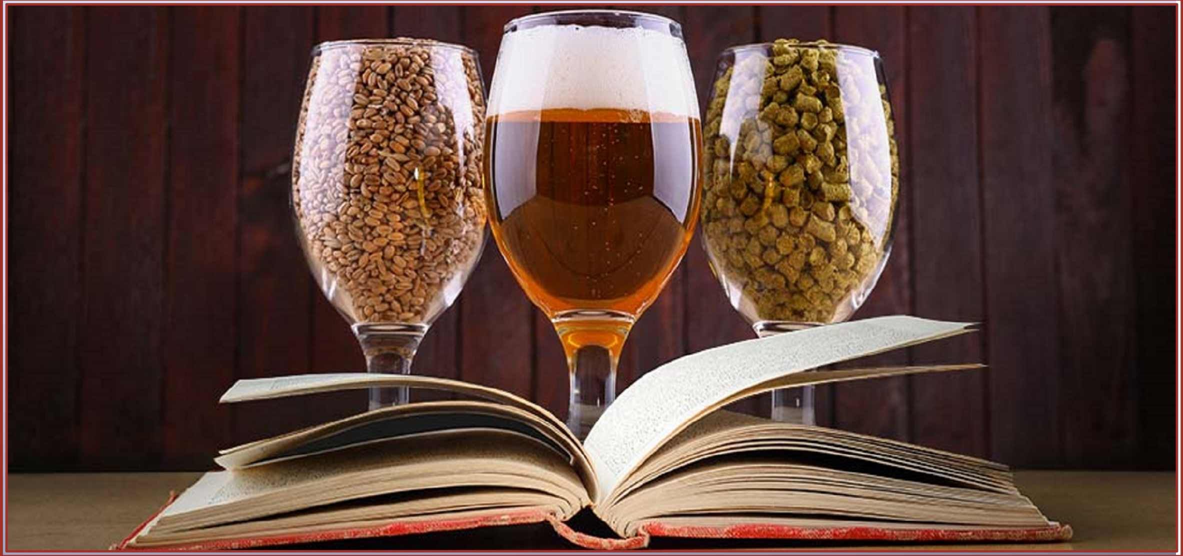
Sapienza Università di Roma
Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali
e
Liceo Scientifico Statale "A.Avogadro" Roma

PROGETTO Alternanza Scuola-Lavoro 2019 - 20

Parliamo di birra … (3)

Carlotta MAFFEI
Dipartimento di Matematica

Giuliana MASSOTTI
Liceo Scientifico Statale
"A.Avogadro" Roma



Si verifica sperimentalmente che le cellule di lievito che vengono immesse nel mosto provocando la fermentazione hanno un ciclo vitale che può essere riassunto nelle 3 fasi:

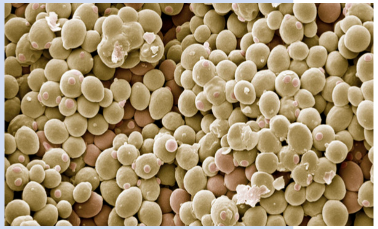
(1) **respirazione:** la cellula è appena “nata” ed ha bisogno di un po’ di tempo per metabolizzare l’energia necessaria a crescere

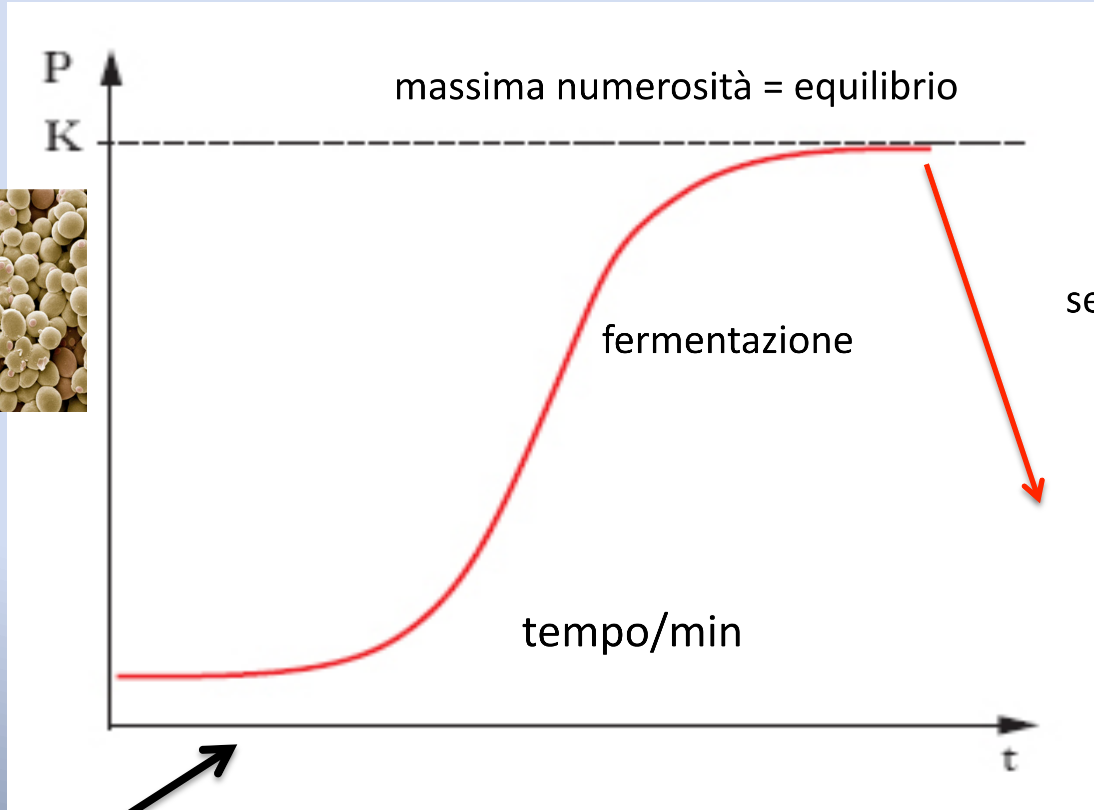
(2) **“fermentazione”:** le cellule iniziano a riprodursi in grande quantità; durante la replicazione le cellule assumono zuccheri e rilasciano di sostanze di scarto (alcool e anidride carbonica). Quando tutto il nutrimento è esaurito, la riproduzione cessa e il numero delle cellule non aumenta più (il sistema è in **equilibrio**)

(3) **“sedimentazione”:** le cellule presenti, non più nutrite, iniziano a morire, depositandosi nel fondo del recipiente in cui si è svolto il processo.

