Laboratorio sui numeri figurati

Obiettivi:

a) Attraverso la rappresentazione grafica dei numeri riconoscere regolarità da esprimere in formule algebriche.

b) Concretizzare attraverso la rappresentazione grafica una definizione ricorsiva.

Gli studenti vengono divisi in piccoli gruppi; vengono consegnate le seguenti schede di lavoro e viene richiesto ai gruppi di fornire risposte scritte. Ciascun gruppo ha a disposizione matite colorate e fogli dove poter rappresentare i numeri. L'insegnante osserva il comportamento degli studenti, prendendo nota delle strategie individuate e delle modalità espressive utilizzate.

SCHEDA DI LAVORO n°1

Prova a rappresentare un numero naturale mediante delle figure, contenenti tanti punti quanti ne indica il numero stesso.

- Rappresenta in vario modo i numeri 3,7,12,10
- Rappresenta, con figure formate da punti i tre numeri pari 2, 6, 8 e i tre numeri dispari 3, 7, 9.
- Quali figure ti sembrano più interessanti? Per quali motivi ?
- Qual è la figura che descrive meglio l'essere "pari" ?
- Qual è la figura che descrive meglio l'essere "dispari" ?

Rappresenta i numeri utilizzando solo due righe.

Indicato con n il generico numero naturale, cerca una formula che rappresenti i numeri pari e i numeri dispari (osserva le precedenti rappresentazioni su due righe)

Indica i numeri pari con P_n e i numeri dispari con D_n.

Rappresenta in modo opportuno:
- la somma del numero pari 4 e del numero pari 6,
- la somma del numero pari 6 e del numero dispari 5,
- la somma del numero dispari 7 e del numero dispari 5,

per mostrare, con le figure, le regole della somma dei numeri pari e dei numeri dispari.

Domande

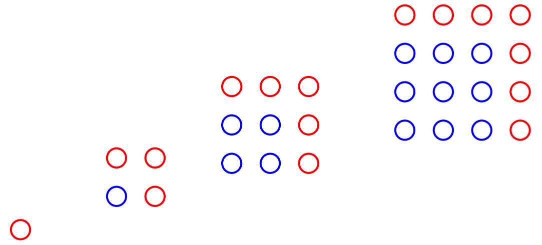
- Completa la seguente scrittura: $P_4 + P_6 = \dots$?
- Completa la seguente scrittura: $P_6 + D_5 = \dots$?
- Completa la seguente scrittura: $D_7 + D_{15} = \dots$?

Sintetizza i tre schemi precedenti usando i simboli con gli indici che abbiamo introdotto in precedenza, si ottengono le seguenti formule:

$$P_m + P_n = P_{m+n}$$
$$P_m + D_n = D_{m+n}$$
$$D_m + D_n = P_{m+n-1}$$

NUMERI QUADRATI

Disegnamo alla lavagna delle figure con una particolare struttura, senza dare altre informazioni sulle modalità di costruzione. Disegnamo dei punti colorati nel modo seguente (per ogni numero, prima i punti blu e poi quelli rossi):



La disposizione dei colori ci fa evidenziare l'accrescimento ricorsivo, fissando l'attenzione sul cosiddetto *gnomone*, ovvero sulla parte da aggiungere ad una figura per ottenerne un'altra della stessa forma

SCHEDA DI LAVORO n° 2

Numeri quadrati

Costruisci i primi 5 numeri quadrati.
Sai spiegare perché è bene usare due colori?

Identifica i diversi numeri quadrati attraverso il *numero di posto* ; sapresti indicare il numero quadrato di posto 9?

Completa la seguente tabella

Posto	1	2	3	4	…	n
Q	1	4			…	

Se conosci il numero quadrato di posto 1, per ricavare Q_2 devi aggiungere ….

Se conosci il numero quadrato di posto 2, per ricavare Q_3 devi aggiungere ….

Se conosci il numero quadrato di posto *n*, per ricavare Q_{n+1} devi aggiungere ….

Se conosci il numero quadrato di posto *n+1*, per ricavare Q_{n+2} devi aggiungere ….

Qual è la caratteristica comune di tutti i numeri che hai appena scritto?

Sai che $Q_4 = 16$, quante unità devi togliere da 16 per trovare il numero quadrato che si trova 3 posti prima di Q_4 ?

Sai che $Q_n = n^2$; sai trovare il numero quadrato Q_{n-3} ?

Completa le seguenti formule:

$(n+1)^2 = n^2 + (\ldots\ldots + \ldots\ldots)$

$(n+2)^2 = n^2 + (\ldots\ldots + \ldots\ldots)$

$(n+k)^2 = n^2 + (\ldots\ldots + \ldots\ldots)$

$(n-1)^2 = n^2 - \ldots\ldots + \ldots\ldots$

$(n-h)^2 = n^2 - \ldots\ldots + \ldots\ldots \quad , \quad h \le \ldots$

SCHEDA DI LAVORO n° 3

Numeri rettangolari

Costruisci i primi 5 numeri figurati che hanno la seguente caratteristica:
ogni numero deve avere la forma geometrica di un rettangolo
ogni rettangolo deve avere la base composta da tante unità quant'è il numero di posto
l'altezza deve avere un'unità in più rispetto alla base
Usa dischetti di colori diversi per passare da un numero al successivo.

