

RELAZIONE:

ALESSIO SALUSTRI III AS

## COME COSTRUIRE UNA MERIDIANA:

### OBBIETTIVO:

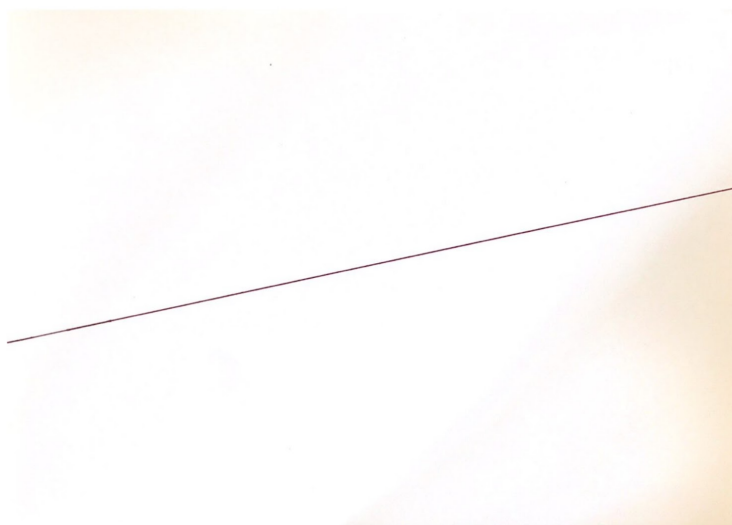
Creare un orologio solare orizzontale personalizzato, tenendo conto della posizione e che riporti le coniche diurne delle date dei compleanni dei componenti della mia famiglia. (08\08, 07\02)

### MATERIALI E STRUMENTI:

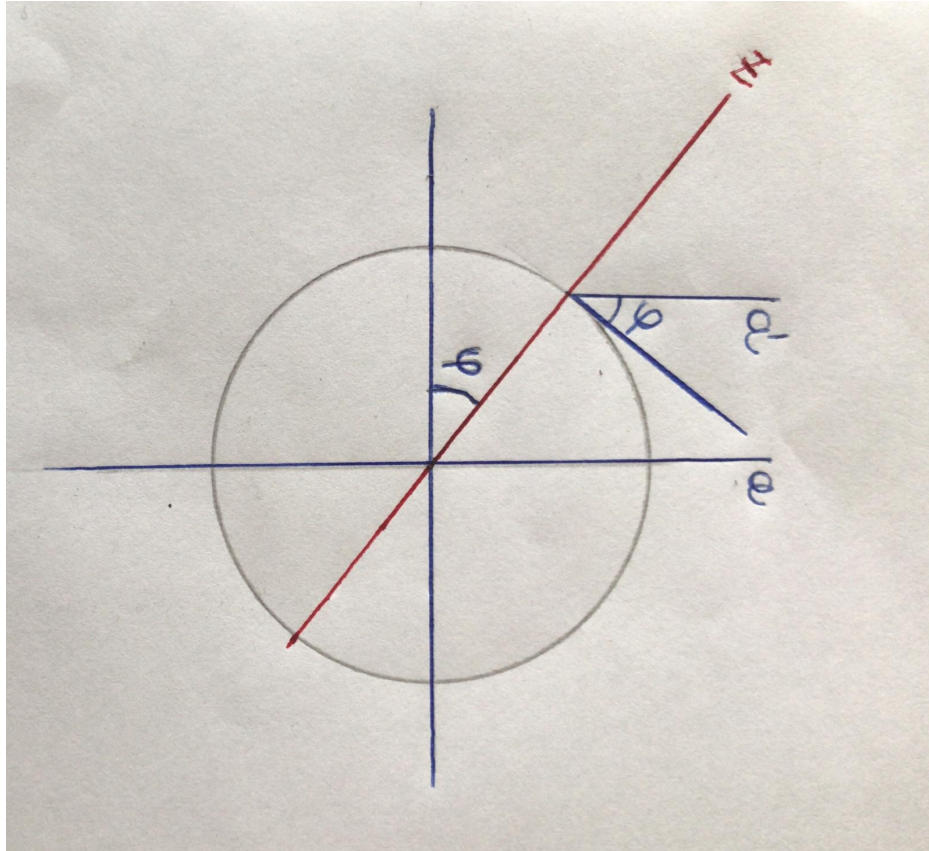
Pavimento orizzontale illuminato dal sole per la maggior parte della giornata ed in particolare alle ore 12:00 (ora solare); lastra di marmo (o di altro materiale a piacimento; si consiglia un materiale solido, abbastanza spesso e resistente agli agenti atmosferici, almeno 3-5 cm); stilo in rame o ferro di una lunghezza a piacimento in base alla grandezza della lastra; trapano e punta da muro (per fissare lo stilo sulla lastra); livella (lunga possibilmente 50 cm o più); traccia del meridiano locale sul pavimento che passerà per lo stilo della meridiana (ricavato già in precedenza); una riga lunga; 2 squadre (30-60° e 45°); foglio A4; matita; tavola delle effemeridi o app per android SOLAR INFO (scaricabile gratuitamente dal Play Store); penna; silicone; colore acrilico (per la decorazione finale); smalto (per evitare che il colore svanisca nel corso del tempo).

### PROCEDIMENTO:

Si inizia selezionando un piano orizzontale illuminato dal sole per la maggior parte della giornata, dove realizzeremo la nostra meridiana orizzontale. Stabiliamo la posizione della nostra lastra e la fissiamo orizzontalmente con del silicone, aiutandoci con la livella per posizionarla nel modo più orizzontale possibile. Una volta fissata la lastra a terra, individuiamo il meridiano locale passante per la lastra (i vari metodi sono illustrati nelle altre relazioni). Di seguito individuiamo un punto sul meridiano, il più a SUD possibile sulla lastra, dove posizioneremo il nostro stilo (a  $\frac{1}{6}$  della lunghezza del meridiano sulla lastra), creiamo subito con il trapano il foro per lo stilo. Poi, si prende un foglio della grandezza della lastra e si riporta il meridiano locale sul foglio, successivamente riportiamo il punto dello stilo anche sul foglio (punto O).

