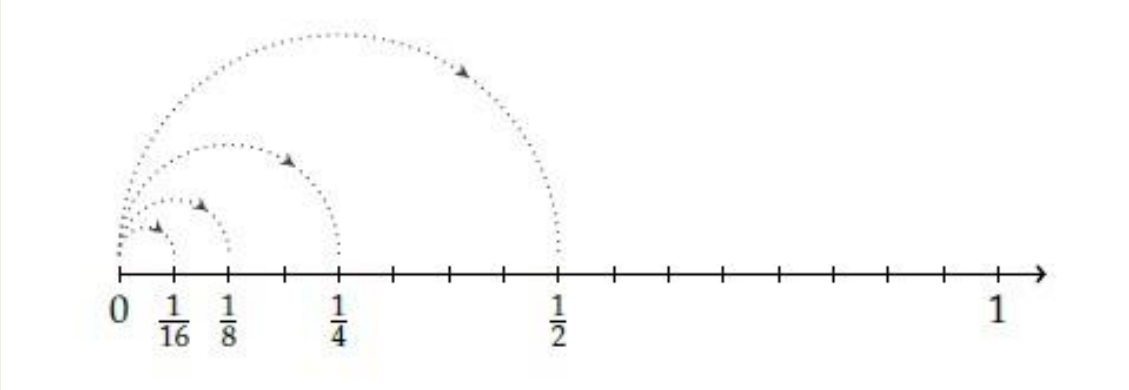
  Commutativa.

  Esistenza dell'elemento simmetrico rispetto all' addizione e alla moltiplicazione
- Tutte le equazioni del tipo $x*b = a$ (con $b \neq 0$) ammettono soluzione.

I numeri razionali

Il passaggio da **Z** a **Q** comporta un notevole miglioramento in termini di qualità rispetto alle operazioni che si possono eseguire ed alle equazioni che si possono risolvere

L'insieme di numeri ora introdotto ha poi una nuova ed interessante proprietà relativamente all'ordine. Infatti è immediato che tra due numeri razionali qualunque esiste sempre un altro numero razionale (anzi ne esistono infiniti…): se i due numeri sono a e b basta prendere, per esempio, (a+b)/2. Si dice che i numeri razionali sono densi in sé.

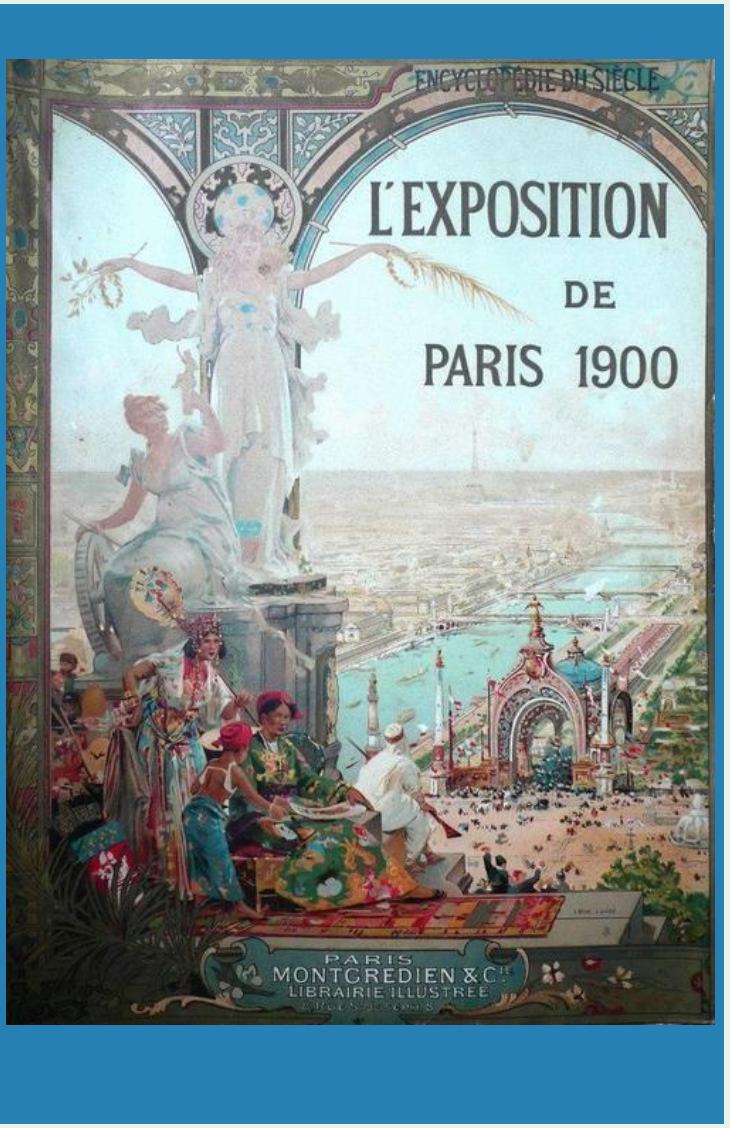


I numeri razionali

Nonostante Q sia un insieme denso la sua cardinalità rimane ancora straordinariamente $\aleph_0$.