Le 3 fasi possono essere rappresentate in un grafico nel modo seguente

Numero cellule





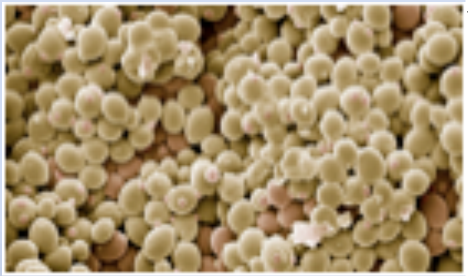
sedimentazione

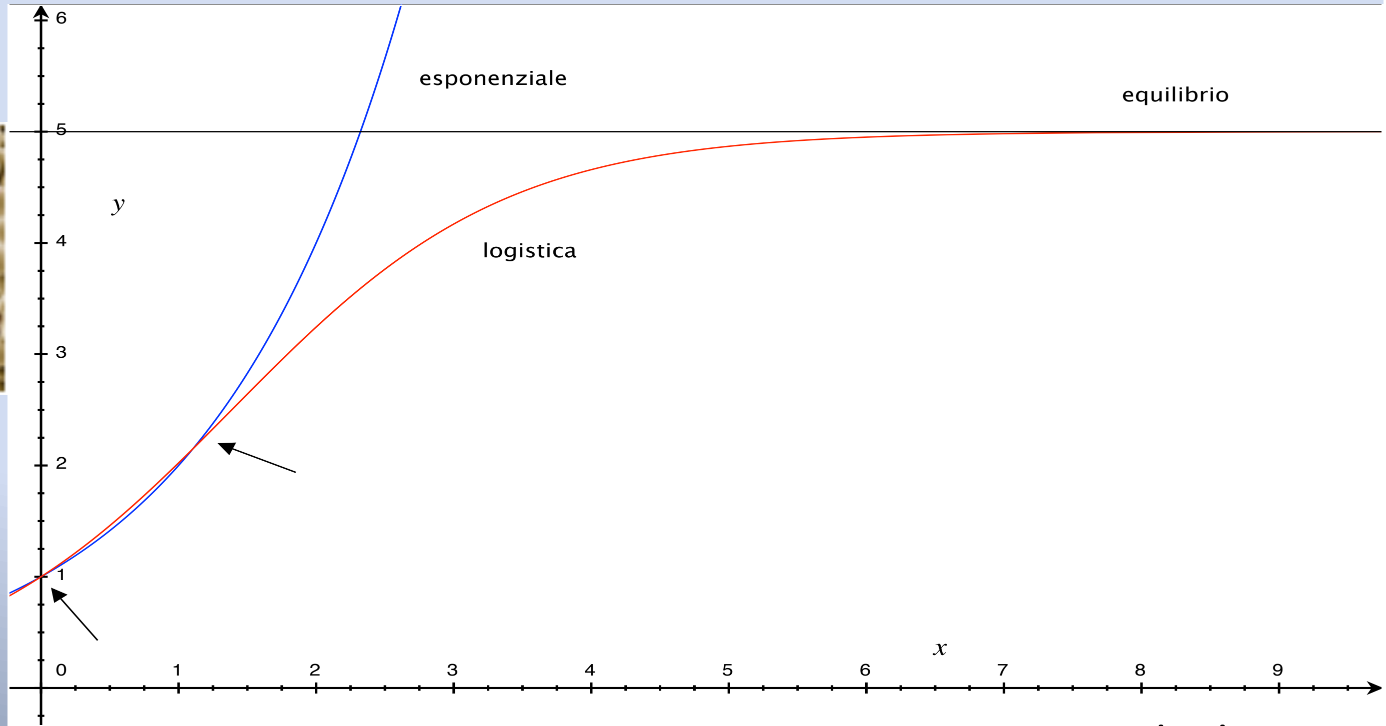
Un grafico di questo tipo è detto “logistico”

Domanda

La funzione $P(k) = (1+R)^k P(0)$ di crescita esponenziale è adatta a descrivere il fenomeno della crescita delle cellule di lievito *Saccharomyces*?

numerosità
cellule





generazioni

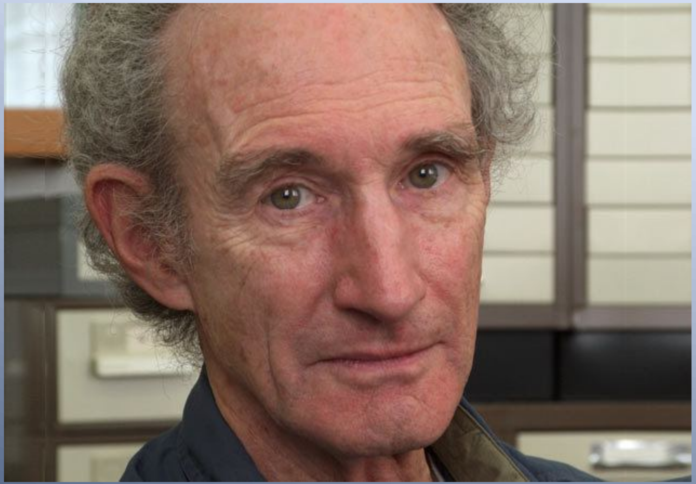
Solo in parte (quella tra le frecce) nelle **prime generazioni**

Il modello logistico discreto (le generazioni si contano per unità discrete)

La funzione esponenziale $P(k) = (1+R)^k P(0)$ **non è adatta** a descrivere lo sviluppo del lievito per tutte le generazioni (cresce sempre), mentre il lievito ad un certo tempo raggiunge una numerosità costante.

Per descrivere il fenomeno di crescite analoghe a quelle del lievito, per ogni generazione k = 1, 2, 3, … , nel 1976 il fisico **Robert May** ha proposto il seguente modello, detto "modello logistico discreto" (una legge iterativa)

$$P(k) = \underbrace{(1+R)P(k-1)}_{\text{Modello di Eulero}} - \underbrace{C\,[P(k-1)]^2}_{\text{Correzione " logistica"}}$$



C è una postante positiva detta "coefficiente di competizione"

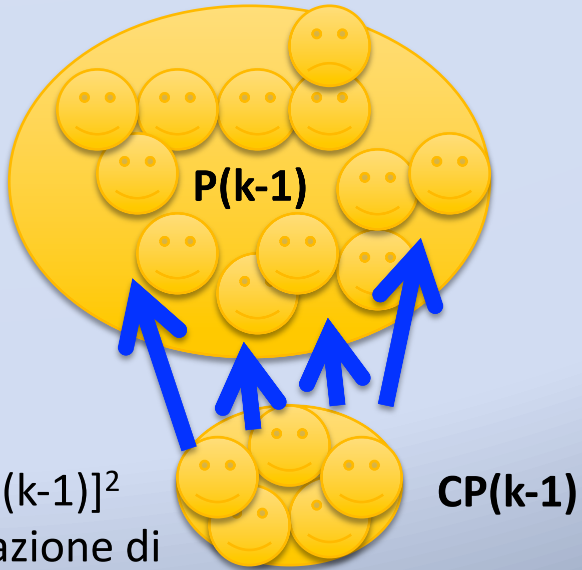
COMPETIZIONE

Tutti gli organismi viventi "competono" tra loro e con organismi di specie diverse.

Competono per procurarsi cibo, spazio vitale, partner per la riproduzione ecc.

Si può pensare alla competizione come allo "scontro" tra **alcuni** organismi di una data specie e gli altri. La competizione **rallenta** il processo di crescita naturale perché assorbe energie e tempo.

Data una generazione, ad es. k-1,il termine C $[P(k-1)]^2$ rappresenta la competizione perché descrive l'azione di rallentamento della crescita che deriva dall'incontro di una percentuale C P(k-1)della popolazione con gli altri individui P(k-1) della popolazione



$$P(k) = (1+R)P(k-1) \quad - C\,[P(k-1)]^2$$

Per $k = 1$ si ha $P(1) = (1+R)P(0) - C\,[P(0)]^2$

per $k= 2$ $P(2) = (1+R)P(1) - C\,[P(1)]^2$

per $k= 3$ $P(3) = (1+R)\,P(2) - C\,[P(2)]^2$ ecc.

Ad ogni generazione la numerosità varia come nel caso esponenziale ma, diminuita (**segno -**) di un fattore proporzionale al quadrato della numerosità.

Il termine "$- C\,[P(k-1)]^2$" è detto di "competizione intraspecifica" (interna alla stessa specie) e, all'aumentare della numerosità, diventa sempre più rilevante.

ESEMPIO: competizione al 3%

Se $k = 1 = 20$min., $R=0.12 > 0$, $1+R = 1.12$ $C= 0.03$, $P(0) = 1 = 10^6$ si ha

$P(1) = (1+R)P(0) – C\,[P(0)]^2 = 1.12 – \mathbf{0.03}$ $(= 1.09 > P(0)=1)$

$P(2) = (1+R)P(1) – C\,[P(1)]^2 = 1.12(1.09) – 0.03(1.09)^2 \approx 1.221 – \mathbf{0.036}$
$(\approx 1.185 > P(1) = 1.09)$

$P(3) = (1+R)\,P(2) – C\,[P(2)]^2 \approx 1.33 – \mathbf{0.042} \approx 1.285 > P(2) \approx 1.09$

$P(4) = (1+R)\,P(3) – C\,[P(3)]^2 \approx 1.44 – \mathbf{0.05} \approx 1.39$

$P(5) \approx 1.56 - \mathbf{0.06} \approx 1.5$ $P(6) \approx 1.68 - \mathbf{0.07} \approx 1.61$

