Algoritmi

Stefano Finzi Vita (Sapienza)

I.I.S. "Gaetano De Sanctis", 10 aprile 2017

Ancora su numeri, cambi di base e algoritmi.

Avete ormai visto diversi esempi di algoritmi. Per risolvere un problema, specie se con l'aiuto di un computer:

- dobbiamo aver presente la rappresentazione dei numeri, anche in basi diverse da 10 (ad esempio 2), e come questi vengano approssimati (con l'insieme dei numeri macchina, cioè i numeri effettivamente rappresentabili). L'algebra dei numeri macchina è profondamente diversa da quella del continuo dei reali: identità che diventano false, proprietà che non valgono più, operazioni 'pericolose' ed effetti disastrosi.
- occorrono procedure ben strutturate, operazioni semplici ripetute magari migliaia di volte (cicli) e diverse strade da percorrere in base alle situazioni (alternative) [e quindi l'uso di un linguaggio di programmazione]
- tra queste procedure hanno una notevole importanza quelle ricorsive, cioè quelle che richiedono un calcolo ripetuto a partire da uno o più dati iniziali. Vogliamo vederne qualche esempio.

La rappresentazione dei numeri: il caso continuo

Ogni numero reale può essere rappresentato come un **numero decimale** finito o infinito, **periodico o no**, in notazione posizionale:

$$x = n.a_1 a_2 \dots a_k \dots = n + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_k}{10^k} + \dots$$

dove $n \in \mathbb{Z}$ (parte intera), $a_i = 0, 1, \dots, 9$. In particolare:

- **periodici** $\rightarrow$ **razionali** ($\mathbb{Q}$):
  Es.: $2(.00000...)$, $3.5(00000...)$, $0.\overline{6}$, $7.02\overline{428}$
- **non periodici** $\rightarrow$ **irrazionali** ($\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$):
  Es.: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π, e

Ogni numero reale x può essere approssimato (con precisione arbitraria) mediante un numero razionale $\overline{x}$ [**densità di** $\mathbb{Q}$ **in** $\mathbb{R}$.

La retta reale non ha buchi [**continuità dei numeri reali**].

Se $\overline{x}$ approssima x, definiremo:

- **errore assoluto**: $e_A(x) = |x - \overline{x}|$,
  errore relativo: $e_R(x) = \frac{|x-\overline{x}|}{|\overline{x}|} = \frac{e_A}{|\overline{x}|}$.
- **troncamento** (arrotondamento per difetto) di x a k cifre:
  $x_{(k)} = n.a_1 a_2 \dots a_k$
- **arrotondamento per eccesso** di x a k cifre:
  $x^{(k)} = n.a_1 a_2 \dots (a_k + 1) = x_{(k)} + 10^{-k}$
- **arrotondamento di x alla k-ma cifra** :
  $fl_k(x) = x_{(k)}$ se $a_{k+1} < 5$; $fl_k(x) = x^{(k)}$ se $a_{k+1} \geq 5$
- $x_{(k)} \leq x < x^{(k)}$,
  $|x - x_{(k)}| < 10^{-k}$, $\quad |x - x^{(k)}| < 10^{-k}$,
  $|x - fl_k(x)| < 0.5 * 10^{-k}$.

Virgola mobile

Per operare con i numeri decimali non nulli è spesso comodo rappresentarli in una forma normalizzata che ne metta in risalto l'ordine di grandezza, la cosiddetta **rappresentazione in virgola mobile** (*floating point numbers*):

$$x = \pm m \cdot 10^z = (\pm m, z), \quad 0.1 \leq m < 1, \quad z \in \mathbb{Z}$$

con m = **mantissa**, z = **esponente**.
La corrispondenza $x \to (m, z)$ è unica$^{(*)}$. Esempi:

$$9 \to (0.9, 1)$$
$$-123.81471 \to (-0.12381471, 3)$$
$$0.0000715 \to (0.715, -4).$$

$^{(*)}$ se escludiamo i numeri 9-periodici, che possiamo però identificare con i rispettivi equivalenti 0-periodici. Ad esempio $0.\overline{9} = 1$, $3.4\overline{9} = 3.5$, ecc. (del resto nessuna divisione tra interi genera un numero 9-periodico...)

Sul cambiamento di base

La scelta di usare la base 10 risponde all'esigenza di facilitare i calcoli, ma ovviamente non è l'unica possibile.
Ad esempio si è scoperto che gli Inca usavano per i calcoli un abaco (la Yupana) basato sulla notazione posizionale in base 40.
L'aritmetica dell'orologio (ore, minuti, secondi) è in base 60.
E i computer lavorano in base 2.
E' quindi utile poter passare da una base all'altra, convertendo la rappresentazione dei numeri.