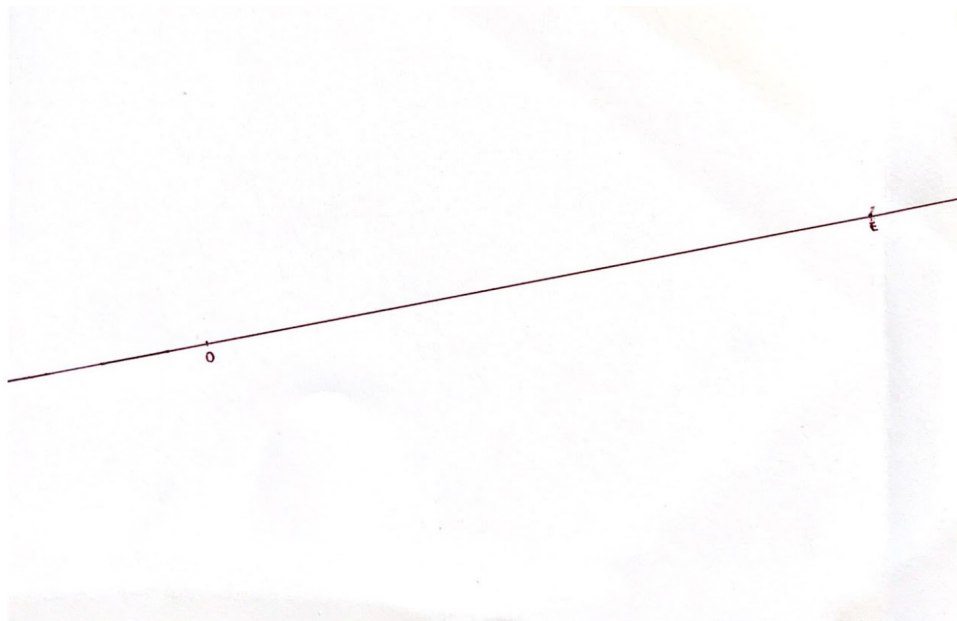


Il passo successivo è definire la lunghezza dello stilo. Lo stilo dell'orologio solare dovrà essere parallelo all'asse della terra. Ciò consentirà di ottenere un'ombra sovrapposta alle linee orarie. Per posizionare nel modo corretto lo stilo sarà sufficiente sovrapporlo alla linea meridiana e sollevarlo con la punta verso NORD di  $\phi$  gradi (angolo della latitudine).

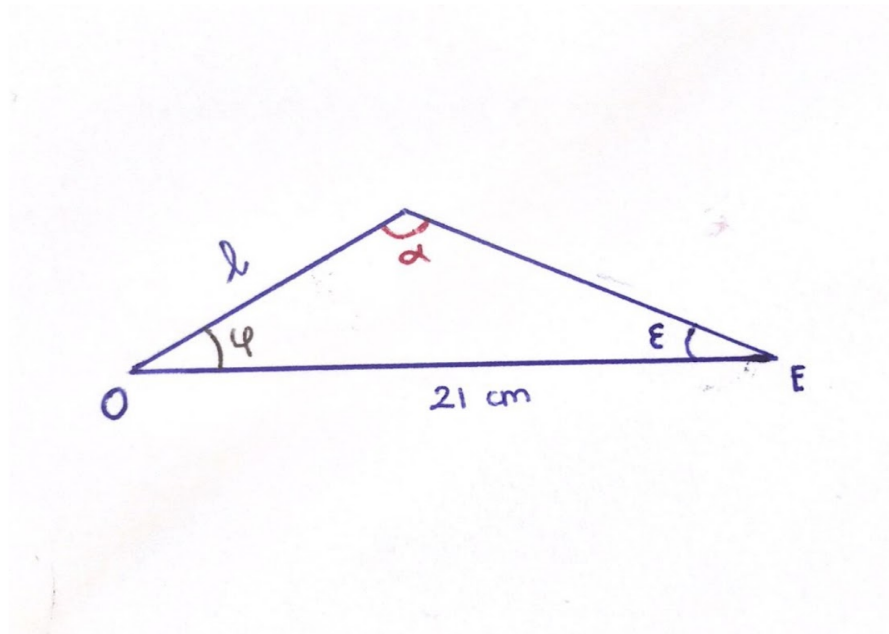


#### COME DEFINIRE LA LUNGHEZZA DELLO STILO:

La lunghezza dello stilo deve essere tale che nel giorno in cui l'ombra sarà più lunga (nel nostro emisfero, quello boreale, durante il solstizio d'inverno) non fuoriesca dalla lastra. Quindi stabiliamo il punto in cui l'ombra sarà più lunga (punto E) a 2 cm dal bordo della lastra (la distanza può variare in base alla grandezza della lastra).



La distanza OE, è la distanza massima che può avere l'ombra ( 21 cm). A questo punto, tramite il teorema dei seni si calcola la lunghezza dello stilo, sapendo che un angolo corrisponde alla latitudine del luogo (in questo caso a Poggio Mirteto  $\rightarrow \varphi = 42,26^\circ$ ), l'altro  $\alpha = 90^\circ + 23.45^\circ$  (inclinazione dell'asse terrestre) =  $113,45^\circ$ , che il lato opposto all'angolo  $\varphi$  misura 21 cm e che l'angolo opposto a  $\ell$  misura:  $\varepsilon = 180^\circ - \varphi - \alpha = 180^\circ - 42,26^\circ - 113,45^\circ = 24,29^\circ$ .



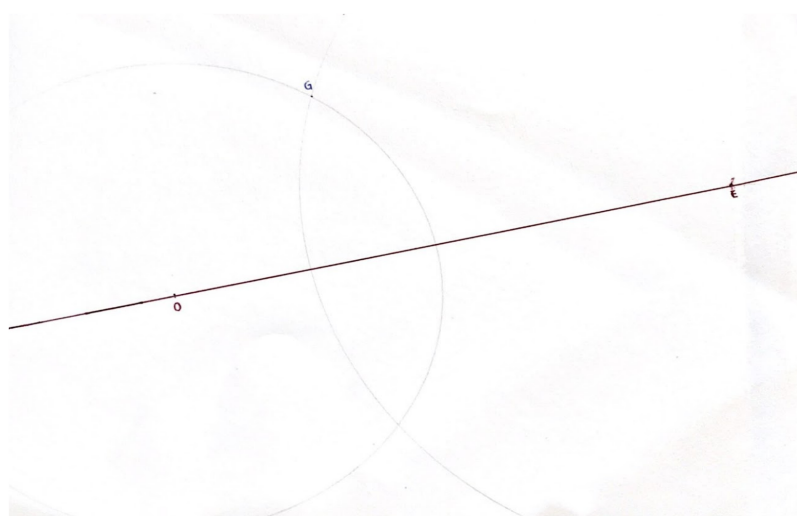
In base al teorema dei seni la lunghezza  $\ell$  dello stilo è:

$$\frac{\ell}{\sin \varepsilon} = \frac{OE}{\sin \alpha} \rightarrow \ell = \frac{OE \cdot \sin \varepsilon}{\sin \alpha} \rightarrow \ell = \frac{21 \text{ cm} \cdot \sin (24,29^\circ)}{\sin (113,45^\circ)} \simeq 9,4 \text{ cm}$$

