LICEO MATEMATICO
IIS Gregorio da Catino - Poggio Mirteto (RI)

Le terne pitagoriche

TERNE PITAGORICHE

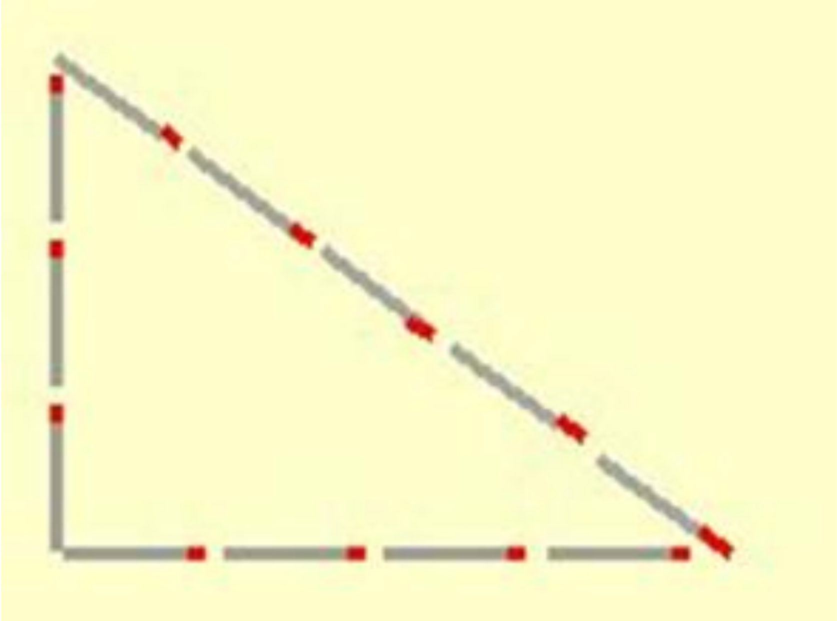
Esaminiamo l'aspetto aritmetico, cioè le particolari terne numeriche, chiamate terne pitagoriche, collegate al teorema di Pitagora.

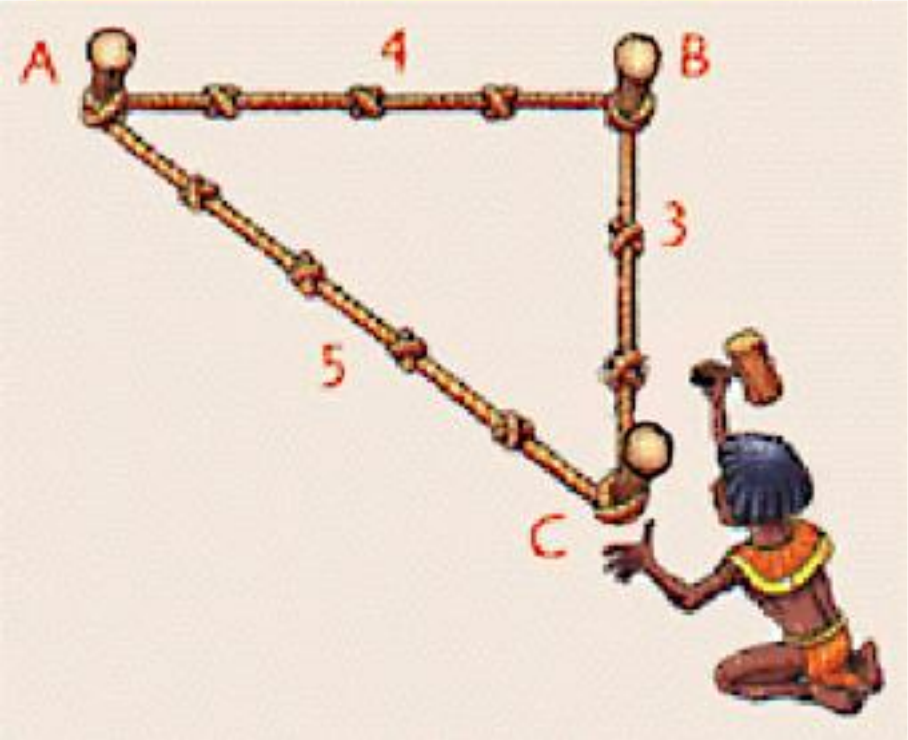
Già sappiamo che in un triangolo rettangolo di cateti a, b e di ipotenusa c si ha: $a^2 + b^2 = c^2$. Esistono infinite terne con numeri interi che soddisfano a questa relazione. Una di queste è 3, 4 e 5. Infatti con questi tre numeri si ha: $3^2 + 4^2 = 5^2$.