Attenzione:

- un numero decimale finito in una base può restare finito o diventare periodico in un'altra
- un numero decimale periodico in una base può restare periodico o diventare finito in un'altra
- un numero decimale illimitato non periodico lo rimane in ogni base

Sul cambiamento di base (segue)

Come si capisce se un numero razionale x in base 10 sia finito o meno in un'altra base b?

- Si calcola la sua frazione generatrice: $x = \left(\frac{n}{m}\right)_{10}$.
- Se m divide una qualche potenza di b (b^k multiplo di m per qualche $k \in \mathbb{N}$), il numero sarà finito in base b (con k cifre per la parte frazionaria), altrimenti no.

Esempi (per $b = 2$):

$0.75 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4} \Rightarrow (0.75)_{10} = (0.11)_2$

$2.7 = \frac{27}{10} = \frac{27}{2x5} \Rightarrow$ in base due il numero diventa periodico (nessuna potenza di 2 può dividere 10)

Ci serve un algoritmo generale per il cambiamento di base, dalla base b alla base 10 e viceversa.

Algoritmi per il cambio di base

- **Dalla base b alla base 10**
  Se il numero $x = (a_n a_{n-1} ... a_1 a_0 . a_{-1} ... a_{-m})_b$,
  in base 10 sarà dato da:

$$x = (a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + ... + a_1 b + a_0 + a_{-1} b^{-1} + ... + a_{-m} b^{-m})_{10}$$

- **Dalla base 10 alla base b**
  Se $x = (n.m)_{10}$:
  - parte intera n: si divide per b finché il risultato non viene zero; i resti delle divisioni in ordine inverso danno la nuova p.i.
  - parte frazionaria m: si moltiplica per b finché il risultato non ha parte frazionaria nulla o si riottiene una parte frazionaria già incontrata; le parti intere dei prodotti nell'ordine trovato danno la nuova p.f.

Esercizi

- **Esercizio 1.**
  Se approssimiamo 9999 con 10000, e 0.99 con 1, quale delle due approssimazioni è più accurata?
- **Esercizio 2.**
  In quale base il numero periodico $0.\overline{3}_{10}$ diventa un numero con parte frazionaria finita e quale ne sarebbe la rappresentazione?
- **Esercizio 3.**
  Sapreste dire in quali basi b (tra 2 e 9) il numero decimale 0.375 avrebbe rappresentazione finita?
- **Esercizio 4.**
  Trasformate in base 10 i numeri $(1101.01)_2$ e $(210.012)_3$.
- **Esercizio 5.**
  Trasformate il numero 25.7 in base 2.

Soluzioni Esercizi

- **Esercizio 1.**
  Nel primo caso: $e_A = |10000 - 9999| = 1$, $e_R = 1/10000 = 10^{-4}$;
  nel secondo: $e_A = |1 - 0.99| = 0.01$, ma $e_R = 0.01/1 = 10^{-2}$;
  ne segue che l'approssimazione migliore è la prima.

- **Esercizio 2.**
  In base 3 il numero periodico $0.\overline{3}_{10}$ diventa semplicemente 0.1_3.

- **Esercizio 3.**
  $0.375 = \frac{3}{8}$; allora il numero avrà rappresentazione finita nelle basi $b = 2, 4, 6, 8$. Infatti 8 divide $2^3, 4^2, 6^3$ e ovviamente 8. Infatti

$$(0.375)_{10} = (0.011)_2 = (0.12)_4 = (0.213)_6 = (0.3)_8.$$

- **Esercizio 4.**
  $(1101.01)_2 = 8 + 4 + 1 + \frac{1}{4} = 13.25$
  $(210.012)_3 = 18 + 3 + \frac{1}{9} + \frac{2}{27} = 21.\overline{185}$
- **Esercizio 5.**
  Parte intera:
  $25 : 2 = 12, \ \ R = \mathbf{1}$
  $12 : 2 = 6, \quad R = \mathbf{0}$
  $6 : 2 = 3, \qquad R = \mathbf{0}$
  $3 : 2 = 1, \qquad R = \mathbf{1}$
  $1 : 2 = 0, \qquad R = \mathbf{1}$
  Parte frazionaria :
  $0.7 \times 2 = \mathbf{1}.4$
  $\mathbf{0.4} \times 2 = \mathbf{0}.8$
  $0.8 \times 2 = \mathbf{1}.6$
  $0.6 \times 2 = \mathbf{1}.2$
  $0.2 \times 2 = \mathbf{0}.4$
  $\mathbf{0.4} \times 2 = \mathbf{0}.8$ ecc. ecc
  Quindi: $(25.7)_{10} = (11001.1\overline{0110})_2$, numero periodico come previsto.