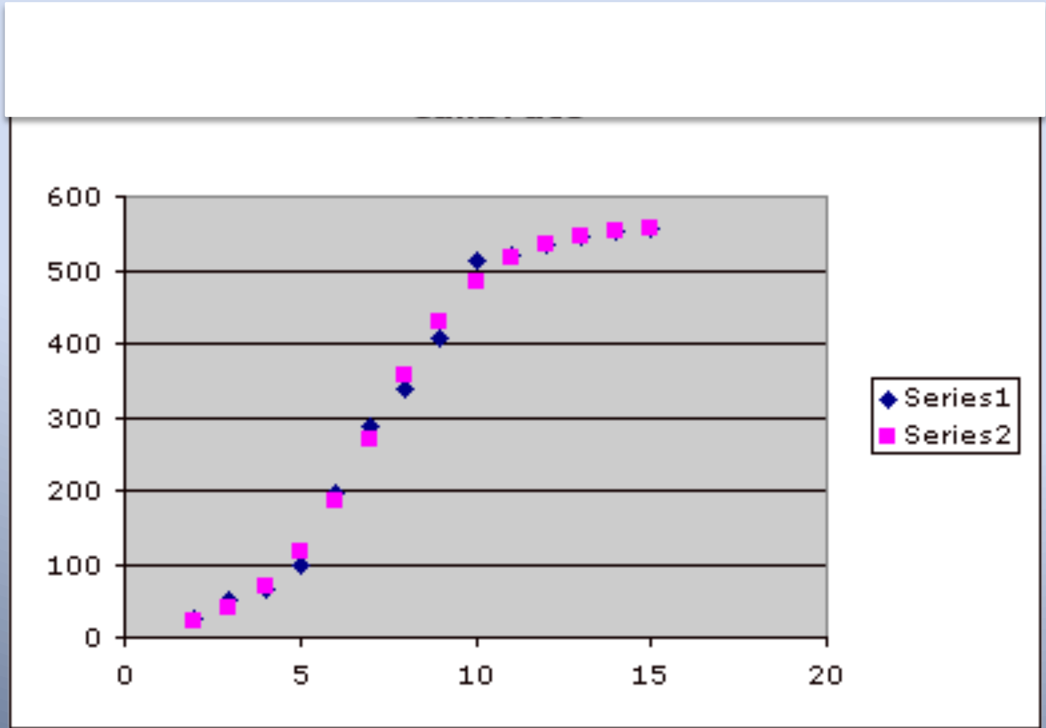
$P(7) \approx 1.8 – \mathbf{0.08} \approx 1.72$ $P(8) \approx 1.93 – \mathbf{0.09} \approx 1.84$ …

Ad ogni generazione la numerosità aumenta e la competizione cresce

PROPOSTA DI APPROFONDIMENTO (INFORMATICA)

Usando excell (o python altro programma), disegnare per punti l'andamento della legge logistica per vedere se è adatta a descrivere il fenomeno della crescita del lievito. Studiare cosa cambia al variare R e C

Si dovrebbe ottenere un grafico del tipo



Provare i casi

(a) R = 1.12, C = 0.03

(b) R = 1.12, C = 0.3

(c) R = 0.8 C = 0.4

(e altri ancora)

Commentare i risultati

La legge logistica sembra adatta a descrivere la crescita del lievito

Osservazione

Nel caso logistico **non è possibile** scrivere esplicitamente la soluzione come una funzione di k (tempo). Infatti

per k = 1 si ha $P(1) = (1+R)P(0) - C\,[P(0)]^2$

per k= 2 $P(2) = (1+R)P(1) - C\,[P(1)]^2 = (1+R)\,[(1+R)P(0) - C\,[P(0)]^2] +$

$- C\,[(1+R)P(0) - C\,[P(0)]^2]^2$

e per k= 3 $P(3) = (1+R)\,\{(1+R)\,[(1+R)P(0) - C\,[P(0)]^2 - C\,[(1+R)P(0) - C\,[P(0)]^2]^2\} +$

$- rC\{(1+R)\,[(1+R)P(0) - C\,[P(0)]^2] - C\,[(1+R)P(0) - C\,[P(0)]^2]^2\}^2$

eccetera

IMPOSSIBILE !!

Per studiare cosa accade nel tempo alla numerosità e verificare che il modello è corretto si deve quindi procedere in altro modo

LA MATEMATICA E’ CREATIVA!

STUDIO DELLA LEGGE $P(k) = (1+R)P(k-1) – C\,P(k-1)^2$

Alla generazione k = 1 la legge è

$$P(1) = (1+R)P(0) – C\,[P(0)]^2 :$$

Poniamo $P(0) = x$ (variabile indipendente) $P(1) = y$, quindi

$$P(1) = (1+R)P(0) – C\,[P(0)]^2 \longrightarrow y = f(x) = (1+R)x – Cx^2 = - Cx^2 + (1+R)x$$

P(1) è una funzione quadratica di P(0), che infatti compare alla potenza 2; nel piano (P(0,) P(1)) il grafico è quello di una parabola.

Alla generazione k= 2 $P(2) = (1+R)P(1) – C [P(1)]^2$:

P(2) è una funzione quadratica di P(1) e se poniamo $P(1) = x$, $P(2) = y$ si ha

$P(2) = (1+R)P(1) – C [P(1)]^2 \longrightarrow y = f(x) = - C x^2 + (1+R)x$:

<u>la stessa funzione </u>della generazione k=1.

Analogamente se k= 3 $P(3) = (1+R) P(2) – C [P(2)]^2$:

P(3) è la stessa funzione quadratica di P(2)) ecc. . . .

INDIPENDENTEMENTE DALLA GENERAZIONE, LA FUNZIONE DA STUDIARE E'

$$y = f(x) = - C x^2 + (1+R)x$$

GRAFICO della parabola $y = f(x) = ax^2 + bx + c = - Cx^2 + (1+R)x$.

- Parabola con **concavità verso il basso** (il coeff. del termine quadrato $a = - C < 0$)

- **Intersezioni** con l'asse orizzontale (che ha equazione $y = 0$)

$$y = x[- Cx + (1+R)] = 0:$$

i punti di coordinate

$O = (0,0)$ e $P = (1+R/C, 0)$ sono le intersezioni con l'asse orizzontale

-**Vertice della parabola** (punto in cui l'ordinata ha il massimo valore)

$$V = (-b/2a, - (b^2 - 4ac)/4a).$$

In questo caso

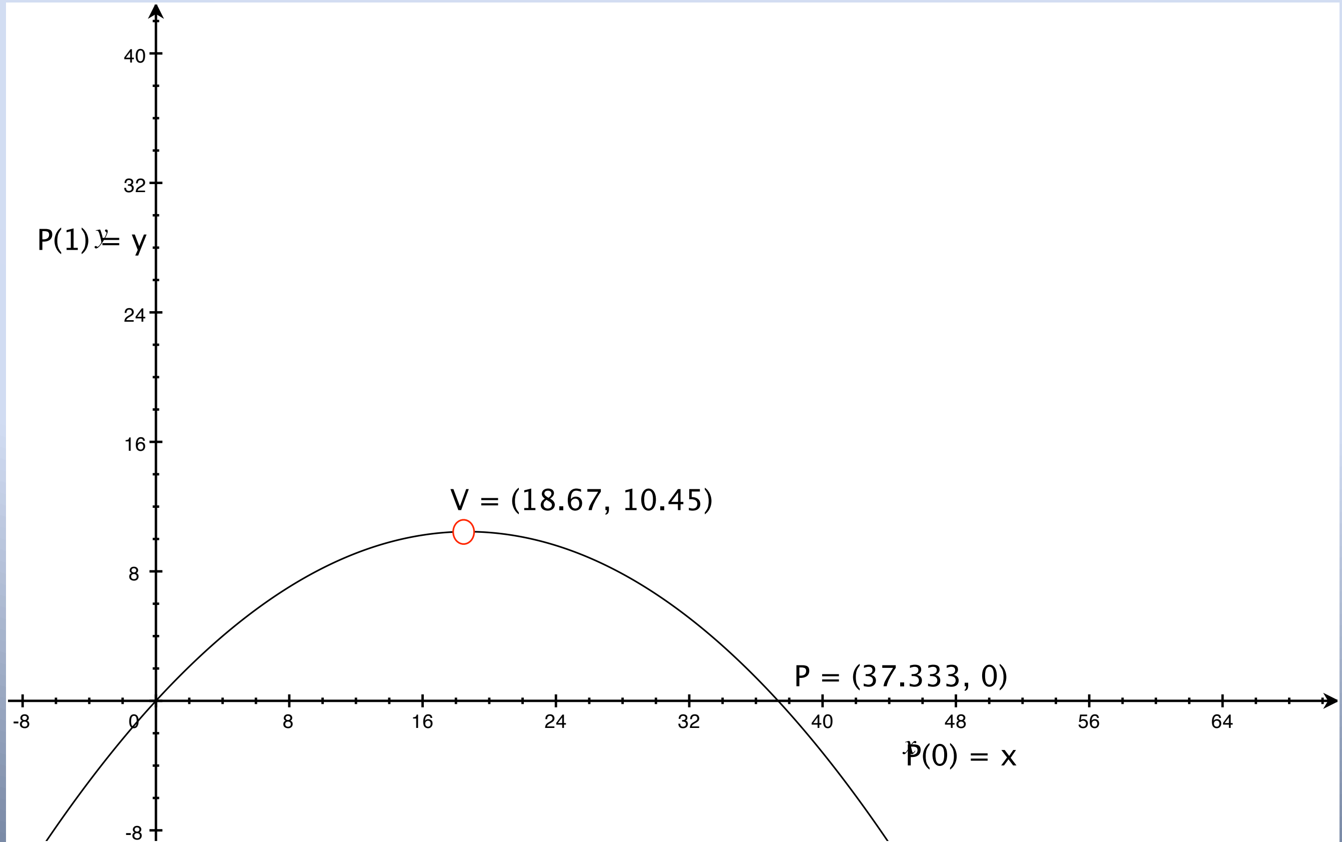
a = - C,
b = 1+R,
c = 0, quindi le coordinate del vertice sono

$$V= (x_V,y_V) = ((1+R)/2C, - (1+R)^2/ 4C).$$

ESEMPIO.