La dimostrazione che Q possa essere messo in corrispondenza biunivoca con Z non è così immediata come nel caso della corrispondenza tra Z ed N

Parigi, agosto 1900 - Esposizione Universale - 50 milioni di visitatori paganti!



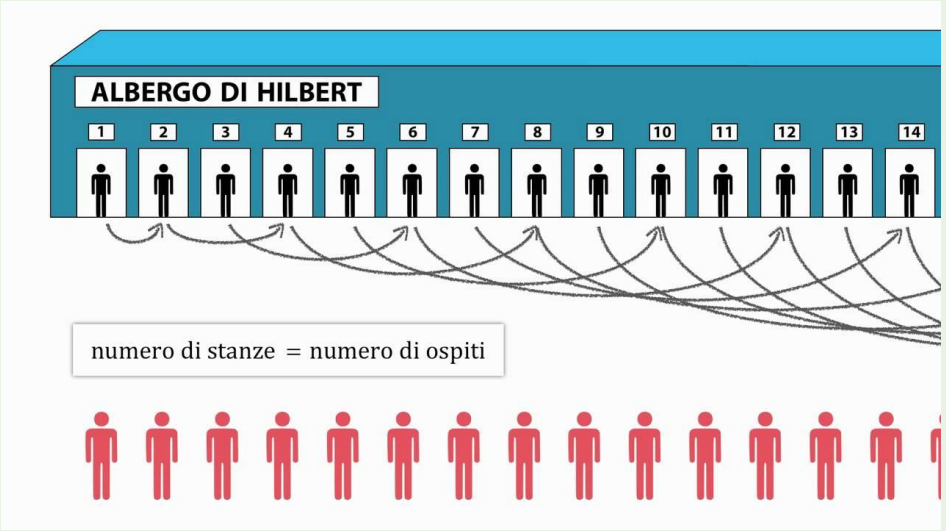
David Hilbert sul palco del Palazzo dei Congressi fa un elenco di 10 problemi su temi matematici da lasciare al secolo entrante.

Primo problema di Hilbert:

Quanti punti ci sono su una retta?
Infiniti?
Certo! Ma che tipo di infinito?

Paradosso del Grand Hotel di Hilbert

Il paradosso del Grand Hotel è un celebre paradosso inventato dal matematico David Hilbert per mostrare alcune caratteristiche del concetto di infinito, e le differenze fra operazioni con insiemi finiti ed infiniti.



Hilbert immagina un hotel con infinite stanze, tutte occupate, ed afferma che qualsiasi sia il numero di altri ospiti che sopraggiungano, sarà sempre possibile ospitarli tutti, anche se il loro numero è infinito.

Paradosso del Grand Hotel di Hilbert

L'albergo di Hilbert
https://www.youtube.com/watch?v=6viQhyqjhJg

Nel caso semplice, arriva un singolo nuovo ospite. Il furbo albergatore sposterà tutti i clienti nella camera successiva (l'ospite della 1 alla 2, quello della 2 alla 3, etc.); in questo modo, benché l'albergo fosse pieno è comunque, essendo infinito, possibile sistemare il nuovo ospite.

$$\infty + 1 = \infty$$
$$\infty + n = \infty$$

Un caso meno intuitivo si ha quando arrivano infiniti nuovi ospiti. La soluzione sta nello spostare ogni ospite nella stanza con numero doppio rispetto a quello attuale (dalla 1 alla 2, dalla 2 alla 4,etc.), lasciando ai nuovi ospiti tutte le camere con i numeri dispari, che sono essi stessi infiniti, risolvendo dunque il problema. Gli ospiti sono tutti dunque sistemati, benché l'albergo fosse pieno.

$$\infty + \infty = \infty$$

Paradosso del Grand Hotel di Hilbert

L’albergo di Hilbert
https://www.youtube.com/watch?v=6viQhyqjhJg

Ancora più difficile: ci sono infiniti alberghi con infinite stanze tutti al completo.
Tutti gli alberghi chiudono, tranne uno. Tutti gli ospiti vogliono alloggiare nell'unico albergo rimasto aperto.
Una possibilità è di assegnare ad ogni persona una coppia di numeri (n,m) in cui n indica l'albergo di provenienza, e m la relativa stanza. Gli ospiti sono quindi etichettati in questo modo:

$$\infty + \infty + \infty + \cdots = \infty$$

1/1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	1/7	1/8	⋯
2/1	2/2	2/3	2/4	2/5	2/6	2/7	2/8	⋯
3/1	3/2	3/3	3/4	3/5	3/6	3/7	3/8	⋯
4/1	4/2	4/3	4/4	4/5	4/6	4/7	4/8	⋯
5/1	5/2	5/3	5/4	5/5	5/6	5/7	5/8	⋯
6/1	6/2	6/3	6/4	6/5	6/6	6/7	6/8	⋯
7/1	7/2	7/3	7/4	7/5	7/6	7/7	7/8	⋯
8/1	8/2	8/3	8/4	8/5	8/6	8/7	8/8	⋯
⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯

Paradosso del Grand Hotel di Hilbert

Questo paradosso, nonostante sia piuttosto elementare, ha contribuito a far comprendere la differenza profonda e sostanziale tra gli insiemi finiti e infiniti, aprendo le porte a gran parte delle moderne branche dell'aritmetica

Esistono alcuni racconti, testi teatrali che ripropongono una versione narrativa del paradosso.
«L'hotel straordinario» di Stanislaw Lem
«L'infinito» di John David Barrow
Infinities di Luca Ronconi
https://www.youtube.com/watch?v=f7eWDEOX5XQ

Perché non accontentarsi di Q ?

Dal punto di vista della struttura algebrica e quindi della risolubilità delle equazioni (di primo grado) che abbiamo considerato, l'insieme dei razionali è perfettamente soddisfacente. Che motivo c'è allora di complicarsi ulteriormente la vita? La comprensione della "lacunosità" di questo insieme è, storicamente, legata alla scoperta del famoso teorema da parte della scuola di Pitagora: se un triangolo rettangolo ha i cateti uguali ad uno, quanto è lunga la sua ipotenusa?. Detto in altri termini: se ho un quadrato di lato 1, e quindi di area 1, quanto dovrà essere il lato di un quadrato che ha area doppia?

Usando il linguaggio delle equazioni questo problema è equivalente a quello di risolvere l'equazione $x^2 = 2$.

Tutto questo porta alla costruzione dell'insieme **R** dei **<u>reali</u>**

Perché non accontentarsi di Q ?

Il passaggio dai numeri razionali all'insieme R dei numeri reali è suggerito da varie esigenze.

- Da un punto di vista algebrico si tratta di trovare un insieme in cui esistano le radici di tutti i numeri positivi (questo, tuttavia, giustifica solo l'introduzione dei numeri reali algebrici, cioè dei numeri reali che sono radici di un'equazione algebrica a coefficienti in Z o, equivalentemente, in Q).
- In geometria, l'esistenza di grandezze incommensurabili mostra che i numeri razionali non sono uno strumento adeguato per misurare i segmenti e, più in generale, le grandezze geometriche.
- Infine, va posto nel giusto risalto che con l'introduzione dei numeri reali si ottiene una biiezione (che conserva l'ordine) fra l'insieme dei numeri e l'insieme dei punti di una retta, qualora si accettino per quest'ultima gli usuali assiomi della geometria euclidea (compreso l'assioma di continuità).

I numeri reali

L'estensione dell'insieme di numeri che conduce all'insieme R avviene con una tecnica completamente diversa da quelle utilizzate per gli insiemi Z e Q e produce un insieme sostanzialmente più ricco e complesso rispetto a quanto finora considerato.

- Questo insieme di numeri ha una cardinalità maggiore rispetto a quella dei naturali (ha cioè più elementi).
- Per quanto riguarda la struttura algebrica non ci sono novità essenziali: continuano a valere le proprietà delle operazioni di somma e prodotto che valevano in Q
- Le equazioni del tipo $x^2 = a$ (con $a>0$) sono sempre risolubili.
- Dal punto di vista dell'ordine c'è una novità sostanziale, anche se difficile da apprezzare a prima vista. Si tratta della cosiddetta proprietà dell'estremo superiore che afferma che *Ogni insieme non vuoto e superiormente limitato ha un estremo superiore*, ovvero che *Dato un insieme non vuoto e superiormente limitato ci sono solo due possibilità: o l'insieme stesso ha un massimo, oppure l'insieme di tutti i maggioranti ha un minimo*. Un insieme che gode di questa proprietà si dice **completo**.

Perché non accontentarsi di R ?

A questo punto si potrebbe essere soddisfatti: tutti i problemi che abbiamo via via incontrato hanno trovato una soluzione soddisfacente in questo insieme numerico, che, oltretutto, si è anche arricchito con nuove caratteristiche. Rimane ancora uno "sfizio": l'equazione $x^2+1=0$ non si lascia proprio trattare, cioè non ha soluzioni. In realtà la richiesta che essa abbia soluzioni è proprio strana, in quanto dovrei trovare un numero il cui quadrato sia negativo e questo è un problema molto più complesso rispetto a quelli che finora abbiamo incontrato.

