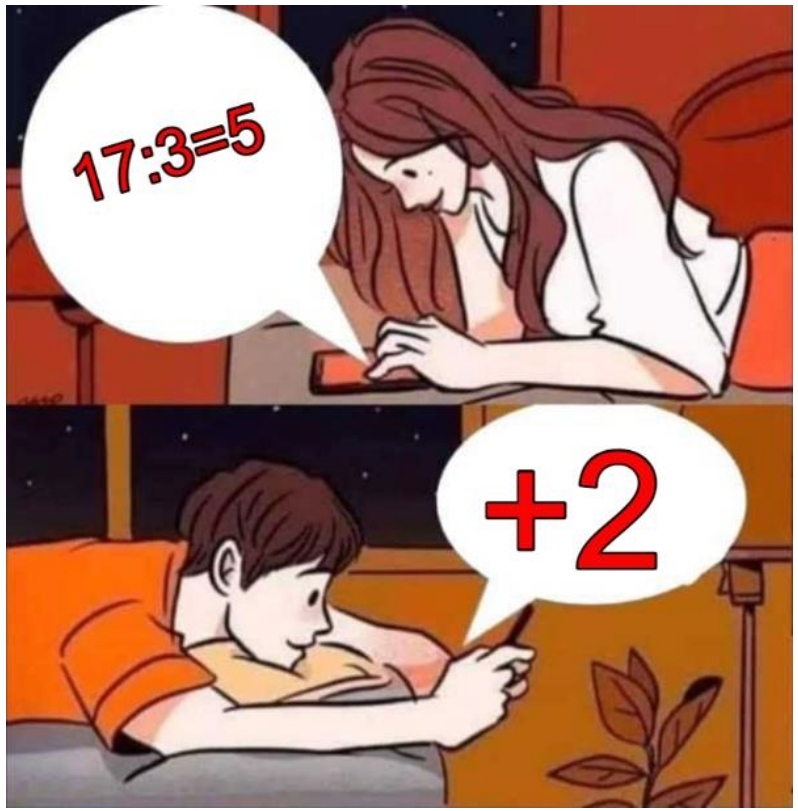
IL RESTO

Prova del nove e del sette di Fibonacci

Criterio di divisibilità di Pascal

Abbiamo visto come, attraverso le classi di resto, si possano trovare dei criteri di divisibilità di un numero. Questa è una delle possibili applicazioni del concetto di resto. Abitualmente il resto è dimenticato o trascurato nell'operazione di divisione. Nelle calcolatrici il resto è ridotto ad una serie di cifre decimali. Sapreste con la calcolatrice ottenere il resto della divisione 137:15?



Uno dei primi usi dei resti è molto antico: si tratta della cosiddetta prova del nove, usata per verificare la correttezza dei calcoli.
Pochi erano consapevoli che stavano usando i resti della divisione per nove e che la procedura per eseguire la prova era basata sulle proprietà dei resti.
Quasi tutti sapevano che non sempre la prova del nove riesce a scovare gli errori.
Certamente, se la prova dà esito negativo, occorre rifare i calcoli e vedere dove è stato commesso l'errore. Ma se la prova dà esito positivo, non possiamo essere certi di aver calcolato correttamente. Alcuni errori possono infatti sfuggire alla prova del nove. Se, anziché fare la prova del 9 si facesse la prova del 7, sarebbero scovati molti più errori.

Dice infatti Luca Pacioli (*Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalitate*, 1494): *"...La prova del .7. de più ci chiarescí che non quella del .9. sequíta per questo la prova del .7. esser men rea dí quella del .9. e per conseguente quella del .9. essere píù rea."* e continua, però, affermando *"questa del .7. non sí pò pígliare se non partendo* [dividendo]: *e non sí píglia infilzando le figure* [sommando le cifre] *del numero sì como facemo per .9."*

pur essendo usata frequentemente, non veniva data alcuna giustificazione alla prova del nove, almeno fino al 1202. In tale anno veniva pubblicato il *Liber Abbaci* di Leonardo Pisano detto il Fibonacci, dove per la prima volta si trovava una precisa giustificazione della prova (già nota ai matematici arabi ed indiani), partendo da un esempio: la moltiplicazione di 37 x 37 = 1369. Egli nota:

"...quando si divide un numero in parti e poi si moltiplica ciascuna delle parti per un dato numero, quelle moltiplicazioni, raccolte insieme, sono uguali alla moltiplicazione di tutto il numero [che si è] *diviso per il numero per il quale tutte le parti dello stesso erano state moltiplicate. Quindi, le moltiplicazioni 36 x 37 e 1 x 37, assieme congiunte, uguagliano quella di 37 x 37. Però dalla moltiplicazione di 36 x 37 proviene un numero che è originato da una certa quantità di 9, essendo 36 costituito da 9. Per cui il numero che sorge da 36 x 37, se diviso per 9, non resterà nulla per indivisibile. Ancora, la moltiplicazione di 1 per 37 è uguale alla moltiplicazione di 1 x 36 e di 1 x 1. Ma dalla moltiplicazione di 1 x 36 proviene un numero perfettamente divisibile per 9, mentre la moltiplicazione di 1 x 1 risulta indivisibile per 9. Quindi da 37 x 37 : 9 resta 1, come dalla somma di tutte le cifre che si trovano nel prodotto 1369".*

Occorrerà arrivare a Pascal (1623-1662) ed al suo *De numeris multicibus ex sola characterum numericorum additione agnoscendis* (1650) per ottenere un criterio di divisibilità applicabile a qualsiasi numero.

Le proprietà delle classi resto e la prova del nove

La prova del nove si basa proprio sulle proprietà delle classi di resto. Dopo aver fatto un'operazione, si ripete di nuovo il calcolo, sostituendo i due fattori con i rispettivi resti modulo 9 e calcolando il prodotto dei due resti, sempre nel modulo 9. Le varie operazioni sono facili, poiché i resti modulo 9 si ottengono sommando le cifre dei termini (e sommando eventualmente anche quelle del risultato ottenuto, fino ad ottenere un numero di una sola cifra). Il valore ottenuto dev'essere uguale al resto modulo 9 del prodotto ottenuto.

La prova del nove è semplice ma, come le altre prove, è una condizione necessaria ma non sufficiente per l'esattezza del risultato, infatti non segnala due errori relativamente frequenti: scambio di due cifre e errore di incolonnamento nell'esecuzione di una moltiplicazione.

Se volessimo usare un altro numero al posto del nove, ad esempio il 7, come proposto da Pacioli, dovremmo trovare una regola per calcolare il resto modulo 7 dei termini, ma a quell'epoca i matematici non erano ancora arrivati a tale livello di conoscenze, e non è facile come «infilzare» i numeri. Il primo ad conseguire tale risultato fu Pascal nel 1650.

Il metodo di Pascal per il calcolo dei resti mod 7.

Il metodo proposto da Pascal utilizza le proprietà delle classi resto. Si voglia verificare, ad esempio, se il numero **75342** sia o no divisibile per 7.
Il numero può essere scritto in *forma polinomiale*, trasformandolo cioè in un polinomio formato dalla somma delle cifre moltiplicate per le rispettive potenze di 10, in relazione al loro valore posizionale:

Pascal trascrive il polinomio in una tabella a due righe, mettendo le cifre del numero nella prima riga e le rispettive potenze del dieci nella seconda riga:

Sostituisce quindi i termini della seconda riga con i rispettivi resti modulo 7:

Ora occorre moltiplicare ciascuno dei termini della prima riga per il corrispondente sotto di esso nella seconda riga. Quindi si sommano i prodotti così ottenuti:

(1) (2)

Poiché 78, diviso per 7, dà per resto 1, anche il numero 75342, diviso per 7, darà per resto 1.

In pratica Pascal calcola il resto modulo 7 del polinomio (1), nel quale le potenze di 10 vengono sostituite dai rispettivi resti modulo 7, ottenendo così la (2). Ciò è reso possibile dalla relazione di equivalenza tra i numeri di una stessa classe resto e dal conseguente *principio di sostituzione* .

Il ragionamento di Pascal, oltre che nella divisibilità per 7, è applicabile a qualunque altro criterio di divisibilità. Esso resta valido anche se si opera con sistemi di numerazione non decimali, come dichiara lo stesso Pascal

"...et non solum in progressione denaria, sed in quacumque progressione instituantur numeratio".

Potete notare come la divisibilità con i grafi non sia altro che un'applicazione del criterio di divisibilità di Pascal, nel quale oltre a sostituire le potenze del 10 con le rispettive classi d'equivalenza (linee rosse), si sostituiscono anche le cifre del numero con le rispettive classi d'equivalenza (linee blu).