Se $1+R = 1.12$, $C = 0.03$, le intersezioni sono $O = (0,0)$, $P = (37.333.., 0)$, il vertice è $V \approx (18.67, 10.45)$.

Il grafico della funzione è



Per studiare l'evoluzione della numerosità, ricordiamo che per ogni generazione la legge che la descrive è

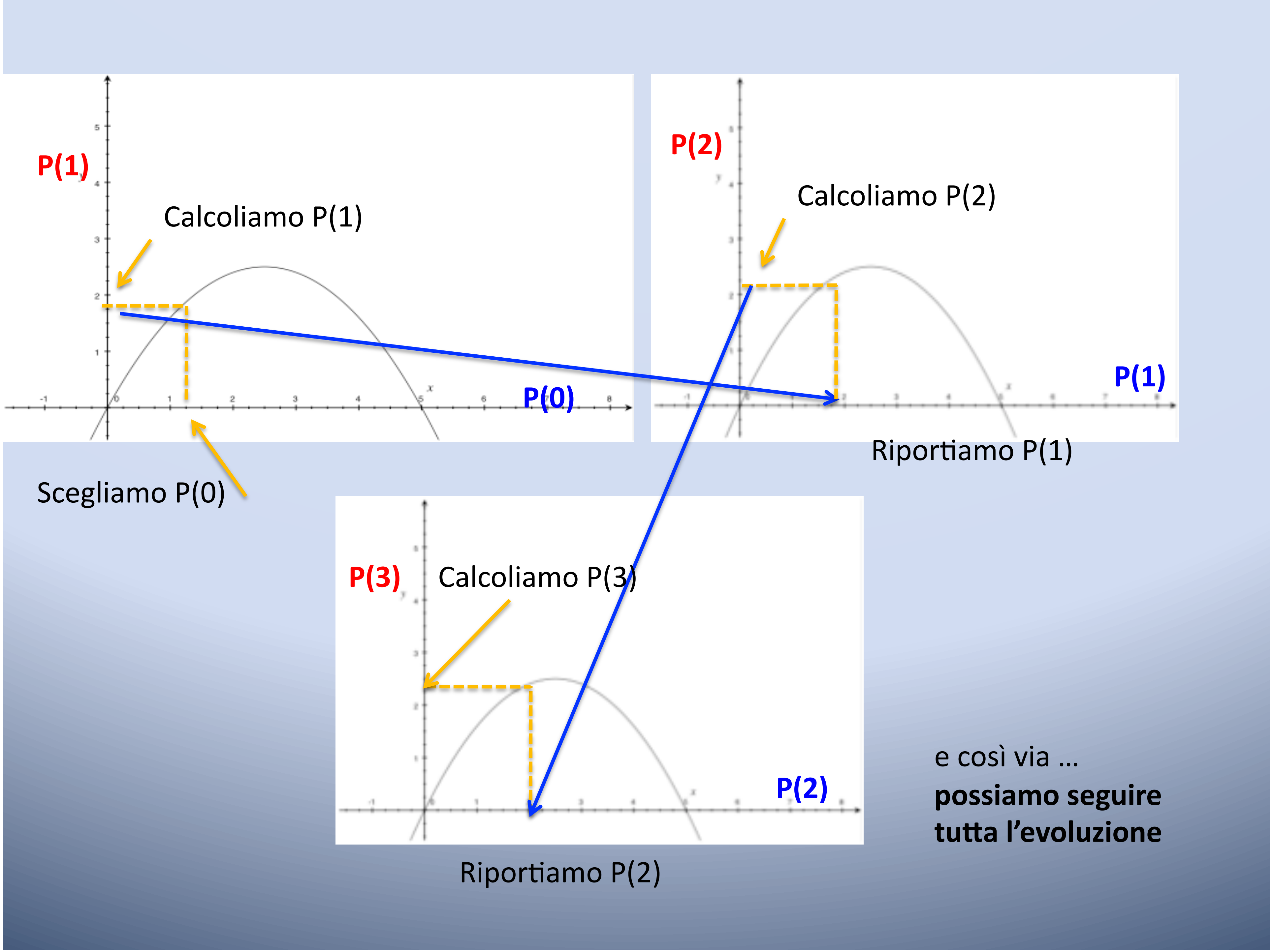
$$y = f(x) = -C x^2 + (1+R)x$$

con $x = P(k-1)$ e $y = P(k)$ per ogni $k = 1,2, \ldots .$

Mettiamo i grafici (tutti uguali) uno accanto all'altro e

seguiamo come varia la numerosità al variare

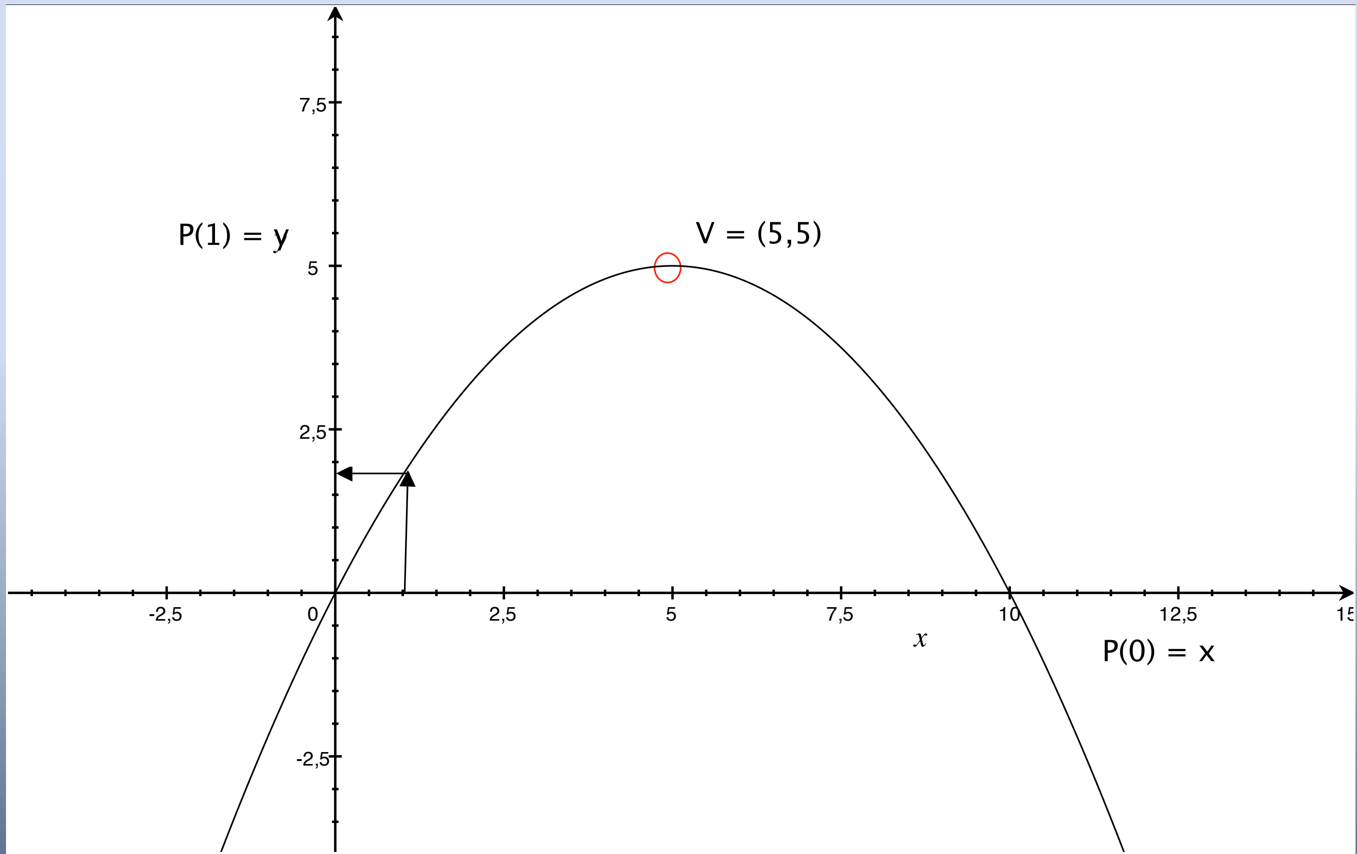
delle generazioni


P(1)
Calcoliamo P(1)
P(0)
Scegliamo P(0)
P(2)
Calcoliamo P(2)
P(1)
Riportiamo P(1)
P(3)
Calcoliamo P(3)
P(2)
Riportiamo P(2)