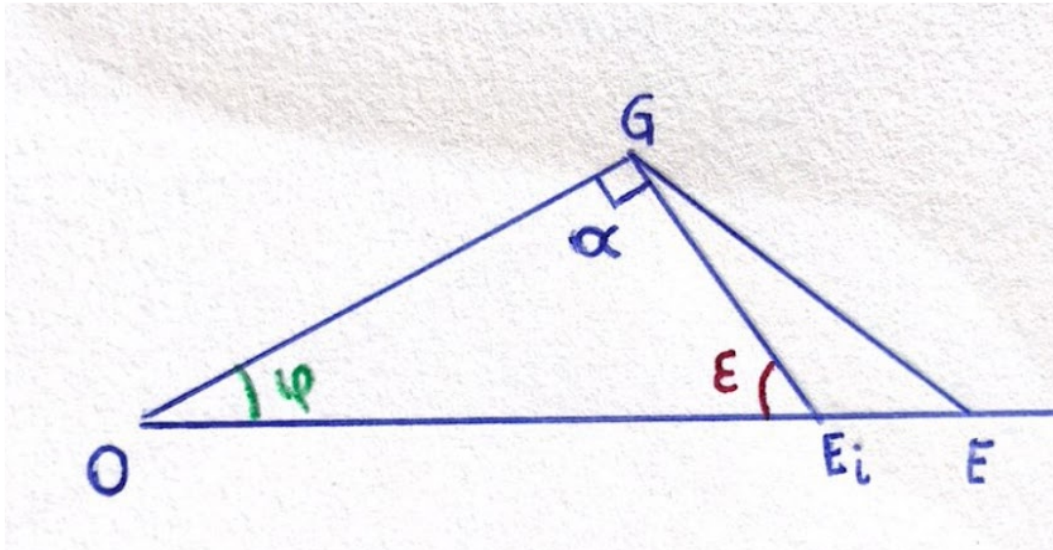
Conoscendo ora la lunghezza dello stilo, si procede a calcolare la lunghezza del lato opposto ad  $\varphi$ , che chiameremo  $n$ . Sempre grazie al teorema dei seni:

$$\frac{n}{\sin \varphi} = \frac{OE}{\sin \alpha} \rightarrow n = \frac{OE \cdot \sin \varphi}{\sin \alpha} \rightarrow n = \frac{21 \text{ cm} \cdot \sin (42,26^\circ)}{\sin (113,45^\circ)} \simeq 15,4 \text{ cm}$$

Una volta trovato anche  $n$  si può procedere a disegnare il triangolo stilare sul foglio. Con un compasso si disegna una circonferenza con apertura  $\ell$  e centro O, ed un'altra con apertura  $n$  e centro E. Il punto di intersezione tra le due circonferenze si identifica con G. (vedi figura 4)

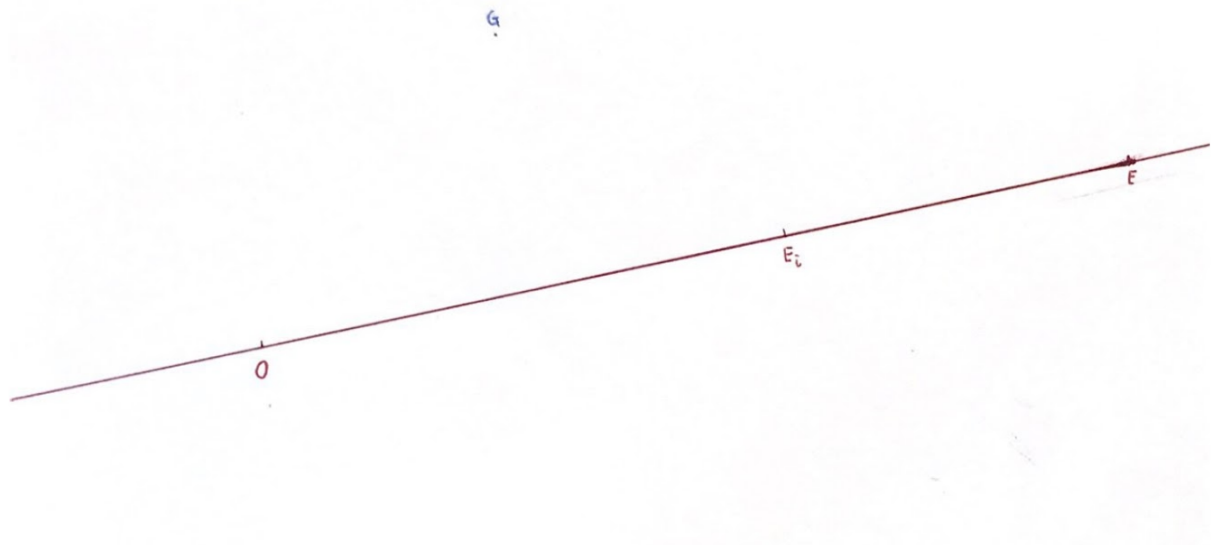


Una volta stabilito il punto G, si possono cancellare le circonferenze di costruzione e si trova il punto  $E_i$ , ovvero il punto dove cade l'ombra il giorno degli equinozi. Sapendo che il giorno degli equinozi l'angolo formato dal fascio di luce e lo stilo è  $\alpha = 90^\circ$  ( $\varphi$  resta invariato poiché corrisponde alla latitudine, mentre  $\varepsilon = 47,74^\circ$ ), calcoliamo sempre con il teorema dei seni la lunghezza del segmento  $OE_i$ . (vedi immagine 5)