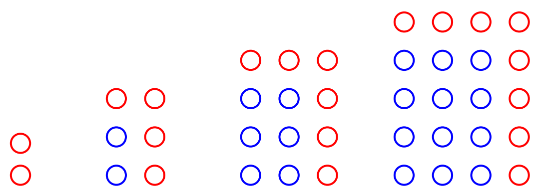
Individua anche qui il numero delle unità rosse di ogni rettangolo; si tratta di numeri….
Completa una tabella analoga alla precedente:

Posto	1	2	3	4	…	n
R	2	6			…	

Qual è la formula dell'ennesimo numero rettangolare R_n ?
Le dimensioni dell'ennesimo numero rettangolare sono.... e ......;
le dimensioni del numero che segue l'ennesimo sono......e........
Come si calcola l' $n+1$ esimo numero rettangolare se si conosce l'ennesimo?
Un numero rettangolare può essere scomposto in un numero quadrato più un certo numero di unità: scrivi in questo modo R_n .
C'è qualche caratteristica dei numeri rettangolari che ritieni necessario evidenziare?

Indica, tra le formule che hai ricavato dalle osservazioni precedenti quelle che, pur apparendo con scritture diverse, indicano lo stesso oggetto.

Riportiamo il risultato della domanda del primo punto:

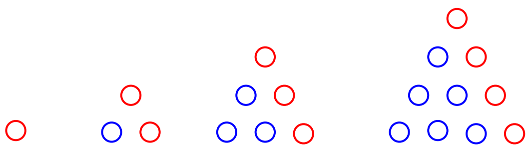


Durante l'attività si può evidenziare lo sviluppo del prodotto di un monomio per un polinomio e di due polinomi

SCHEDA DI LAVORO n° 4

I numeri triangolari

Sono qui sotto disegnati i primi 5 numeri triangolari



Ripeti le osservazioni fatte per i numeri precedenti, individuando il numero di unità rosse di ogni triangolo.

Che relazione c'è fra ogni numero triangolare T_n ed il corrispondente numero rettangolare R_n ?

Cerca una formula che esprima un numero triangolare T_n in funzione del posto *n* che occupa.

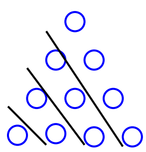
Un numero triangolare è la metà del corrispondente numero rettangolare della scheda precedente; si avrà quindi $T_n=\frac{1}{2}R_n$

La formula che esprime l'ennesimo numero triangolare in funzione del posto è

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Esercizi

1) In un numero triangolare qualsiasi si possono individuare tutti i numeri triangolari precedenti: il disegno seguente conferma la verità dell'affermazione.



Il numero è stato suddiviso in strisce parallele: si può dire quindi che $T_4 = 1+2+3+4$;

non dimentichiamo però che si può arrivare a T_4 anche con la formula che si basa sul numero di posto.

Indica T_{10} come somma di strisce successive a partire da 1; indica ora T_{10} usando la formula che si riferisce al posto del numero.

$\frac{10 x 11}{2}$ =1+2+3+4+5+6+7+8+9+10]

2) Suddividi un numero quadrato nei successivi gnomoni che, a partire da 1 , lo costituiscono. Con questa interpretazione il numero quadrato Q_4 può essere scomposto in 1+…+…+… , oppure essere visto come …

Allo stesso modo Q_{10} = 1+……………….+… oppure Q_{10} = ….

3) Trova la somma dei primi 100 numeri naturali. Trova la somma dei primi *n* numeri naturali.

4) Trova la somma dei primi 100 numeri dispari. Trova la somma dei primi *n* numeri dispari.

5) Trova la somma dei primi 100 numeri pari. Trova la somma dei primi *n* numeri pari.

6) Stabilisci se c'è qualche regolarità nella somma di due numeri triangolari consecutivi

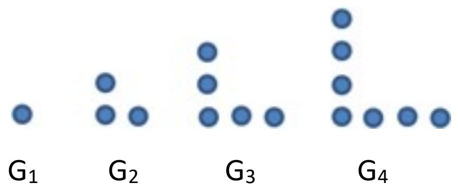
7) E' possibile che la somma di due numeri quadrati consecutivi sia un numero quadrato?

E' possibile trovare due numeri quadrati la cui somma sia ancora un quadrato?

SCHEDA DI LAVORO N 5

Gli Gnomoni

Gli gnomoni sono i numeri che possono essere rappresentati in questo modo:



Il 162 è uno gnomone? Nel caso lo fosse, qual è il suo numero di posto?

Qual è la caratteristica principale degli gnomoni?

Il 307 è uno gnomone? Nel caso lo fosse, qual è il suo numero di posto

Qual è la caratteristica principale dei numeri $G_n + 1$?

Cerca di costruire il numero quadrato Q_4 utilizzando gnomoni.

Quale relazione esiste tra numeri quadrati e gnomoni?

Quanti gnomoni occorrono per ottenere il numero quadrato Q_4?

Prova a generalizzare

La discussione sui risultati dei lavori di gruppo deve mirare a

- riconoscere e definire lo gnomone
- evidenziare il fatto che gli gnomoni si succedono secondo i primi numeri dispari
- sottolineare la formula funzionale e la formula ricorsiva di Q_n e fissarne la notazione

- evidenziare l'equivalenza di formule giustificata, oltre che con il riferimento alla stessa figura, anche con le proprietà algebriche delle operazioni.

In particolare, si può sottolineare la formula di sviluppo del quadrato di un binomio.