e così via …
possiamo seguire
tutta l'evoluzione

In particolare per i lieviti R = 1 (mortalità trascurabile) 1+R = 2.
Se, ad esempio, C = 0.2 (competizione al 20%), **k=1 e** inizialmente
$P(0)= 1x10^6$ (1 milione) l'ordinata P(1) vale

$y= P(1) = 2(1) – 0.2 (1)^2 = 1.8$ (1milione e 800mila)**: in una generazione il valore della numerosità in una generazione è cresciuto dell' 80%**

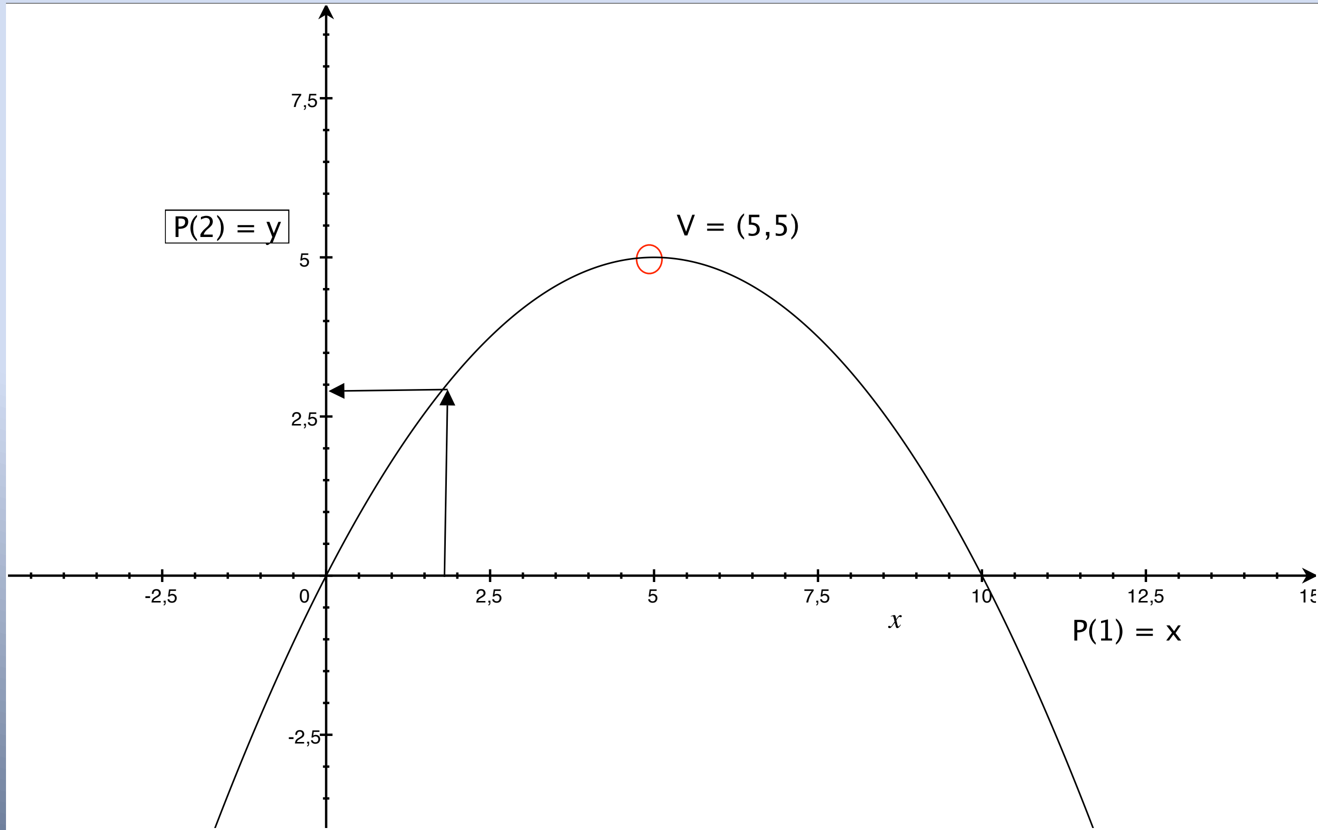
(1.8 = 1+ 1(x/100) 0.8 = 80/100 = x/100)



Per k=2. Nelle stesse ipotesi, se P(1) = 1.8, l'ordinata vale

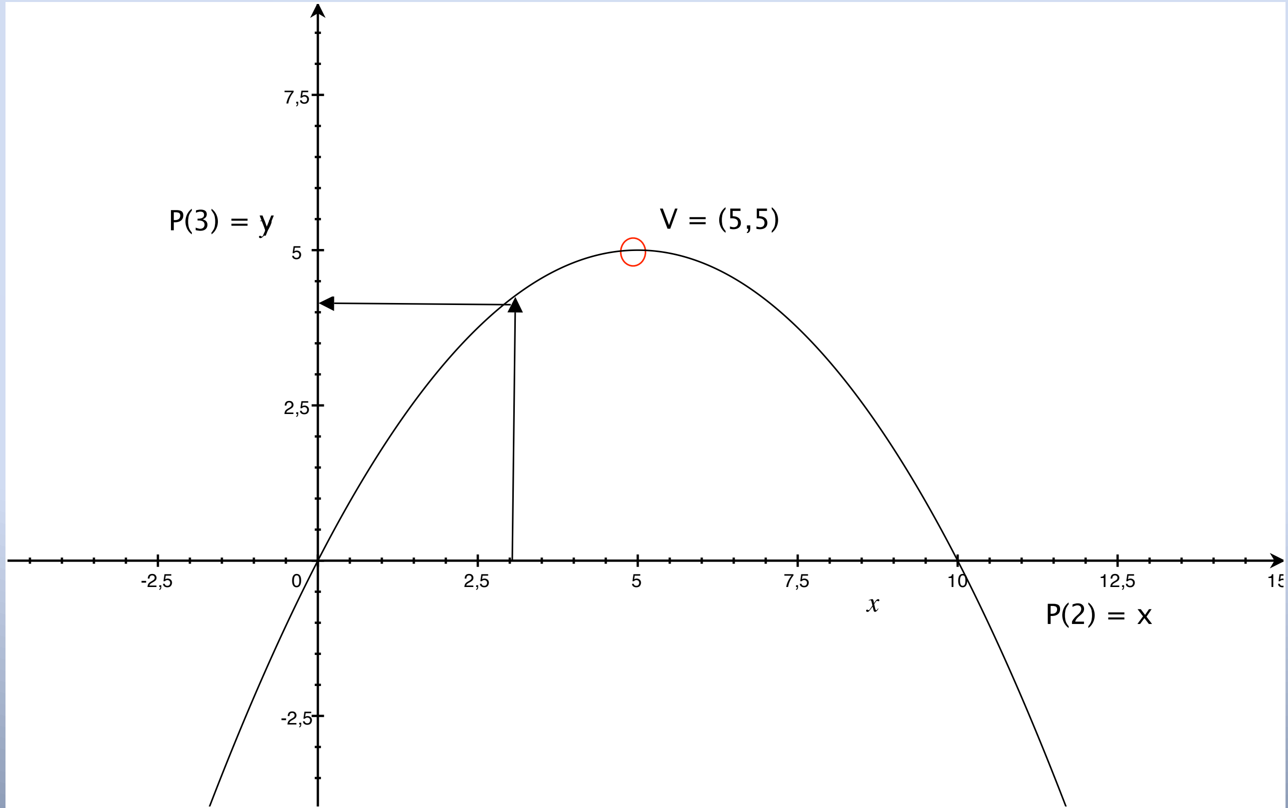
$P(2) = 2(1.8) – 0.2(1.8)^2 \approx 2.9 \approx 3$ (circa 3milioni): il valore e' cresciuto del **61%** circa