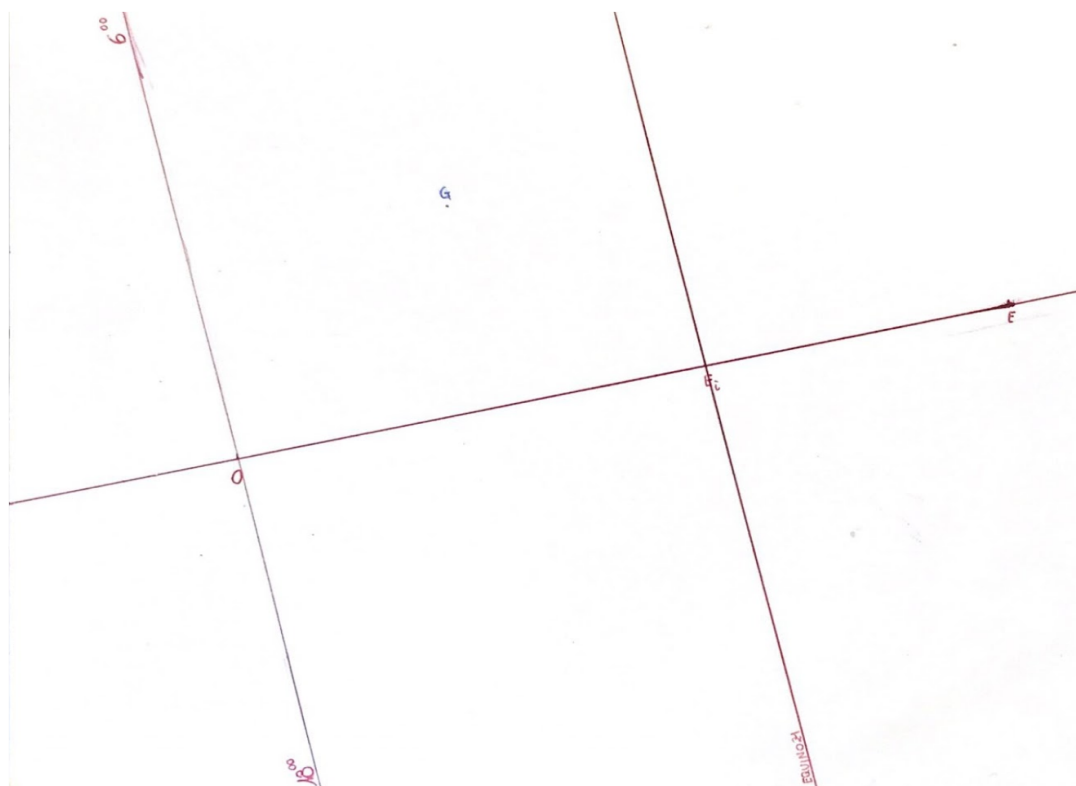


$$\frac{OE_i}{\sin \alpha} = \frac{\ell}{\sin \varepsilon} \rightarrow \frac{OE_i}{\sin 90^\circ} = \frac{9,4}{\sin 47,74^\circ} \rightarrow OE_i = \frac{9,4 \cdot \sin 90^\circ}{\sin 47,74^\circ} \simeq 12,7 \text{ cm}$$

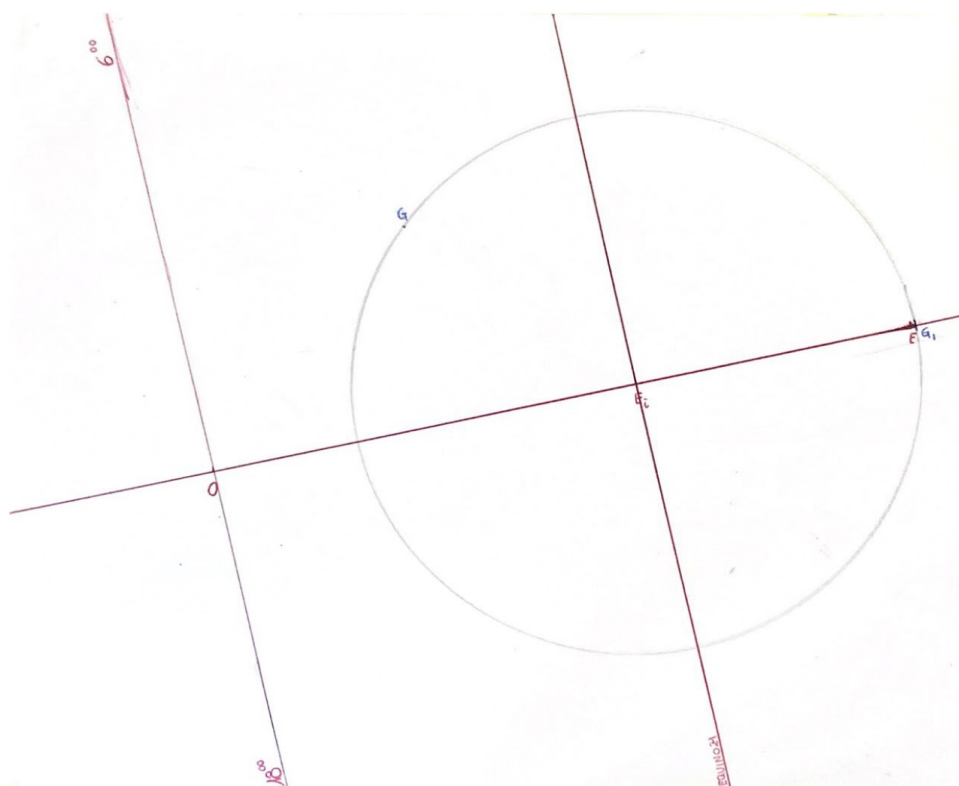
Si riporta quindi il punto  $E_i$  sul meridiano locale a 12,7 cm da O, verso NORD (dalla parte del punto E). (vedi immagine 6)



A questo punto si procede a tracciare la conica degenera in una retta descritta dal sole il giorno degli equinozi. Con un compasso, o con l'aiuto delle squadre si disegna una retta perpendicolare al meridiano locale passante per il punto  $E_i$ . Si traccia anche la retta oraria delle  $6^{00} - 18^{00}$ : retta perpendicolare alla linea meridiana in O. (vedi immagine 7)