Algoritmi tramite metodi iterativi

Chiamiamo metodo iterativo a un passo quello definito a partire da un dato iniziale x_0 e da una legge F che trasforma (attraverso una formula o dei calcoli ben definiti) un dato in input in un dato output, legge da applicare ripetute volte a partire da x_0. In formule:

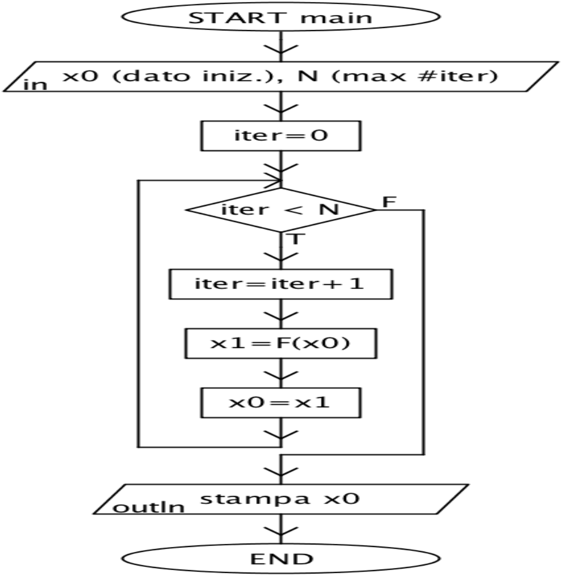
Dato x_0, calcolare $x_{n+1} = F(x_n)$ per $n = 0, 1, 2, \ldots$

finché un certo criterio di arresto non viene soddisfatto: ad esempio si può richiedere un numero fisso di iterazioni da raggiungere oppure di fermarsi appena il valore delle iterate soddisfa una data condizione.

Nomi equivalenti: successioni per ricorrenza, sistemi dinamici discreti. Sono alla base anche di numerosi modelli matematici per le applicazioni in biologia, fisica, economia, ecc.

Definizione. Chiamiamo valore di equilibrio (o punto fisso) della legge F un valore c tale che $F(c) = c$.

Diagramma di flusso



Esercizi

1. Data la legge $F(x) = 2x - 1$, calcolarne il valore di equilibrio. Scrivere le prime 5 iterazioni partendo da $x_0 = 0$ e da $x_0 = 2$. Come si comportano le sequenze rispetto all'equilibrio?
2. Scrivere le prime 6 iterazioni delle leggi $F_1(x) = x/2$ e $F_2(x) = -x/2$ partendo da $x_0 = 1$. Come si comportano le sequenze rispetto al valore di equilibrio?
3. Date le sequenze di valori:
   2 5 8 11 14 ...,
   0 1 2 5 26 677 ...,
   8 7 10 9 12 11 ...
   provate a dedurre le leggi che le hanno rispettivamente generate.
4. Data la legge $F(x) = 3x + 4$, se $x_3 = 52$, quale è stato il dato iniziale x_0 da cui si è partiti?

Soluzioni

1. Il valore di equilibrio si ottiene da $x = 2x - 1 \;\Rightarrow x = 1$. Ecco le prime 5 iterazioni: $\{0 \quad -1 \quad -3 \quad -7 \quad -15 \ldots\}$ e $\{2 \quad 3 \quad 5 \quad 9 \quad 17 \ldots\}$; la prima sequenza decresce a $-\infty$, la seconda cresce verso $+\infty$.
2. Le due leggi hanno entrambe equilibrio in $x = 0$. Ecco le prime 6 iterazioni partendo da $x_0 = 1$
   $1/2 \quad 1/4 \quad 1/8 \quad 1/16 \quad 1/32 \quad 1/64 = 1/2^6 \quad \ldots$
   $-1/2 \quad 1/4 \quad -1/8 \quad 1/16 \quad -1/32 \quad 1/64 = 1/2^6 \quad \ldots$
   entrambe tendono a zero, la prima decrescendo, la seconda oscillando.
3. Ecco le leggi che le hanno generate:
   $F(x) = x + 3, \quad F(x) = x^2 + 1,$
   $F(x) = x - 1$ se x pari, $F(x) = x + 3$ se x dispari.
4. Vale $x_n = \frac{1}{3}(x_{n+1} - 4)$, con $x_3 = 52$; allora:
   $x_2 = \frac{1}{3}(52 - 4) = 16, \quad x_1 = \frac{1}{3}(16 - 4) = 4, \quad x_0 = \frac{1}{3}(4 - 4) = 0.$

Un esempio di metodo iterativo per il calcolo di $\sqrt{2}$

L'idea è quella di generare una sequenza di valori che si avvicinino sempre più al valore cercato, che data la sua irrazionalità potrà solo essere approssimato con una certa precisione.

