GRAFI E CRITERI DI DIVISIBILITA’

Tutti conoscete alcuni criteri di divisibilità, per esempio la divisibilità di un numero per 2, per 3, per 5…

Ricordiamole brevemente:
Un numero è divisibile per due se è divisibile per due la sua ultima cifra
Un numero è divisibile per tre se la somma delle sue cifre è divisibile per tre
Un numero è divisibile per 5 se l'ultima cifra è 0 o 5
…

Vi siete mai chiesti perché?

Iniziamo ricordando tutte le proprietà delle congruenze viste nella precedente unità:

Proprietà :

(P1) a è divisibile per m se e solo se $a \equiv 0 \bmod m$

(P2) Congruenze secondo lo stesso modulo possono essere sommate o sottratte membro a membro.

(P3) Una congruenza può essere moltiplicata per un intero qualsiasi.

(P4) Due congruenze secondo lo stesso modulo, possono essere moltiplicate ordinatamente.

(P5) Moltiplicando ordinatamente i primi membri e i secondi membri di una congruenza, ottengo

$$a^n \equiv b^n \bmod m$$

Osserviamo che ogni numero si può scrivere in forma polinomiale cioè, ad esempio:

$$3759 = 3 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 9$$

Per le proprietà delle congruenze ricordate in precedenza, possiamo notare che questo numero è congruo 1 modulo 2 in quanto ogni addendo è congruo a 0 modulo 2 essendo tutti multipli di 10, tranne l'ultimo. Ma allora per la divisibilità per due, cioè affinché un numero sia congruo zero modulo 2, occorrerà che la sua ultima cifra sia divisibile per due.

Nello stesso modo possiamo osservare che ogni potenza di dieci che compone il numero è congrua 1 modulo 3 perché 10 e le sue potenze sono tutte congrue 1 modulo 3, quindi il numero per intero sarà congruo 0 modulo 3 se lo sarà il numero $3 \cdot 1 + 7 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + 9$ cioè il numero 3+7+5+9 cioè il numero formato dalla somma delle sue cifre.

Possiamo dimostrare questi criteri di divisibilità con un grafo…

Iniziamo a scrivere le classi di resto della classe di congruenza che vogliamo. Partiamo dalle classi di resto modulo 2
Ovviamente un numero diviso 2 potrà avere resto 0 o 1.

Per esempio prendiamo il numero 347

Iniziano sempre dallo zero e consideriamo la prima cifra del numero,
In questo caso 3. Ci muoviamo lungo le linee blu di tre volte.
Arriveremo su 1 . Ora, per passare sull'altra cifra, dovrò moltiplicare per 10
E questo lo ottengo seguendo la linea rossa, ora di nuovo sulla blu per 4 volte
Di nuovo la rossa ed infine la blu per 7 volte…arriveremo ad 1.
Questo significa che il mio numero non è divisibile per due e che nella divisione ha resto 1

Proviamo a capire cosa abbiamo fatto:
consideriamo il numero 347

- parto dalla cifra più a sinistra, in questo caso il 3 e determino la sua classe di resto

questo lo ottengo muovendomi sulle linee blu di tante volte quanto indica il numero stesso(è come far girare la lancetta in un orologio)

- ora moltiplico per 10 che è congruo a 0 mod. 2 . Devo seguire la linea rossa che mi lascia su 0 se sono in zero, mi riporta su zero se sono in 1 (la linea rossa mi porta sulla classe di resto di 10 modulo 2)
- considero, ora la seconda cifra, cioè 4 e mi muovo di 4 sulle linee blu, ottenendo la classe di resto di 30+4
- di nuovo moltiplico per 10 seguendo la linea rossa, ed ottengo (30+4)10
- infine mi muovo di 7 sulle linee blu, ottenendo la classe di resto del numero(30+4)10+7= 300+40+7=347.

Se la classe di resto finale è zero, il numero sarà divisibile per due, altrimenti il resto della divisione sarà proprio la classe di resto finale.

Per verificare la divisibilità per due abbiamo costruito le classi di resto modulo 2 del numero 300+40+7 .Essendo le potenze di 10, moltiplicate per qualunque numero, congrue a zero modulo 2, la divisibilità di 347 per due, si riduce a verificare la divisibilità per due della cifra delle unità.

Costruite il grafo della divisibilità per tre

Verificate
se 5784 è
divisibile per
tre e
determinate
l'eventuale
resto
E 5672?

Possiamo osservare che , partendo da una qualunque classe di resto , la moltiplicazione per 10 (linea rossa)non fa cambiare classe. Questo vuol dire che preso un dato numero, posso verificare la divisibilità per tre seguendo sempre le linee blu per un numero di volte pari alla somma delle cifre stesse. Quindi un numero è divisibile per tre se lo è il numero formato dalla somma delle sue cifre.

Proviamo a dimostrare il criterio di divisibilità per 4.
Osserviamo che, scritto il numero nella sua forma polinomiale, tutte le potenze di 10, fino a 10^2sono divisibili per 4, cioè congrue 0 modulo 4. Allora il numero dato, ad esempio