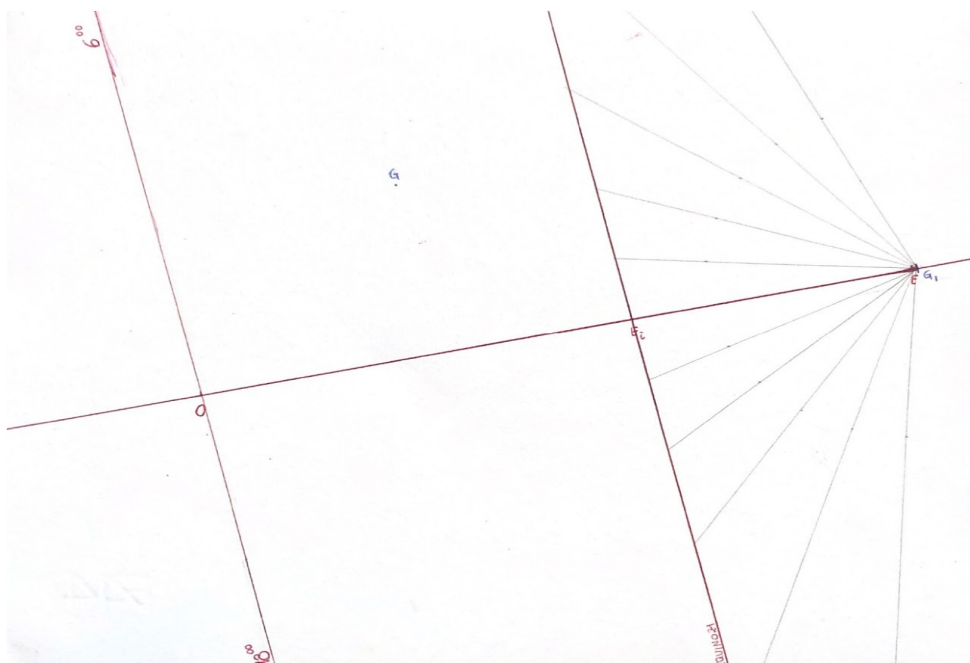


Ora si possono disegnare le rette delle ore. Si trova prima la circonferenza oraria, ribaltando il punto  $G$  sul meridiano locale, che chiameremo  $G_1$ . Con apertura  $GE_i$  del compasso puntato in  $E_i$  troviamo il punto di intersezione con il meridiano locale:  $G_1$  (vedi immagine 8).

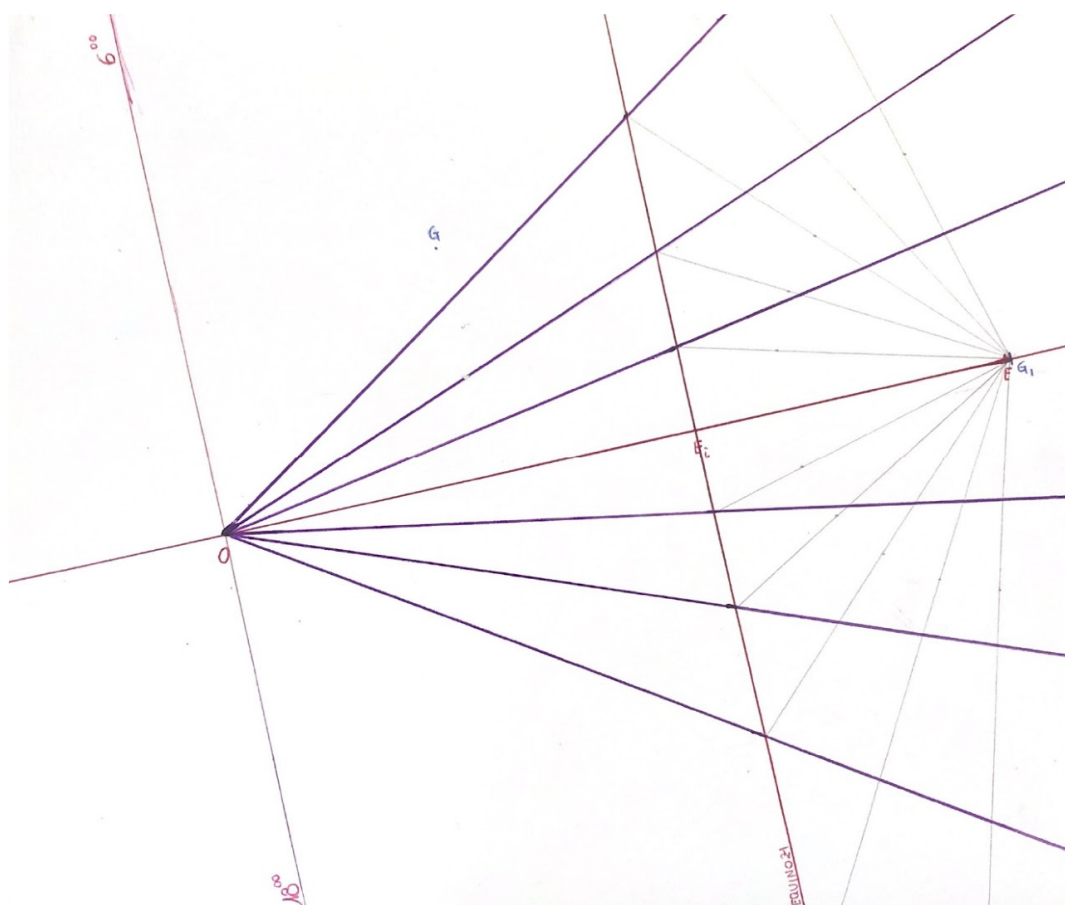


Di seguito, con il goniometro centrato in  $G_1$  si tracciano da  $15^\circ$  a  $165^\circ$ , ogni  $15^\circ$ , i punti, e le rette che li collegano  $G_1$ . (vedi immagine 9).