La ricerca di un insieme numerico in cui un'equazione come questa abbia soluzioni ha però successo e addirittura produce un insieme di numeri che ha molte straordinarie proprietà: l'insieme C dei numeri **complessi**.

I numeri complessi

La costruzione dell'insieme C sarà trattata in seguito con maggior rigore. Al momento rimarchiamo che la definizione della cosiddetta ***unità immaginaria***: $\boldsymbol{i = (0,1)}$ consente di trattare i numeri complessi, ai fini delle operazioni algebriche, come gli ordinari numeri reali, con l'aggiunta della "condizione" $\boldsymbol{i^2 = -1}$.

Anche in questo caso l'insieme numerico ottenuto potrà essere pensato come un'estensione dell'insieme dei reali: basterà identificare i vecchi numeri reali con le coppie del tipo (a,0), cioè con seconda coordinata nulla.

I numeri complessi

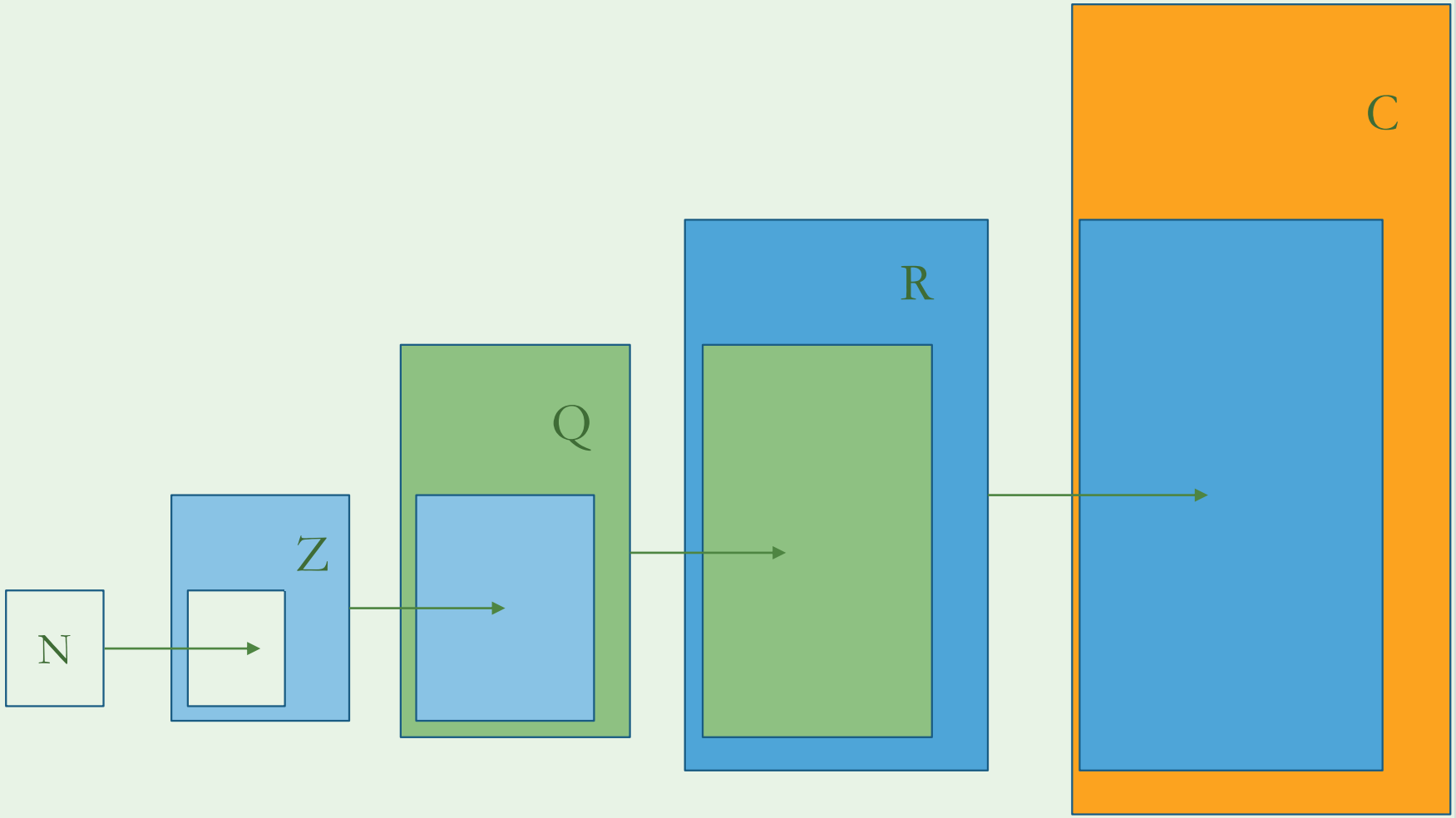
- La cardinalità è, naturalmente, la stessa di quella dei reali
- La struttura algebrica è ancora rimasta la stessa
- Per quanto riguarda l'ordine c'è una novità clamorosa: non è possibile introdurre un ordine in questo insieme in modo da estendere l'ordine già esistente sui reali. Questo insieme non è un insieme ordinato
- Per quanto riguarda la risolubilità delle equazioni questo insieme riserva la sorpresa più clamorosa: in esso vale il teorema fondamentale dell'algebra che afferma, nella sostanza, che *ogni equazione di grado n ammette esattamente n radici*, purché ciascuna sia contata con la sua molteplicità