(2.9 = 1.8 + 1.8(x/100) 1.1 = 1.8(x/100) 1.1/1.8 ≈ 61/100 = x/100)



Per k = 3 con 1+R = 2, C = 0.2 e P(2)= 3 si ha $P(3)=2P(2) – 0.2\,[P(2)]^2$
y= P(3) = 6 – 3.17 = 4.2 (più di 4 milioni) aumento del **40%**

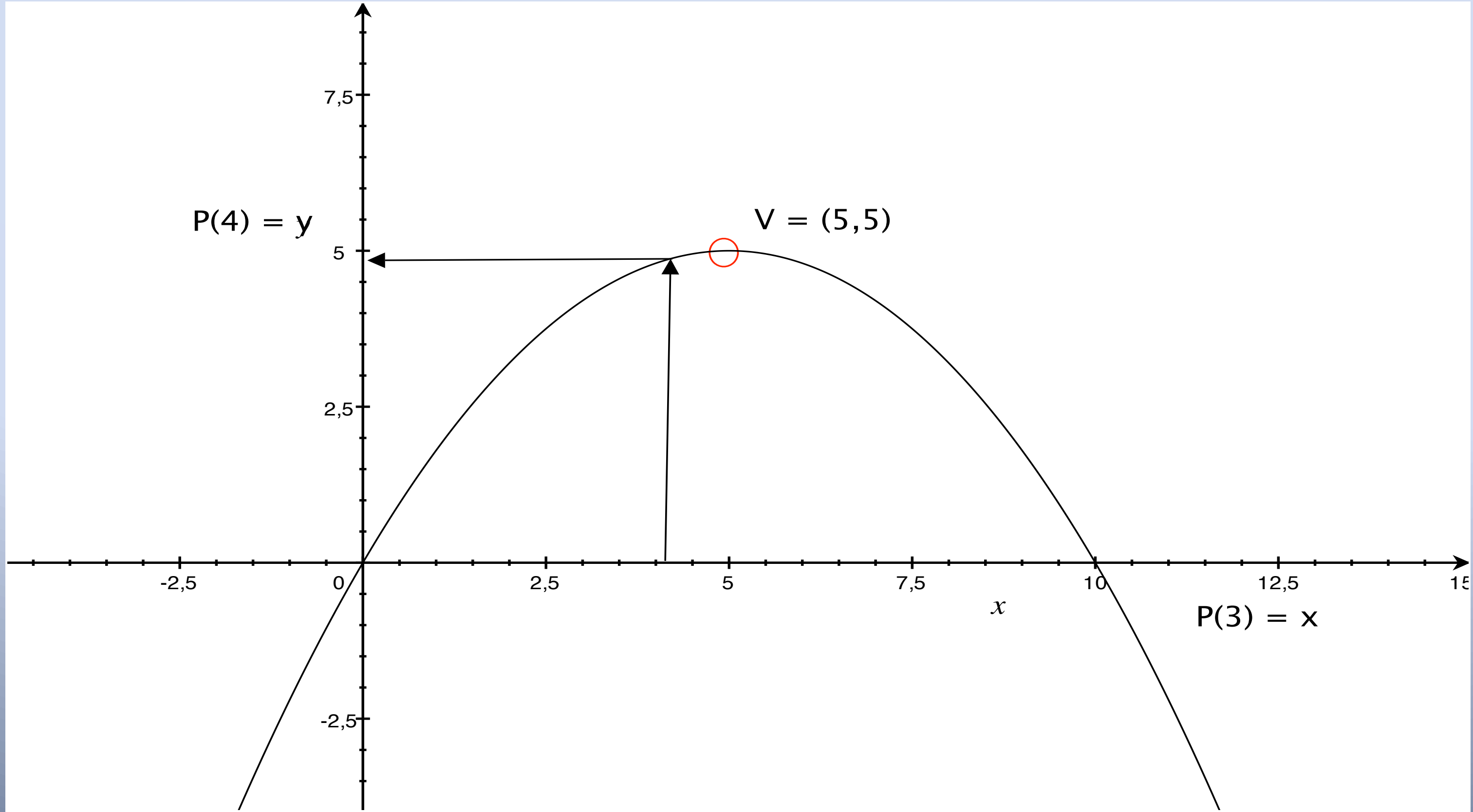
4.2 = 3 + 3(x/100) 1.2 /3 = 40/100 = x/100



Per k = 4 con 1+R = 2, C = 0.2 e P(3)= 4.2 si ha $P(4)=2P(3) - 0.2\,[P(3)]^2$

y= P(4) ≈ 8.4 – 3.53 ≈ 4.87 (quasi 5 milioni) aumento del **16%**

4.87 = 4.2 + 4.2(x/100) 0.67/4.2 = 16/100 = x/100



(verificare che questo andamento è confermato per k = 5, 6, 7, ….).

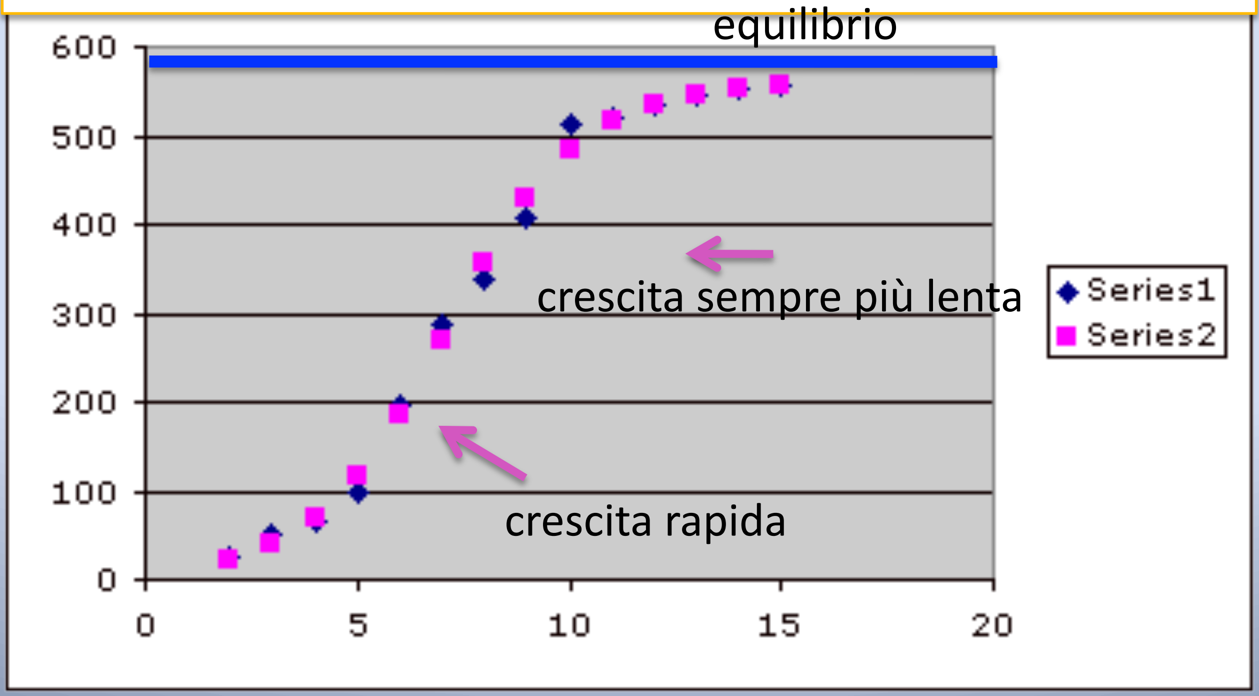
Riassumendo:
La posizione dei punti (cioé le coordinate) sul grafico fornisce la variazione della numerosità nel tempo:

(a) la numerosità inizialmente cresce molto rapidamente,

(b) al passare delle generazioni la crescita è <u>sempre più lenta e</u>

(c) la numerosità è sempre più vicina al valore di equilibrio (il massimo possibile)

Il modello prevede come si svolge il fenomeno



Sembra un buon modello … e dà anche alcune informazioni non ovvie

Il processo di crescita rallenta sempre più, dopo un certo numero di generazioni la numerosità è sempre più vicina alla massima numerosità possibile, quella di equilibrio per la quale si ha

$P(k) = P(k+1) = P(k+2) = \ldots$: la popolazione è <u>in equilibrio</u>.