$$3478 = 3 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 8$$

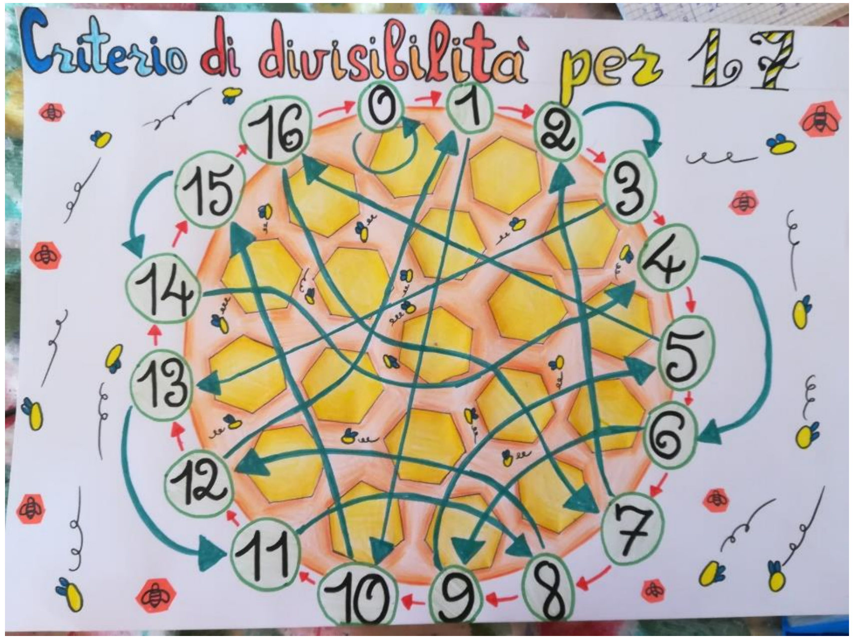
Sarà congruo modulo 4 a 0+0+70+8 cioè al numero formato dalle ultime sue due cifre.

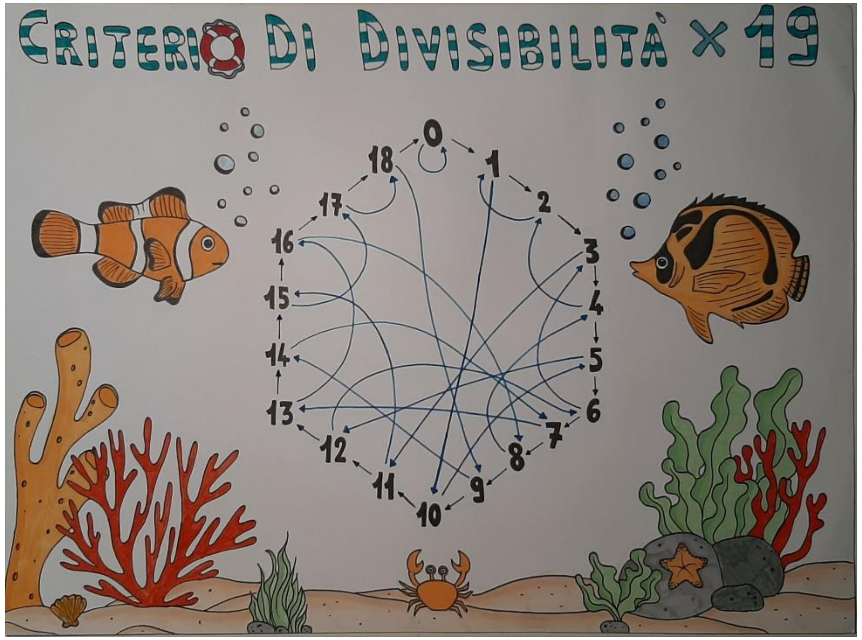
Costruiamo il grafo:
Possiamo osservare comunque preso un numero di n cifre, durante i primi n-2 passaggi, siamo sempre riportati nelle classe di resto 0. Quindi per la divisibilità per 4, dovrà essere divisibile per 4 il numero formato dalle ultime due cifre

Costruite voi il grafo della divisibilità per 5, per 6, per 7….fino a 13
Provate, con il grafo, a dimostrare i criteri di divisibilità noti.

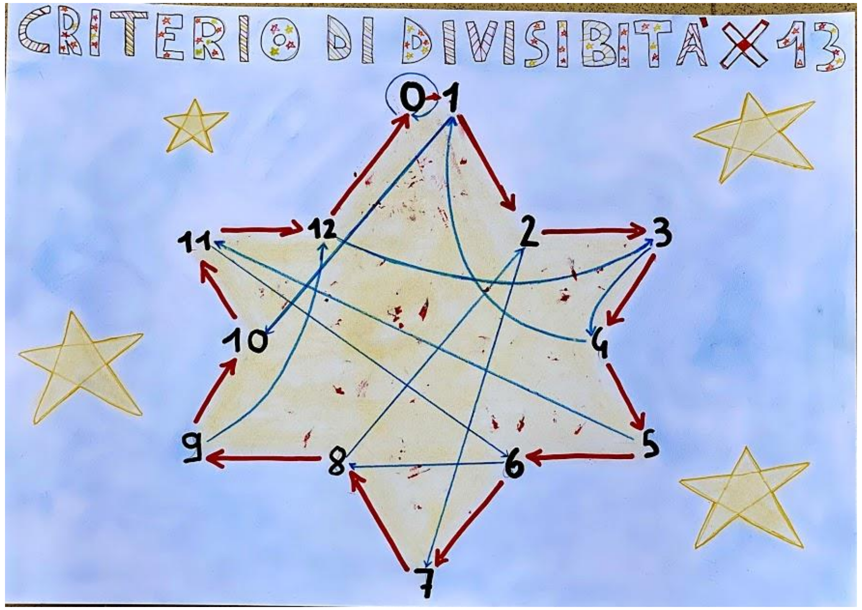
Cercate i criteri di divisibilità per 7, 11 e 13.

Con i grafi posso verificare la divisibilità di un numero scritto in qualsiasi base…basterà moltiplicare le classi di resto per il numero che rappresenta la base invece che per 10…poi si procede esattamente come già visto. Per esempio costruiamo il grafo della divisibilità per tre di un numero scritto in base 5:





Alcuni criteri di divisibilità interpretati dai ragazzi



Sitografia:

https://www.youtube.com/watch?v=SAmyS1IIWsQ&t=1s