I numeri complessi

Le sorprese che l'insieme dei complessi ci riserva non sono comunque finite: in numerosi campi (anche in geometria, per esempio) l'uso dei complessi consente una trattazione elegante e raffinata di problemi che, se visti nell'insieme dei reali, appaiono contorti e pieni di "eccezioni" alle regole. Vogliamo solo segnalare, tra le tante cose interessanti, che in questo insieme è possibile una trattazione rigorosa e unitaria delle funzioni trigonometriche e delle funzioni esponenziali, trattazione in cui è compresa la famosa formula di Eulero $e^{i\pi}+1=0$
che contiene i cinque numeri più famosi della matematica.

Non è errato affermare, per concludere, che l'insieme numerico ottenuto partendo dalla idea di trovare soluzioni all'equazione $x^2+1=0$ è alla base di una gran parte delle scoperte, non solo in campo matematico, degli ultimi 250 anni.

Più precisamente parliamo di isomorfismi…..



I numeri complessi

Un ponte dal reale all'immaginario …. per ritornare nel reale

I numeri complessi

$$i = \sqrt{-1}$$

Questo nuovo insieme numerico si costruisce introducendo un solo nuovo simbolo, ***i***, detto **unità immaginaria** e seguendo nei calcoli queste due regole:

I. $i^2=-1$ (e quindi $\sqrt{-1}=i$)

II. si opera con i numeri reali ed il simbolo *i* secondo le usuali regole algebriche determinate dalle proprietà di R.

es. $(3+2i)(2i-5)-8i =$ *(in base alla regola II)*

$6i-15+4i^2-10i-8i =$ *(in base alla regola I)*

$6i-15+4(-1)-10i-8i=$ *(raccogliamo i termini con i come fossero monomi simili)*

$-19-12i$

Ogni espressione numerica che contenga il simbolo i può essere semplificata fino ad assumere la forma di un binomio $x+iy$, con $x,y \in R$

I numeri complessi

DEFINIZIONE: Si chiama numero complesso (in forma algebrica) ogni espressione della forma x+iy in cui x e y sono numeri reali e i (unità immaginaria) ha la proprietà $i^2=-1$.

L'insieme dei numeri complessi è indicato con C

Il numero x è detto **parte reale** mentre iy è chiamata **parte immaginaria.**

Due numeri complessi sono uguali se coincidono sia la parte reale che quella immaginaria

Quando la parte reale x=0 il numero 0+iy = iy è detto **numero immaginario.**
Ogni numero x+i0 (con y=0) si può identificare, nel calcolo, con il numero reale x. In tal senso C è considerato un ampliamento di R.

I numeri complessi

DEFINIZIONE: dato il numero complesso z=x+iy, il numero $\bar{z}$=x-iy è detto suo coniugato.

DEFINIZIONE: Si chiama modulo di un numero complesso z=x+iy il numero reale $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Nell'insieme C si definisce **l'addizione** :

es. (3+2i)+ (5+4i) = (3+5)+(2+4)i=8+6i

Nell'insieme C si definisce **la moltiplicazione** :

es. (3+2i) (5+4i) = (3)(5)+(2i)(4i)+(3)(4i)+(2i)(5)=15-8+12i+10i=7+22i

Per entrambe le operazioni valgono le proprietà:

- commutativa
- associativa
- distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione
- 0=0+i0 è l'elemento neutro dell'addizione
- 1=1+i0 è l'elemento neutro della moltiplica