Qual è il valore di equilibrio?

Si deve avere $P(k+2) = P(k+1) = P(k) = (1+R)P(k) - C\,[P(k)]^2$

Se chiamiamo $P(k) = x$, **l'equilibrio è dato dalle soluzioni (se esistono) dell'equazione di secondo grado**

$$x = (1+R)\,x - C\,x^2 = x + Rx - Cx^2 \qquad Cx^2 - Rx - x + x = 0 \qquad x(Cx - R) = 0.$$

Una soluzione è $x = 0$, che non ha significato concreto. L'altra soluzione, se $x \neq 0$, si ha dividendo per x: $Cx - R = 0$, cioè $x = R/C$. Se

$$P(k) = P(k+1) = P(k+2) = \ldots = \mathbf{R/C}$$

la numerosità non cambia mai, si ha equilibrio.

ESEMPIO. Nel caso in cui R = 1, C = 0,2 si ha x=P(k) = P(k+1) = P(k+2) = … = 5:
In questo caso, visto che V= ((1+R)/2C, - $(1+R)^2$/ 4C) = (2/2(0.2), 2^2/4(0.2)) = (5,5),

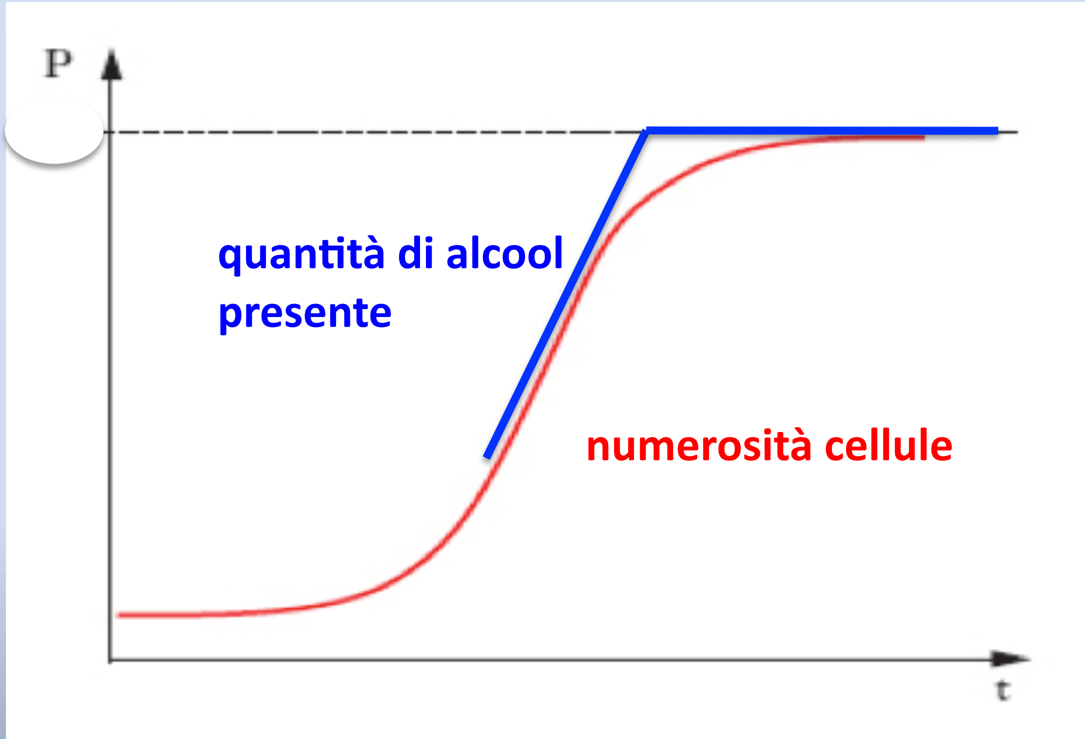
il vertice della parabola corrisponde all'equilibrio:
la massima numerosità (equilibrio) di cellule nel mosto è di 5 milioni.

Osservazione. L'equilibrio è la numerosità massima compatibile con le condizioni ambientali.
Il valore di equilibrio è P(k) = R/C, per ogni k = 0,1,2, …
se R = 1, come nell'esempio, e la competizione aumenta, ad es. C = 0.5, cambia l'equilibrio, e quindi la numerosità massima della colonia.
In questo caso si ha infatti x = 1/0.5 = 2: la numerosità massima, 2 (milioni), è diminuita rispetto al caso C = 0,2.

Se invece la competizione diminuisce, ad es. C = 0,1, l'equilibrio è x = 1/0.1 =10: la numerosità massima, di 10 milioni, è aumentata rispetto al caso C = 0.2.

QUESTA OSSERVAZIONE COSA CI PERMETTE DI CONCLUDERE ?

Visto che nella fermentazione **ogni cellula** produce alcool, la quantità di alcool **deve essere proporzionale** al numero delle cellule nel mosto.
Questo fatto è stato dimostrato anche sperimentalmente



La massima numerosità corrisponde alla massima quantità di alcool presente.

Il massimo valore della numerosità dipende dalla dalla “**competitività**” delle cellule di lievito; anche il tasso alcolico dipenderà dalla “**competitività**” delle cellule di lievito.

Saccharomyces Cerevisiae, permette di ottenere birre ad **“alta fermentazione”** perché le cellule di questa specie sono scarsamente competitive,

mentre

Saccharomyces Carlsbergensis , permette di ottenere birre “**a bassa fermentazione**” perché le cellule sono molto più competitive.

LA MATEMATICA CI HA PERMESSO DI CAPIRE UN ASPETTO

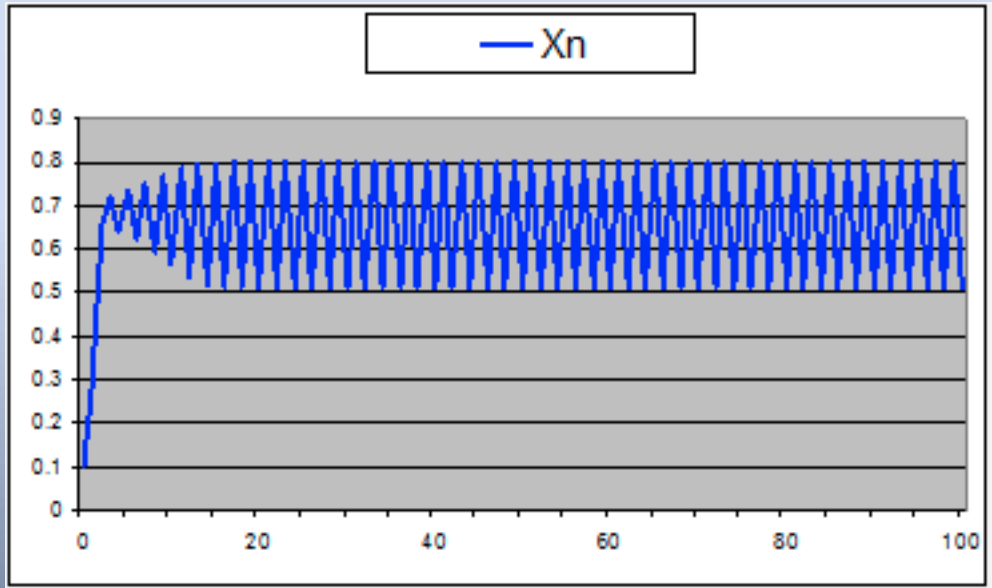
NON OVVIO DEL FENOMENO!