Altre terne sono 5, 12 e 13, 7, 24 e 25, 8, 15 e 17, 20, 21 e 29.

Per costruire un triangolo rettangolo è sufficiente costruire un triangolo con le misure dei lati corrispondenti ai numeri di una delle terne pitagoriche, ad esempio di 3, 4 e 5 unità.

Lo possiamo verificare praticamente con una scatola di fiammiferi, costruendo un triangolo che abbia come lunghezza dei lati 3, 4 e 5 fiammiferi. Il triangolo ottenuto avrà sicuramente un angolo retto.





Esperienza in laboratorio di fisica:
Parallelogramma delle forze e terne pitagoriche.

C'è una famosa tavoletta del periodo paleobabilonese, nota come Plimpton 322, che dimostra come il problema aritmetico, collegato a quello geometrico del teorema di Pitagora, fosse già noto ben prima dei greci. Questa tavoletta era originariamente molto più grande, ma la parte conservata permette ancora di interpretare correttamente il significato delle colonne di numeri che presenta.

A questo punto, sembrerebbe logico supporre che il collegamento fra terne pitagoriche e triangoli rettangoli, cioè fra il problema aritmetico e il corrispondente problema geometrico, fosse già noto nell'antichità, ai babilonesi. In realtà la loro geometria era di tipo pratico, non esisteva un pensiero geometrico indipendente dalle più semplici e immediate applicazioni.

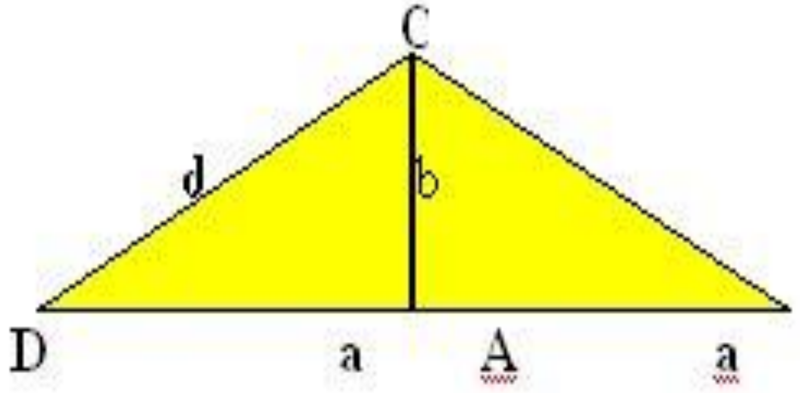
La dimostrazione dell'inverso del teorema di Pitagora, cioè della relazione tra terne pitagoriche e geometria, si troverà soltanto in Euclide. Nel primo libro dei suoi Elementi, subito dopo il teorema di Pitagora, proposizione 47, si trova, alla proposizione 48, il teorema inverso:

Se in un triangolo il quadrato di un lato è uguale alla somma dei quadrati dei due lati rimanenti, allora l'angolo contenuto dai due lati rimanenti è retto.