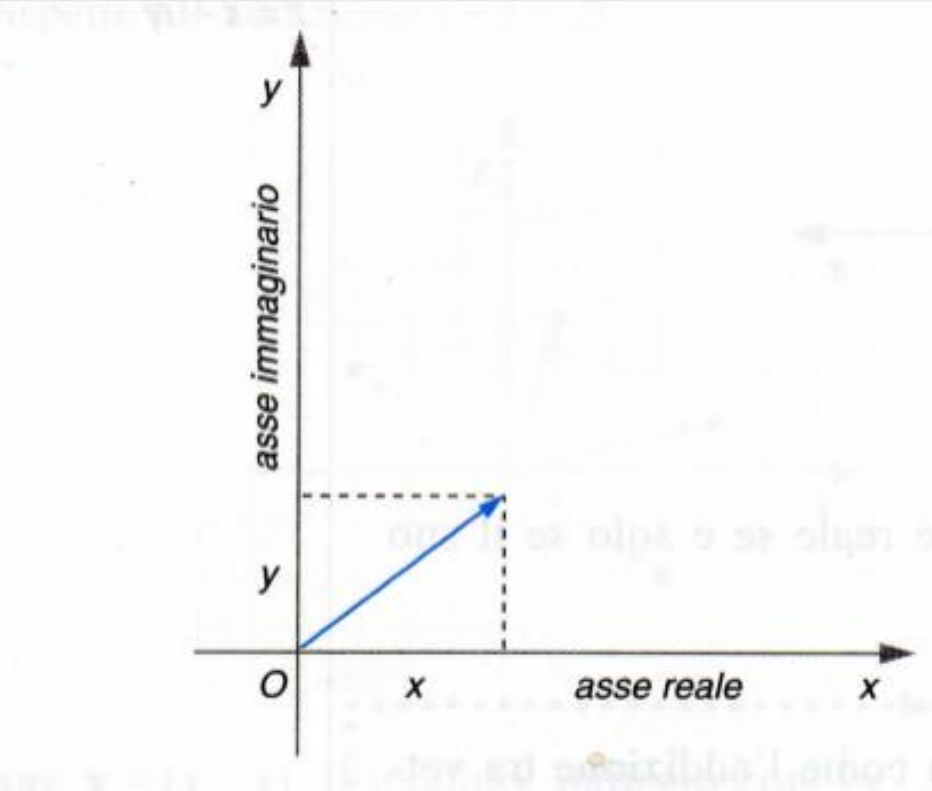
In C è possibile risolvere ogni equazione di secondo grado a coefficienti reali

IL PIANO COMPLESSO (o piano di Argand-Gauss)

Il piano complesso è un modo per visualizzare lo spazio dei numeri complessi e consentirne una interpretazione geometrica. La rappresentazione grafica dell'insieme C si basa sul fatto che ogni numero complesso x+iy è di fatto identificato da una coppia di numeri reali (la sua parte reale e il coefficiente della sua parte immaginaria). Esso può quindi essere rappresentato da un vettore nel piano, applicato all'origine, di componenti (x;y)

Numero complesso $z=x+iy$ → vettore $v=(x\,;\,y)$

IL PIANO COMPLESSO (o piano di Argand-Gauss)



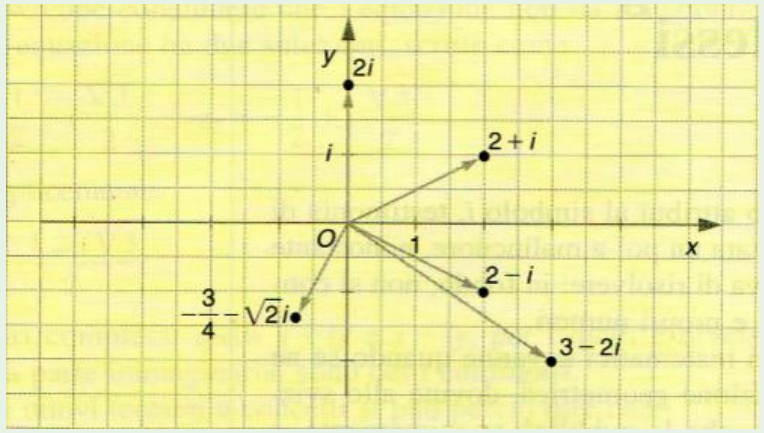
L'asse delle ascisse è anche chiamato ***asse reale***, perché su di esso poggiano tutti i vettori di componenti (x ; 0), che rappresentano i numeri reali x+i0;

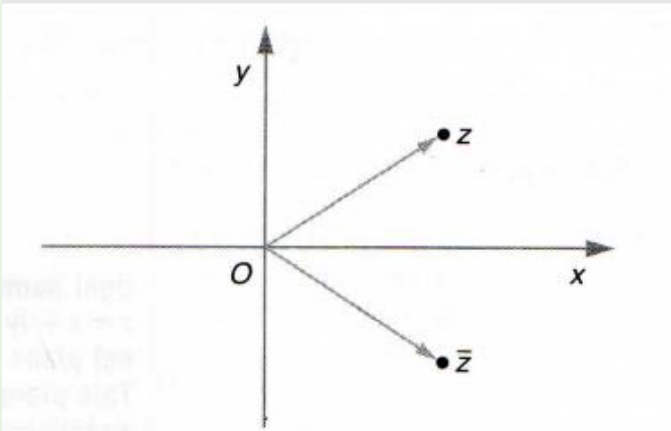
L'asse delle ordinate è anche chiamato ***asse immaginario***, perché su di esso poggiano tutti i vettori di componenti (0 ; y), che rappresentano i numeri immaginari 0+iy.