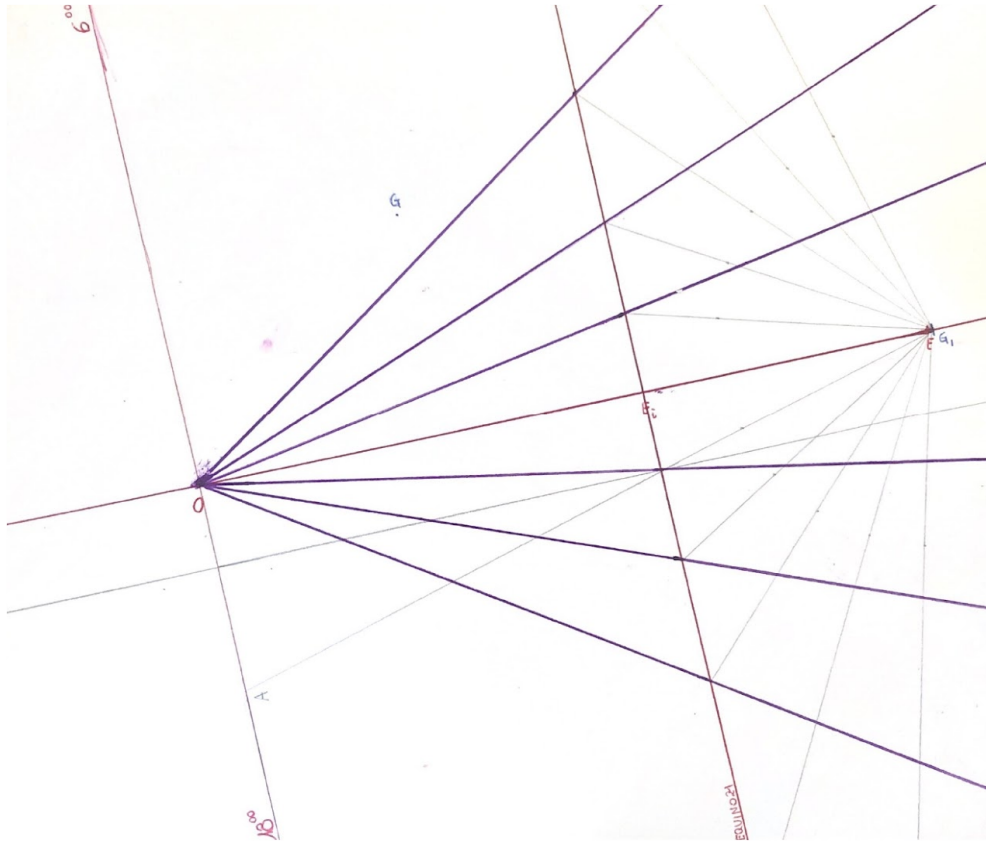




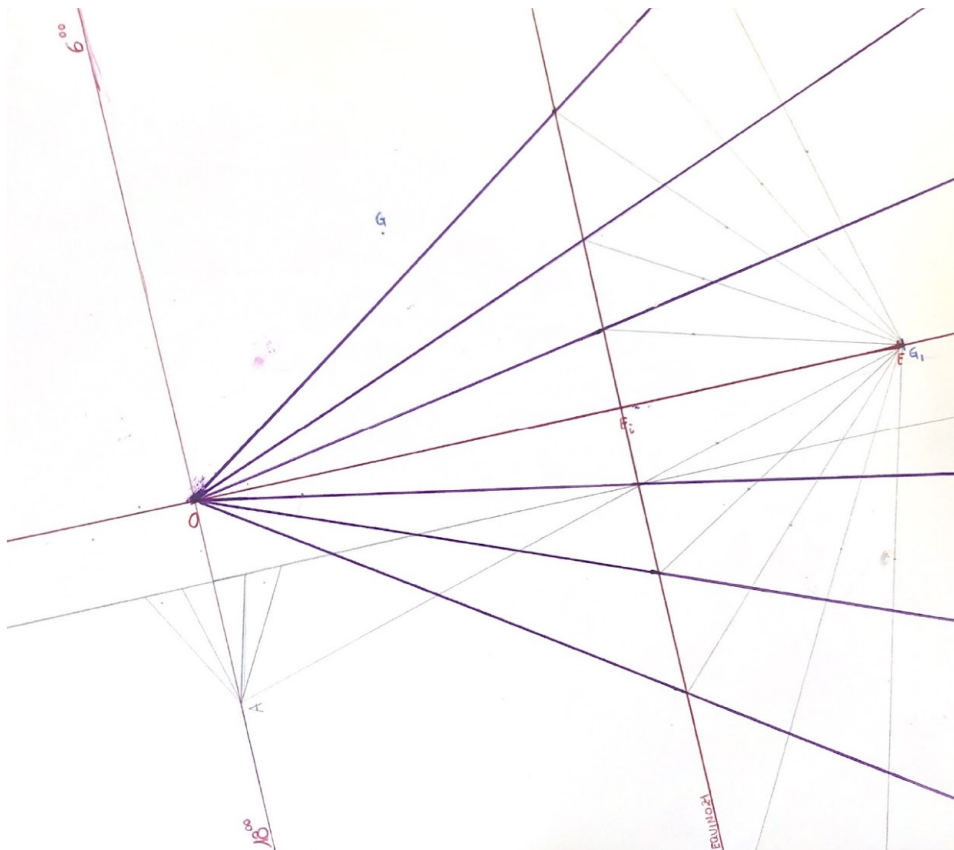
Si segue ora con il tracciare le linee orarie da  $O$  ai punti di intersezione delle rette precedentemente disegnate e la retta degli equinozi.