Noi sappiamo che in un triangolo rettangolo di cateti a, b e di ipotenusa c si ha $a^2 + b^2 = c^2$. Ma vale anche l'inverso: se a, b e c sono i lati di un triangolo e vale la relazione $a^2 + b^2 = c^2$, allora il triangolo è rettangolo, a e b sono i cateti e c l'ipotenusa del triangolo. La dimostrazione di Euclide è molto semplice. Se il triangolo dato ABC non fosse rettangolo , costruiamo allora un triangolo rettangolo ACD con AD perpendicolare ad AC e uguale ad AB, di cateti a e b e di ipotenusa d. Applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo ACD e abbiamo $a^2 + b^2 = d^2$

ma per ipotesi abbiamo anche $a^2 + b^2 = c^2$.

Ne consegue che $c^2 = d^2$ e quindi $c = d$. I due triangoli sono uguali per il terzo criterio di uguaglianza e di conseguenza l'angolo BAC dev'essere retto.



Lo studio delle terne babilonesi sembrerebbe confermare la conoscenza da parte loro delle formule fondamentali per la costruzione delle terne stesse. Sono formule che tradizionalmente vengono attribuite a Diofanto, un matematico greco vissuto nel terzo secolo dopo Cristo, autore di un'opera famosa, l'Arithmetica, in cui sono raccolti 189 problemi risolti applicando diversi metodi che rivelano la sua straordinaria abilità.

Dati due numeri interi qualsiasi m e n, con m > n, si ha:

$$a = m^2 - n^2 \qquad b = 2mn \qquad c = m^2 + n^2$$

E' facile verificare che $a^2 + b^2 = c^2$

Si osservi che moltiplicando a, b e c per uno stesso numero, si ottiene ancora una terna pitagorica, infatti si ottiene ancora un triangolo rettangolo, simile al precedente. (Verificatelo con i fiammiferi)

Allora possiamo limitare la nostra ricerca a quelle che si chiamano terne primitive, cioè con a e b primi fra loro, partendo da valori di m e di n primi fra loro(in questo caso a e b dovranno essere necessariamente uno pari e uno dispari).

Tutte le altre terne saranno semplicemente multiple di quelle trovate.

$a = m^2 - n^2$ $b = 2mn$ $c = m^2 + n^2$

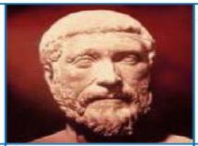
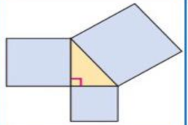
Ci sono due casi particolari interessanti. Se $n = m - 1$ si ha $b = c - 1$ e quindi b e c risultano, in questo caso, numeri consecutivi, la differenza fra c e b sarà sempre uguale a 1. Ad esempio, con $m = 2$ e $n = 1$ la terna corrispondente è 3, 4 e 5. Con $m = 3$ e $n = 2$ si ha la terna 5, 12 e 13.

Se invece si prende per m un valore qualsiasi e n costante, uguale a 1, si otterranno delle terne pitagoriche per le quali la differenza fra l'ipotenusa e il cateto maggiore sarà sempre uguale a 2. Ad esempio con m uguale a 6 e n uguale a 1 si ha la terna 12, 35 e 37.

Osserviamo ancora che, in generale, la differenza fra il numero più grande e quello più piccolo della terna è uguale al quadrato della differenza fra i due numeri generatori. Ad esempio, con $m = 5$ $n = 2$ abbiamo la terna 20, 21 e 29. La differenza fra i due numeri generatori, m e n, è 3 e la differenza fra i due numeri è $29 - 20 = 9$. La somma fra il numero più grande della terna e quello più piccolo è invece uguale al quadrato della somma dei due numeri generatori. Nel nostro esempio precedente abbiamo $m + n = 5 + 2 = 7$ e la somma dei due numeri è $29 + 20 = 49$.