Il modulo del numero rappresenta la lunghezza del vettore

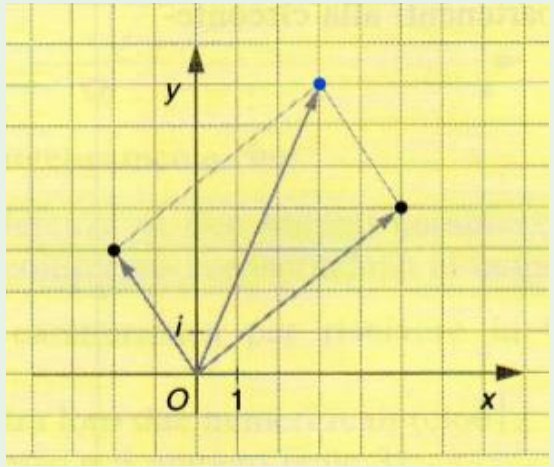
IL PIANO COMPLESSO (o piano di Argand-Gauss)

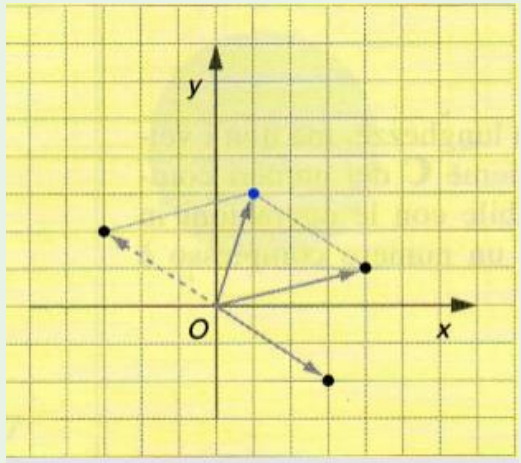
La rappresentazione dei numeri



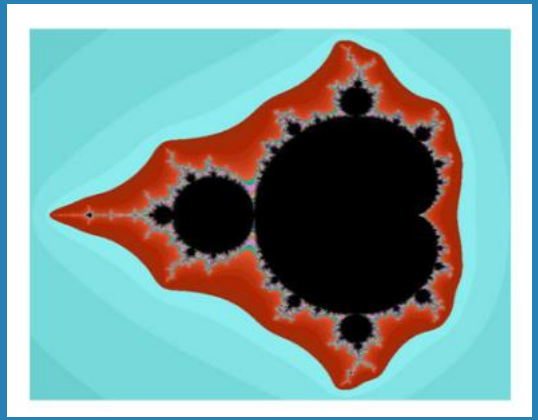


Le operazioni





Il frattale di Mandelbrot

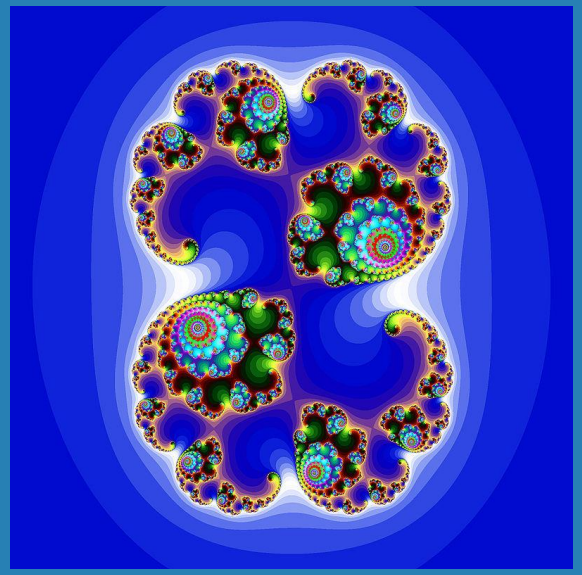


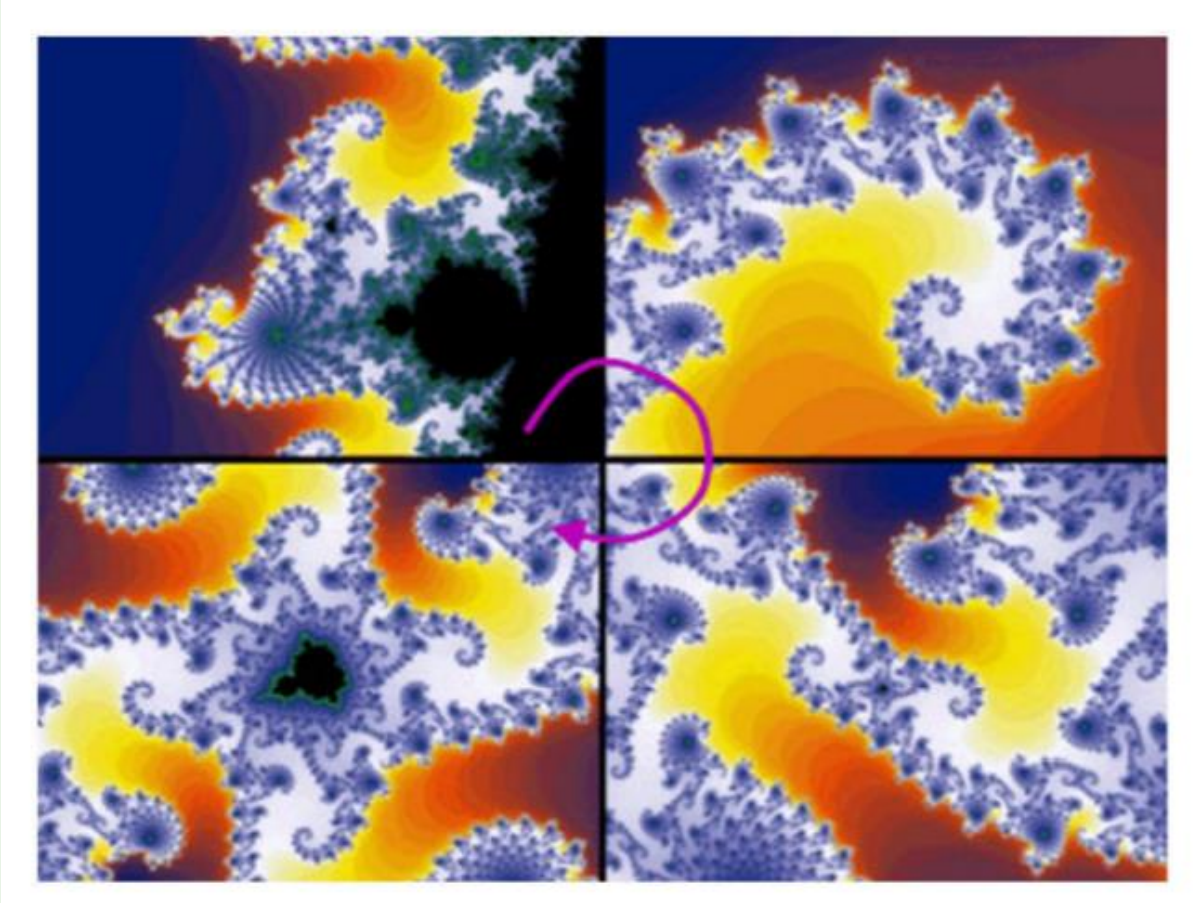
I frattali sono fra tutti gli oggetti matematici quelli che più impressionano anche chi di matematica non capisce assolutamente nulla. L'occhio è alla continua ricerca