QUALCHE INFORMAZIONE FINALE SUL MODELLO DI MAY

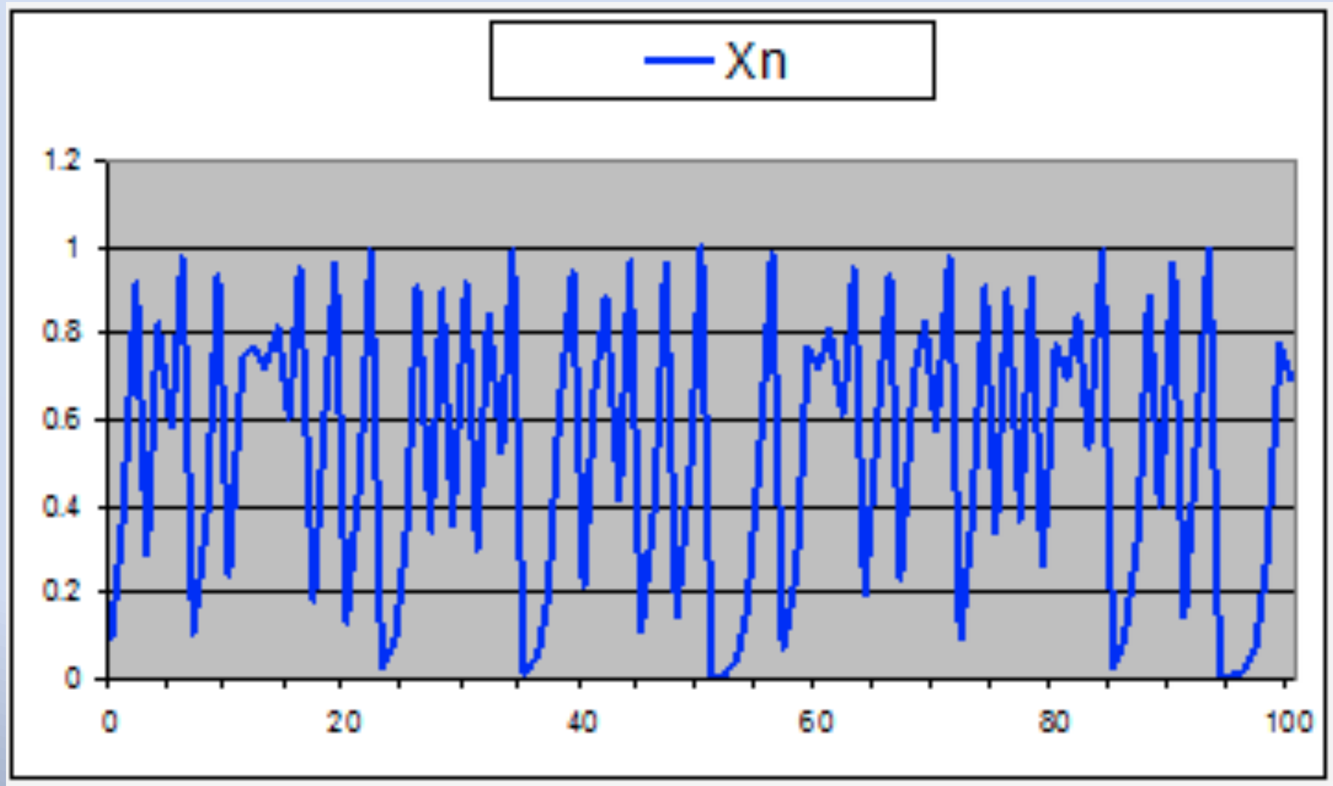
Il modello matematico **$P(k) = (1+R)P(k-1) - C\,P(k-1)^2$ (*)** si è rivelato molto interessante e più ricco di contenuti di quanto non abbiamo visto.

Se infatti si studia l'andamento della numerosità per $2 < R \leq 3$ si scoprono cose sorprendenti (che possono facilmente essere verificate calcolando punti della (*) con excell).

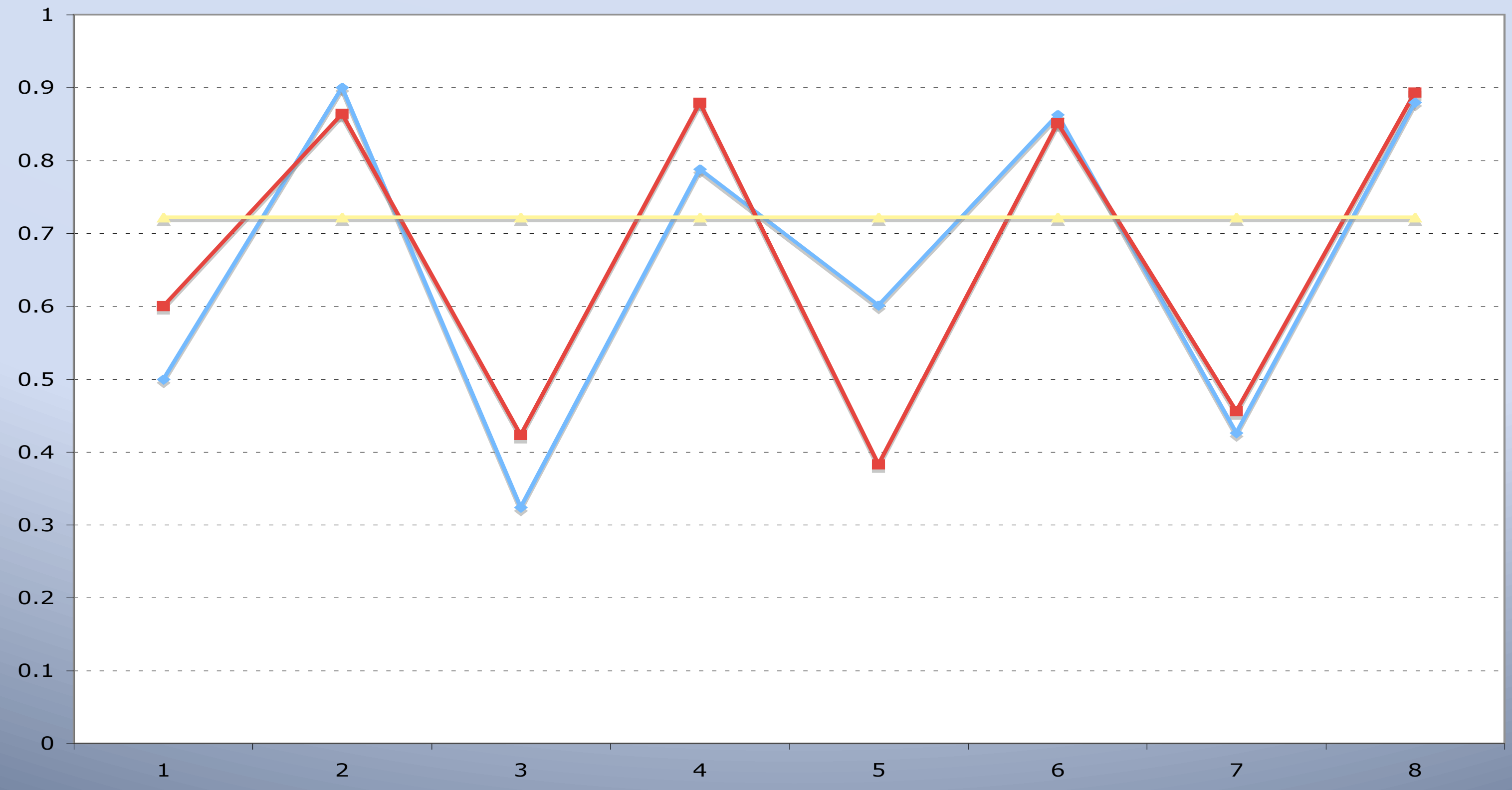
In particolare se $2 < R \leq 2.45$, all'aumentare delle generazioni, la numerosità non si avvicina al valore di equilibrio, ma oscilla tra un valore massimo e un valore minimo



Se $2.57 < R \leq 3$ si ha invece un comportamento molto irregolare, “caotico”



E’ inoltre interessante osservare che se cambiano, anche di poco, le condizioni iniziali l’evoluzione può essere molto diversa (8 iterazioni)



Quindi, oltre a descrivere evoluzioni come quella dei lieviti, il modello descrive anche evoluzioni più complesse che riguardano di popolazioni con un alto tasso di riproduzione.

La perdita di regolarità nell’evoluzione e la dipendenza delle evoluzioni dalle condizioni iniziali è stata riscontrata anche in altri fenomeni (turbolenza atmosferica, moto di 3 pianeti soggetti all’attrazione gravitazionale ecc.).

La scoperta dell’esistenza del “caos deterministico” è stata fondamentale per spiegare molti fenomeni naturale incomprensibili.

Per saperne di più si può leggere

J. Gleick “Caos: la nascita di una nuova scienza”
BUR