RELAX

Crucinumero di Pitagora

1			2
		3	
	4		

Orizzontali

1. Il terzo numero della terna pitagorica 5 12 ......

2. Il numero dei numeri della terna pitagorica.

3. Si trova tra 10 e 26 e con entrambi forma una terna pitagorica.

4. È il numero più grande della terna pitagorica derivata moltiplicando per 7 la terna primitiva 7 24 25.

Verticali

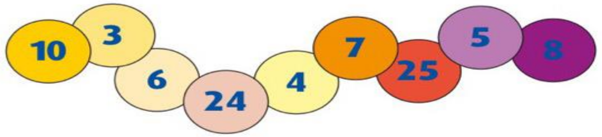
1. Il più piccolo numero della terna pitagorica ...... 16 20.

2. La terna pitagorica con i numeri più piccoli.

3. È il numero più piccolo della terna pitagorica derivata moltiplicando per 9 la terna primitiva 3 4 5.

Facciamo ordine

I numeri di tre terne pitagoriche sono stati sparpagliati in disordine. Mettili al posto giusto.



1ª TERNA

2ª TERNA

3ª TERNA

I tasselli mancanti

In orizzontale e in verticale sono disposte 5 terne pitagoriche. I numeri mancanti sono quelli che appartengono a due terne diverse.
Riempi i vuoti.

				52
3	4			48
			16	
85	84			

PROBLEMI

Terne pitagoriche formate da una terna di **numeri primi tra loro** sono chiamate **terne pitagoriche primitive** e le abbrevieremo con terne **PP**.
Ovviamente due triangoli PP non hanno la stessa forma, cioè non sono simili.

Quale triangolo ha la superficie maggiore, quello con i lati 5 ,5,6 o quello con i lati 5,5,8?

Un triangolo di lati 30,40,50, ha un perimetro di 120. Trova due altri triangoli Pitagorici con lo stesso perimetro.

Qual è il minor numero di fiammiferi necessari a formare simultaneamente , su un piano, due triangoli Pitagorici non congruenti?

Per tutti i triangoli pitagorici i diametri dei cerchi iscritto e circoscritto sono interi. Il diametro del cerchio iscritto si ottiene sommando i cateti e sottraendo l'ipotenusa. Trava una formula per il diametro del cerchio circoscritto

TERNA PITAGORICA *con le successioni di Fibonacci e di Lucas*

Scrivete due numeri a piacere.

Scrivete poi un terzo numero uguale alla somma dei primi due.

Scrivere ora un quarto numero uguale alla somma degli ultimi due

Calcolate il prodotto tra il primo e il quarto.

Calcolate il doppio prodotto tra il secondo e il terzo.

Avete trovato i primi due numeri una terna pitagorica!

Qual è il terzo numero?

Il quadrato del secondo più il quadrato del terzo.

Esempio:

1° numero: 2

2° numero: 3

3° numero: 5

4° numero: 8

2x8=16

2x3x5=30

$3^2+5^2 = 34$

$$16^2+30^2 = 34^2$$

La successione di Fibonacci:

1, 1, 2 , 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377 ………..

Prendiamo 4 numeri consecutivi della successione.

Esempio: **5, 8, 13, 21.**

Il prodotto tra il primo e il quarto numero: 5x21=105,

il doppio prodotto tra il secondo e il terzo: 2x8x13=208

$\sqrt{}(105^2+208^2) =\sqrt{}(11025+43264) = \sqrt{}54289) = 233$

105, 208, 233

Una generica successione di Fibonacci:

a, b, a+b, a+2b, 2a+3b, 3a+5b, 5a+8b, 8a+13b, 13a+21b …

Prendiamo i primi 4 numeri consecutivi della successione.

a, b, a+b, a+2b

Il prodotto tra il primo e il quarto numero: $\mathbf{a^2+2ab}$

il doppio prodotto tra il secondo e il terzo: $\mathbf{2ab+2b^2}$

sono i primi due termini di una terna pitagorica

Il terzo numero è $\mathbf{(a+b)^2+b^2}$