del confine della figura, ma non lo può trovare, perchè esso non esiste: se si ingrandisce l'immagine si scoprono sempre nuove insenature, sempre diverse ma sempre simili a quella iniziale. E' questa indefinitezza e autosomiglianza che definisce concettualmente quello che è un frattale.

la formula con cui viene generato l'insieme di Mandelbrot è la seguente:

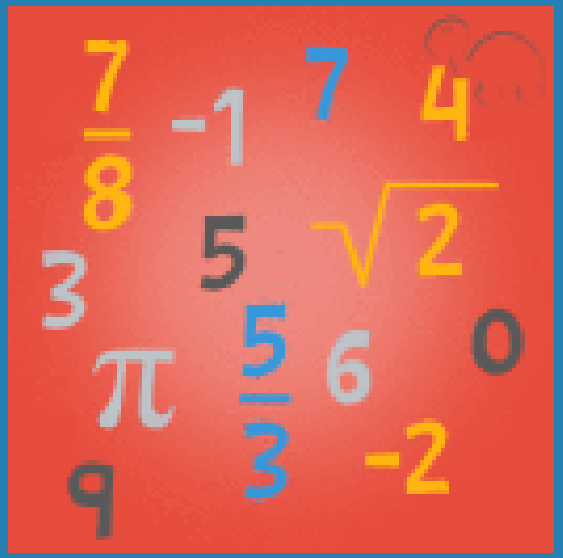
$$Z = z \cdot z + c$$

Il frattale di Mandelbrot





"Sea Horse" (Cavalluccio Marino)



- http://ripmat.it/mate/b.html
- http://ripmat.it/mate/b/bf/bfba.html