Provate, nello stesso modo, se 4573 è divisibile per 3, per 11, per 13

Provate a verificare se il numero 102201 scritto in base 3, è divisibile per 5

Nel descrivere il metodo di Pascal, abbiamo incontrato una sequenza di numeri (... 4 6 2 3 1), data dai resti modulo 7 delle successive potenze di 10. Tale sequenza può essere utilizzata per qualunque numero di cui si voglia calcolare il resto modulo 7. Infatti, se si vuole calcolare il resto mod 7 di un altro numero, si dovranno sostituire le cifre nella prima riga, mentre resteranno fissi i termini della seconda. Questi potranno essere quindi calcolati una volta per tutte, trascrivendoli da qualche parte, per poterli utilizzare ogni volta che occorre.

Vediamo allora di trovare un modo per calcolarli senza fare troppa fatica:

- Il primo termine (a partire da destra) è sempre 1
- Tutti gli altri termini si ottengono moltiplicando per 10 il valore del termine precedente e calcolando poi il resto modulo 7 del prodotto ottenuto
- Il procedimento si ferma se si ottiene per resto 0, nel qual caso si ha una **sequenza finita**, oppure se si ottiene di nuovo un resto già ottenuto in precedenza, nel qual caso si ha una **sequenza periodica** e i termini si ripetono a partire dalla ricorrenza.

(10^0)mod7= 1 mod 7 = 1
(1x10) mod 7 = 10 mod 7 = 3
(3x10) mod 7 = 30 mod 7 = 2
(2x10) mod 7 = 20 mod 7 = 6
(6x10) mod 7 = 60 mod 7 = 4
(4x10) mod 7 = 40 mod 7 = 5
(5x10) mod 7 = 50 mod 7 = 1

Nell'ultima riga abbiamo ottenuto di nuovo il resto 1, come per il primo termine. E' chiaro perciò che, continuando a calcolare, si otterranno periodicamente i resti precedenti. Si può pertanto concludere che il criterio di divisibilità per 7 darà luogo ad una sequenza-resti periodica, i cui termini (che vanno letti da destra verso sinistra) sono:

... 5 4 6 2 3 1

Per vedere se un numero *n* qualsiasi è divisibile o no per 7, si procede pertanto nel seguente modo:
Si scrivono su una riga le cifre del numero *n*.
Si scrivono sotto ciascuna di esse altrettanti termini della sequenza-resti mod. 7 (a partire da destra), usando, se occorre le ulteriori cifre periodiche della sequenza.
Si moltiplicano i termini della prima riga per i corrispondenti nella seconda.
Si sommano i prodotti così ottenuti.
Si calcola il resto mod 7 del valore ottenuto.
Se il resto è zero, allora il numero *n* è divisibile per 7.
La regola vista per il 7, vale per *qualunque altro numero*, di cui si voglia determinare il *criterio di divisibilità*. E' sufficiente infatti sostituire il numero 7 con qualunque altro numero k. La regola resta perfettamente valida. Essa costituisce quindi un **criterio generale di divisibilità** valido per determinare se un qualsiasi numero *n* sia o no divisibile per numero prefissato *k*.
Per ogni criterio di divisibilità occorrerà calcolare la sequenza-resti relativa al numero usato come base del criterio stesso.

Caratteristiche delle sequenze-resti
Costruiamo una tabella contenente tutte le sequenze resti, a partire da quelle mod. 2, per finire a quelle mod. 125.

Uno sguardo alla tabella a lato consente di osservare la presenza di diversi tipi di sequenze:

- ***finite***, tutte le volte che il modulo è un divisore di 10 o i suoi fattori primi sono costituiti esclusivamente da potenze di tali divisori (2, 4, 5, 8, 10, ... 25, 125, ecc.). La lunghezza della sequenza è data dal massimo esponente delle potenze di 2 o di 5, che costituiscono i fattori primi del modulo;
- ***periodiche***, quando tra i fattori primi del modulo compaiono fattori diversi dal 2 e dal 5. Se il modulo è primo rispetto a 5 e rispetto a 2, la sequenza sarà semplicemente periodica (3, 7, 9, 11).
- ***miste***, se il modulo ha fra i suoi fattori anche il 2, il 5 o loro potenze, la sequenza avrà una parte non periodica ed una periodica (es. il mod. 6 e il mod. 12).