Idea geometrica: $\sqrt{2}$ è la misura del lato del quadrato di area 2. Partiamo allora da un rettangolo di dimensioni $x_0 > \sqrt{2}$ e $2/x_0$ (quindi di area 2) e cerchiamo di generare una sequenza di rettangoli di dimensioni via via più vicine tra loro, che si avvicini quindi sempre più al quadrato cercato.

Osserviamo che la media aritmetica tra i valori x_0 e $2/x_0$ sarà compresa tra di essi. Poniamo quindi:

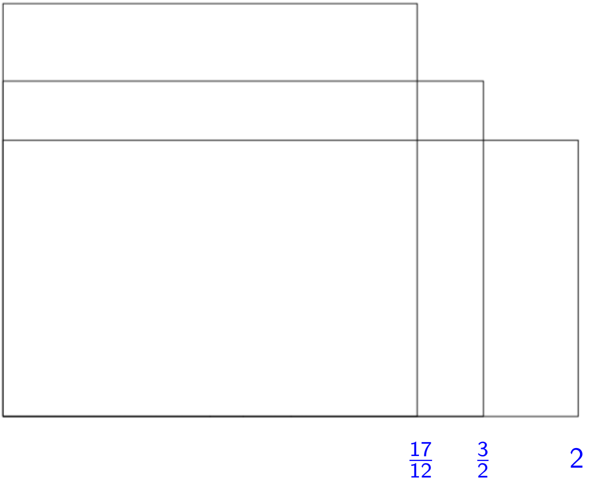
$$x_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{2}{x_0}\right)$$

Ad es. se $x_0 = 2$, allora $x_1 = 3/2 = 1.5$, e passeremo quindi da un rettangolo di dimensioni 2×1 a un rettangolo di dimensioni $3/2 \times 4/3$.

Ripetendo il procedimento:

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{2}{x_1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{4}{3}\right) = \frac{17}{12} = 1.4166666...$$

Idea grafica (prime due iterazioni)



L'algoritmo di Erone per il calcolo di $\sqrt{2}$

Dato $x_0 > \sqrt{2}$, calcola $x_{n+1} = F(x_n) = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$ per $n = 0, 1, 2, ...$

Partendo per esempio da $x_0 = 2$, i primi 5 valori saranno:
$x_1 = 1.5$, $x_2 = 1.416666666666667$, $x_3 = 1.414215686274510$,
$x_4 = 1.414213562374690$, $x_5 = 1.414213562373095$
Con sole 5 iterazioni otteniamo una precisione di oltre 10^{-10}!
Idea algebrica: partiamo dall'equazione $x^2 = 2$; allora

$$x = \frac{2}{x} \quad \rightarrow \quad 2x = x + \frac{2}{x} \quad \rightarrow \quad x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$$

L'algoritmo di Erone si ottiene trasformando l'ultima equazione (soddisfatta da $\sqrt{2}$) in un metodo iterativo innescato da un valore iniziale.
Funziona sempre? Che succede se prendiamo il metodo : $x_{n+1} = \frac{2}{x_n}$?

Proviamo a dimostrare che funziona!

Esercizio.

- Calcolare il valore di equilibrio della legge F;
- mostrare che se $x_0 > \sqrt{2}$ vale sempre $x_n > 0$;
- provare che vale sempre $x_n^2 > 2$ (cioè i valori saranno sempre a destra di $\sqrt{2}$) [usare la disuguaglianza $a^2 + b^2 \geq 2ab$] ;
- provare che vale sempre $x_n > x_{n+1}$ (cioè la sequenza decresce);
- concludere che la sequenza si avvicina decrescendo proprio a $\sqrt{2}$.

Soluzione

(i) Ripercorrendo a ritroso l'idea algebrica si vede che $\sqrt{2}$ è un equilibrio per F;

(ii) ad es. se $x_0 = 2 > 0$, le iterazioni successive sono ottenute come media aritmetica di due quantità positive.

(iii) Dalla disuguaglianza $(a^2 + b^2) \geq 2ab$ segue che

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) \geq \frac{1}{2} 2\sqrt{x_n}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x_n}} = \sqrt{2},$$

che è quanto dovevamo provare.

(iv) Dobbiamo dimostrare che vale $x_n > x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$; si vede che ciò si verifica se e solo se $x_n^2 > 2$ (dimostrato al punto precedente).