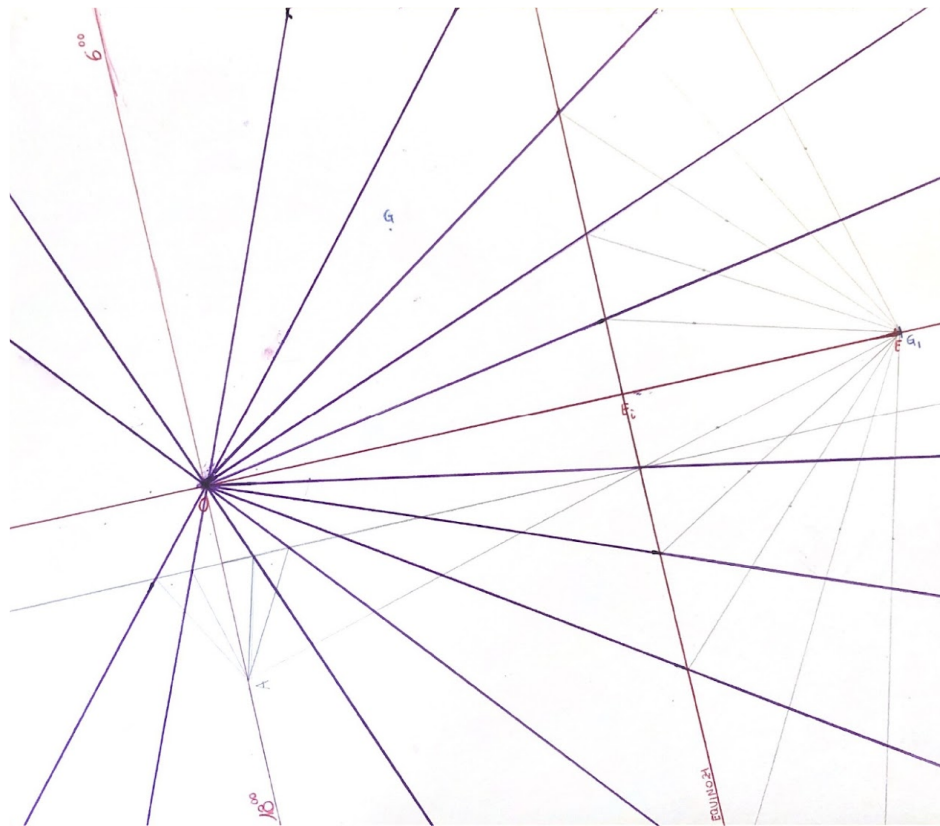
A questo punto si notano dei punti di intersezione che cadono fuori dal foglio, per ovviare a questo problema si prolunga la prima traccia delle linee orarie sino ad incontrare la retta delle  $6^{00} - 18^{00}$ : punto di intersezione  $A$ . Poi si traccia una perpendicolare alla retta degli equinozi passante per il primo punto di intersezione. (vedi immagine 11).



Ora con il compasso centrato nel punto di intersezione  $A$  si tracciano i punti da  $60^\circ$  a  $120^\circ$  ogni  $15^\circ$ , si tracciano le rette che passano per quei punti e che intersecano la retta parallela alla linea meridiana passante per il primo punto di intersezione (vedi immagine 12).



Si tracciano poi le linee orarie che passano per  $O$  e passano per i nuovi punti di intersezione. Per simmetria dall'altra parte si trovano le rette delle  $4^{00} - 5^{00} - 7^{00} - 8^{00}$  prolungando dalla parte opposta le nuove linee orarie. (vedi immagine 13).



Adesso che le linee orarie sono state ricreate su carta si può passare alla realizzazione sulla lastra. Si riposiziona il foglio sulla lastra allineando la linea meridiana sul foglio con la linea meridiana sulla lastra. Quando il foglio è perfettamente sovrapposto segniamo i punti limite sui bordi della lastra con un pennarello. Con la punta di un compasso segniamo il punto  $O$ , il punto  $E$  ed il punto  $E_i$ . Colleghiamo i vari punti sulla lastra con un righello e una matita. Una volta riportate tutte le linee orarie sulla lastra. Possiamo passare alla realizzazione delle coniche diurne.

Il sole ruota attorno all'asse terrestre, ma la distanza tra l'asse terrestre e l'asse-stilo è poco influente rispetto alla distanza Sole-Terra, che è come se fossero coincidenti. Quindi il sole ruota attorno all'asse stilo disegnando un cono rigato la cui sezione con il piano è un cono. Nel nostro caso l'angolo di apertura del cono di raggi solari:  $\theta = 90 - \delta$  assume valore:  $66,55^\circ$  (il giorno degli equinozi)  $\leq \theta \leq 90^\circ$  (per  $\theta = 90^\circ$ , si ha un cono degenere)

L'angolo tra il piano orizzontale e l'asse di rotazione è  $\varphi = 42,26^\circ$  pertanto si ha:  $\forall \delta, \theta > \delta$ . Quindi le coniche alla latitudine  $\varphi = 42,26^\circ$  sono tutte iperboli.

#### COME DISEGNARE LE CONICHE DESCRITTE DAL SOLE IN GIORNI SPECIFICI:

Per il calcolo della conica degenere si deve calcolare l'angolo  $\eta$  ovvero l'angolo tra gli asintoti dell'iperbole e l'asse  $Y$  per poi calcolare il complementare e tramite la tangente di quest'ultimo il coefficiente angolare degli asintoti, e di conseguenza l'equazione dell'iperbole. Per calcolare  $\eta$  si utilizza una relazione deducibile dallo studio della trigonometria sferica secondo la quale:



$$\cos \eta = \frac{\sin \delta}{\cos \varphi} \rightarrow \eta = \cos^{-1} \left( \frac{\sin \delta}{\cos \varphi} \right)$$

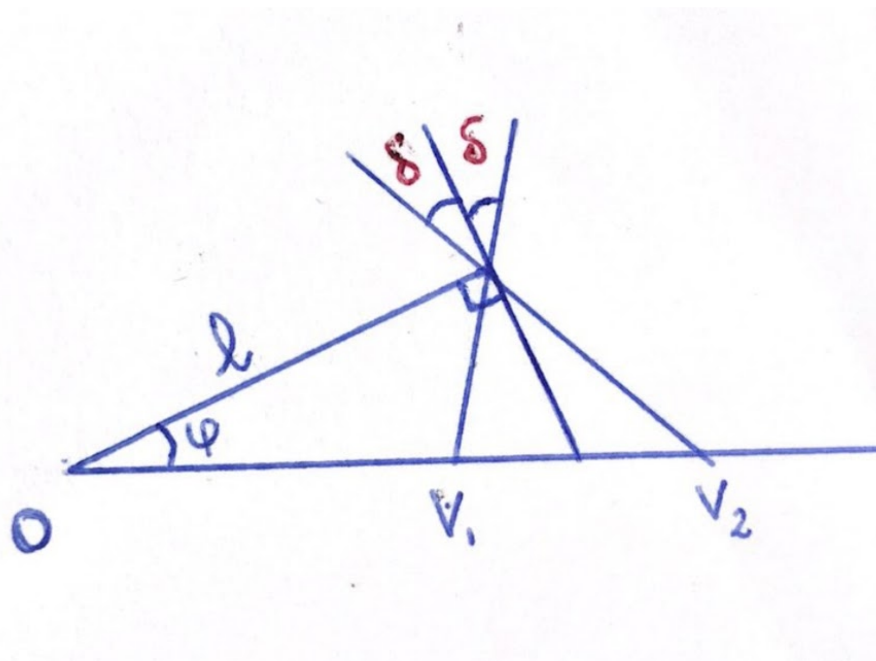
Per la latitudine di Poggio Mirteto ( $\varphi = 42,26^\circ$ ), per il giorno personalizzato: 08/08 (giorno del mio compleanno), la declinazione del sole  $\delta$ , che si può ricavare o sperimentalmente (vedi altre relazioni) oppure grazie alle tavole delle effemeridi (che si possono trovare sia su internet sia su l'app per android "Solarinfo"), è  $\delta = 16,13^\circ$ . la relazione diventa quindi:

$$\eta = \cos^{-1} \left( \frac{\sin 16,13^\circ}{\cos 42,26^\circ} \right) \rightarrow \eta = 67,95^\circ$$

Di conseguenza l'angolo formato dagli asintoti con l'asse delle X è uguale a  $\psi = 90^\circ - \eta \rightarrow \psi = 90^\circ - 67,95^\circ = 22,05^\circ$ . Quindi in base alle relazioni relative all'iperbole, per i suoi asintoti:

$$y = \pm \frac{b}{a}x \rightarrow \frac{b}{a} = \tan \psi \rightarrow b = a \cdot \tan (22,05^\circ)$$

Una volta definita la relazione tra  $a$  e  $b$  si può ricavare  $a$  conoscendo i due vertici della nostra iperbole. (vedi immagine 14)



Sempre grazie al teorema dei seni, conoscendo tutti i vari angoli e un lato ( $\ell$  = lunghezza dello stilo) si possono calcolare le distanze tra  $OV_1$  e  $OV_2$ . Conoscendo questi due si può calcolare il loro punto medio il centro C dell'iperbole. La distanza  $OC$  è:

$$\begin{aligned} OC &= \frac{\ell \cdot \cos \delta}{2} \left( \frac{1}{\cos (\varphi - \delta)} + \frac{1}{\cos (\varphi + \delta)} \right) \rightarrow \\ \rightarrow OC &= \frac{9,4 \cdot \cos (16,13^\circ)}{2} \left( \frac{1}{\cos (42,26^\circ - 16,13^\circ)} + \frac{1}{\cos (42,26^\circ + 16,13^\circ)} \right) = \\ &= OC = 13,64 \text{ cm} \end{aligned}$$

Per calcolare  $a$  si deve calcolare la distanza dei due vertici e trovarne il punto medio, quindi dopo aver calcolato la distanza  $OV_1$  e  $OV_2$ , sempre attraverso il teorema dei seni:

$$OV_1 = \frac{\ell \cdot \cos \delta}{\cos (\varphi - \delta)} \rightarrow OV_1 = \frac{9,4 \cdot \cos (16,13^\circ)}{\cos (42,26^\circ - 16,13^\circ)} \simeq 10,06 \text{ cm}$$

$$OV_2 = \frac{\ell \cdot \cos \delta}{\cos (\varphi + \delta)} \rightarrow OV_2 = \frac{9,4 \cdot \cos (16,13^\circ)}{\cos (42,26^\circ + 16,13^\circ)} \simeq 17,22 \text{ cm}$$

Si può calcolare  $a$  :

$$a = \left| \frac{OV_2 - OV_1}{2} \right| = \left| \frac{17,22 - 10,06}{2} \right| = 3,58$$

Una volta trovato  $a$  si può calcolare tramite la prima relazione ( $b = a \cdot \tan (22,05^\circ)$ ) anche la  $b$  e scrivere l'equazione dell'iperbole.

$$b = a \cdot \tan (22,5^\circ) = 3,58 \cdot \tan (22,5^\circ) \simeq 1,48$$

↓

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \rightarrow \frac{x^2}{3,58^2} - \frac{y^2}{1,48^2} = -1$$

In alternativa si può ricavare l'equazione dell'iperbole dalla seguente formula:

$$\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{\left\{ \tan \left[ 90^\circ - \cos^{-1} \left( \frac{\sin \delta}{\cos \varphi} \right) \right] \right\}^2} = - \left[ \frac{\ell \cdot \cos \delta}{2} \left( \frac{1}{\cos (\varphi - \delta)} - \frac{1}{\cos (\varphi + \delta)} \right) \right]^2$$

Una volta ricavata la formula dell'iperbole, si calcolano gli asintoti:

$$y = \pm \frac{b}{a}x \rightarrow y = \pm \frac{1,48}{3,58}x \rightarrow y = \pm \frac{74}{179}x$$

Dopo aver calcolato gli asintoti si rappresenta sulla lastra, con una matita, il punto  $C$ , e gli asintoti. Poi si calcolano una serie di punti appartenenti all'iperbole e si riportano sulla lastra, quando avremo una quantità di punti sufficienti (almeno 15) si possono unire a formare la conica diurna del giorno desiderato (08/08).

Una volta riportata a matita tutta la costruzione del foglio sulla lastra, comprese le coniche diurne, si può ripassare con l'aiuto di un righello ed un colore acrilico, segnando come è più congeniale tutte le ore che corrispondono alle linee orarie, può essere decorata a piacimento. Una volta terminata la regolazione si inserisce lo stilo in asse con la linea meridiana, nel punto  $O$ , con un angolo da terra pari alla latitudine. Ecco il risultato finale:

La mia meridiana presenta due coniche ben precise, il giorno del mio compleanno e quello di mio padre (date riportate); ha anche una retta ovvero il cono degenera nel giorno degli equinozi. La decorazione è stata realizzata con dei colori acrilici e uniposca. La lastra è stata successivamente trattata con dello smalto trasparente per rendere il colore più duraturo. La meridiana è stata realizzata su di un muro per questa è stata fissata prima della decorazione, in alternativa se la lastra lo permette si può prima decorare e poi riposizionare nel punto desiderato. Ecco il risultato finale:



### CONCLUSIONE:

Si è creata una meridiana personalizzata perfettamente funzionante per la latitudine scelta, il giorno dell'08/08 e del 02/02, la punta dello stilo passerà per le relative iperboli, così come il giorno degli equinozi sulla retta relativa.