mod	10^6	10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0
2	0	0	0	0	0	0	1
3	1	1	1	1	1	1	1
4	0	0	0	0	0	2	1
5	0	0	0	0	0	0	1
6	4	4	4	4	4	4	1
7	1	-2	-3	-1	2	3	1
8	0	0	0	0	4	2	1
9	1	1	1	1	1	1	1
10	0	0	0	0	0	0	1
11	1	-1	1	-1	1	-1	1
12	4	4	4	4	4	10	1
25	0	0	0	0	0	10	1
125	0	0	0	0	100	10	1

mod	10^6	10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0
2	0	0	0	0	0	0	1
3	1	1	1	1	1	1	1
4	0	0	0	0	0	2	1
5	0	0	0	0	0	0	1
6	4	4	4	4	4	4	1
7	1	-2	-3	-1	2	3	1
8	0	0	0	0	4	2	1
9	1	1	1	1	1	1	1
10	0	0	0	0	0	0	1
11	1	-1	1	-1	1	-1	1
12	4	4	4	4	4	10	1
25	0	0	0	0	0	10	1
125	0	0	0	0	100	10	1

Esaminiamo la tabella.

Possiamo facilmente ritrovare i criteri di divisibilità già esaminati.

Iniziate ad osservare i resti delle potenze di 10 mod. 3 , mod. 9 e mod. 11.

Che si può dedurre?

Qualche piccolo trucco.
Per tutti i criteri, valgono i seguenti accorgimenti:

- Quando calcolo le classi di resto mod. k, ai risultati ottenuti posso sempre aggiungere o togliere k in quanto questi, appartenendo alla classe 0 mod.k, sono elementi neutri dell'addizione

• Prima e durante il procedimento di calcolo è sempre possibile eliminare le cifre il cui valore è uguale o multiplo di *k*

• Prima e durante il procedimento di calcolo è sempre possibile eliminare due o più cifre la cui somma è uguale o multipla di *k*

• Durante il procedimento di calcolo è sempre possibile ridurre a meno di *k* i valori ottenuti, sia nei calcoli intermedi, sia nei risultati finali.

• E' sempre possibile applicare ricorsivamente il criterio agli stessi valori finali ottenuti. Dopo un po' si otterrà un valore sufficientemente piccolo, sul quale sarà più agevole calcolare il resto mod. *k*.

Test:

1 – I termini *resto* e *differenza* sono diversi tra loro?

2 – Come si può trovare il resto tra *a* e *b* con una comune calcolatrice?

3 – Chi fu il primo matematico in occidente a dare una giustificazione della prova del nove?

4 – Su quali proprietà si basa la prova del nove?

5 – Cosa s'intende per forma polinomiale di un numero?

6 – Cosa rappresenta la sequenza periodica (verso sinistra) ... 5, 4, 6, 2, 3, 1?

7 – Perché nei criteri di divisibilità per 2 e per 5 si considera solo l'ultima cifra del dividendo?

8 – Perché nei criteri di divisibilità per 3 e per 9 si sommano le cifre del dividendo?

9– Perché è possibile sostituire la sequenza ... 5, 4, 6, 2, 3, 1 con la sequenza -2, -3, -1, 2, 3, 1 nel criterio di divisibilità per 7?

10 – In quale criterio di divisibilità troviamo la sequenza-resti ..., -1, 1, -1, 1, -1, 1?

11 – In quali criteri di divisibilità troviamo sequenze-resti finite?

12 – Come si può trovare il resto modulo 8 di un numero di molte cifre, senza dividerlo per 8?

13– Quale soluzione ha l'equazione 2x = 4 nell'insieme delle classi resto modulo 6?

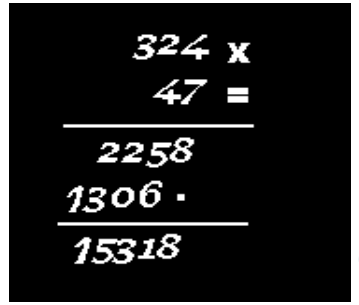
14-Durante un esercizio sull'aritmetica delle classi resto, un alunno ha calcolato 5 + 4 = 2. In quale modulo è stata fatta l'addizione?

15-A cosa è congruo, modulo 10, il numero 456345678987425436l?

16-Trova il resto mod 13 dei numeri 166935 e 362115.(Scrivi i numeri nella loro forma polinomiale)

17-Risolvi l'equazione 4x = 3 nell'insieme della classi resto modulo 6.(Controlla la tabella del prodotto di Z6)

18-Sulla lavagna un alunno ha eseguito una moltiplicazione.
Fa' la prova del nove e verifica se ci sono errori.
Applica la "prova del sette" alla moltiplicazione precedente e vedi se ci sono errori.



Bibliografia/sitografia

La regina della matematica
Dio salvi la teoria dei numeri di Jordi Deulofeu ed. hachete

http://www.vdepetris.it/t06/Text06.htm