(v) La sequenza decresce mantenendosi sempre maggiore di $\sqrt{2}$; questo basta a dimostrare che converga a un numero $L \geq \sqrt{2}$. Ma L dovrà per forza verificare l'equazione $2L = L + 2/L$, cioè $L^2 = 2$, quindi $L = \sqrt{2}$. Quindi l'algoritmo di Erone fornisce un metodo pratico per approssimare questo numero irrazionale!

Si dimostra di più !

Per stimare la bontà dell'algoritmo possiamo anche valutare la sua efficienza (o *velocità di convergenza*), e vorremmo anche un buon *criterio di arresto* (stop con la certezza di aver raggiunto la precisione desiderata). Vale

$$x_n - \sqrt{2} < \frac{x_0 - \sqrt{2}}{2^n} \ .$$

Per ogni n si ha $x_n > \sqrt{2}$, quindi $2/x_n < \sqrt{2}$. Allora

$$x_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) - \sqrt{2} < \frac{1}{2}(x_n + \sqrt{2}) - \sqrt{2} < (x_n - \sqrt{2})/2;$$

quindi la differenza tra x_n e il valore $\sqrt{2}$ tende a zero al crescere di n, e l'errore si dimezza almeno ad ogni passo.
In realtà si può addirittura dimostrare che l'errore a ogni passo si riduce come il quadrato dell'errore precedente. In altre parole il numero delle cifre significative corrette di $\sqrt{2}$ si raddoppia all'incirca ad ogni iterazione !

Un criterio d'arresto

Vale

$$x_{n+1} - \sqrt{2} < x_n - x_{n+1} \ .$$

Ancora dalla relazione vista al punto precedente: $2x_{n+1} < x_n + \sqrt{2}$, da cui, sottraendo a entrambi i membri $(x_{n+1} + \sqrt{2})$ si ottiene la tesi, che afferma in sostanza che se mi fermo dopo $n+1$ passi, la mia distanza dal valore corretto di $\sqrt{2}$ è minore della differenza $x_n - x_{n+1}$. Abbiamo quindi trovato un ottimo criterio d'arresto per il nostro algoritmo: ci riterremo soddisfatti, e quindi fermeremo le iterazioni, non appena quella differenza sarà diventata più piccola della precisione voluta. Ad esempio se vogliamo k cifre corrette:

$$\text{STOP quando } x_n - x_{n+1} < \tfrac{1}{2} \times 10^{-k}$$

Generalizzazioni

Quanto visto per $\sqrt{2}$ si generalizza facilmente:

- L'algoritmo per approssimare la radice quadrata di un qualunque numero positivo α sarà dato da

$$x_{n+1} = F(x_n) = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{\alpha}{x_n}\right) \quad \text{per } n = 0, 1, 2, \dots$$

- Possiamo passare alla radice cubica di un numero positivo estendendo l'idea geometrica: vogliamo trasformare un parallelepipedo di base quadrata (di lato x_0) e altezza α/x_0^2 (quindi di volume pari ad α) via via verso un cubo il cui lato sarà pertanto il numero cercato. Usando ancora la media aritmetica delle dimensioni, si ottiene la formula:

$$x_{n+1} = F(x_n) = \frac{1}{3}\left(2x_n + \frac{\alpha}{x_n^2}\right) \quad \text{per } n = 0, 1, 2, \dots$$

- Quale sarebbe un algoritmo per calcolare $\sqrt[5]{\alpha}$?

Generalizzazioni

Quanto visto per $\sqrt{2}$ si generalizza facilmente:

- L'algoritmo per approssimare la radice quadrata di un qualunque numero positivo α sarà dato da

$$x_{n+1} = F(x_n) = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{\alpha}{x_n}\right) \quad \text{per } n = 0, 1, 2, \ldots$$

- Possiamo passare alla radice cubica di un numero positivo estendendo l'idea geometrica: vogliamo trasformare un parallelepipedo di base quadrata (di lato x_0) e altezza α/x_0^2 (quindi di volume pari ad α) via via verso un cubo il cui lato sarà pertanto il numero cercato. Usando ancora la media aritmetica delle dimensioni, si ottiene la formula:

$$x_{n+1} = F(x_n) = \frac{1}{3}\left(2x_n + \frac{\alpha}{x_n^2}\right) \quad \text{per } n = 0, 1, 2, \ldots$$

- Quale sarebbe un algoritmo per calcolare $\sqrt[5]{\alpha}$? $x_{n+1} = \frac{1}{5}\left(4x_n + \frac{\alpha}{x_n^4}\right)$

GRAZIE!

Continua...