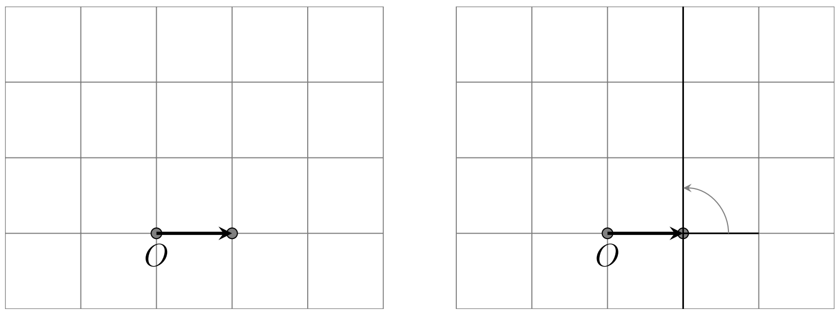
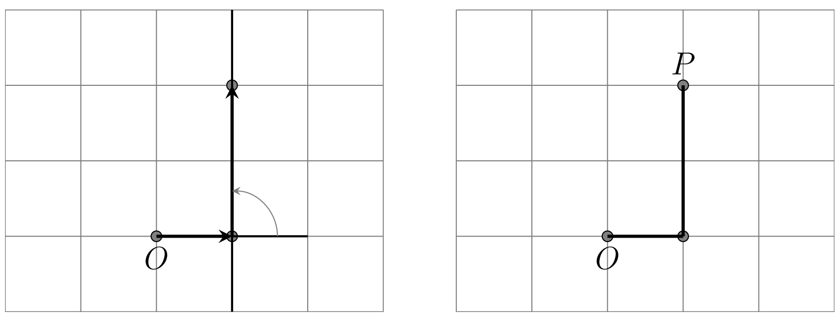
1. Come risolvere – graficamente — un'equazione

Consideriamo il polinomio $P(x) = x + 2$, che scriveremo come $P(x) = 1\,x + 2$[1].

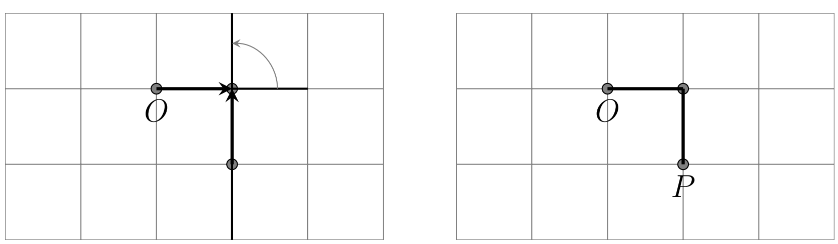
Partendo dall'origine O del piano cartesiano, spostiamoci verso destra, lungo l'asse x, di un'unità e, giunti nel punto $(1, 0)$, ruotiamo di 90° gradi in senso antiorario:



e spostiamoci **in avanti** di due unità sulla retta così individuata, ottenendo una spezzata (con angoli retti), che congiunge $O = (0, 0)$ a $P = (1, 2)$:



Abbiamo, in questo modo, rappresentato "graficamente" il polinomio $P(x)$. Se, invece, il polinomio è $P(x) = x - 1$, giunti in $(1, 0)$ si deve ruotare sempre di 90° gradi in senso antiorario, ma poi ci si deve muovere **all'indietro** di un'unità:

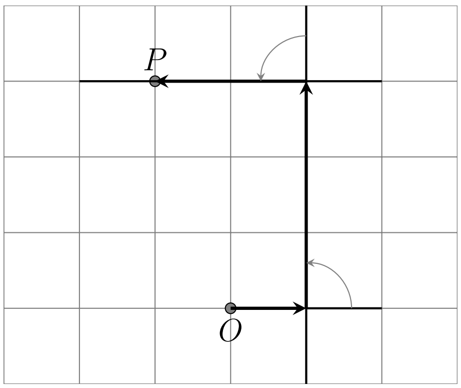


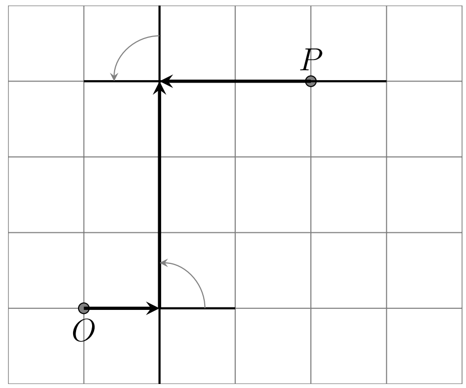
A questo punto, se invece di avere un polinomio di primo grado, abbiamo un polinomio di grado n qualsiasi, siamo in grado di rappresentarlo graficamente con lo stesso metodo: partendo dall'origine, ci spostiamo di un'unita verso destra (sempre perché il polinomio

[1] In tutto quello che segue, essendo interessati a zeri di polinomi, i polinomi saranno sempre *monici*: il coefficiente del termine di grado massimo sarà *sempre* 1.

è monico!), ruotiamo di 90° gradi in senso antiorario, ci spostiamo avanti o indietro di tante unità a seconda del coefficiente del termine di grado immediatamente inferiore, ruotiamo nuovamente di 90° in senso antiorario, e così via.

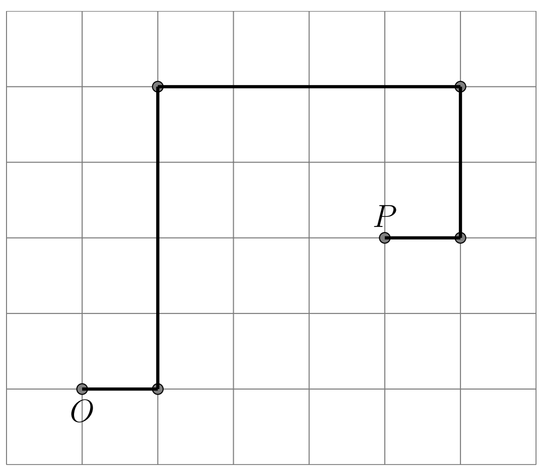
Ecco alcuni esempi:





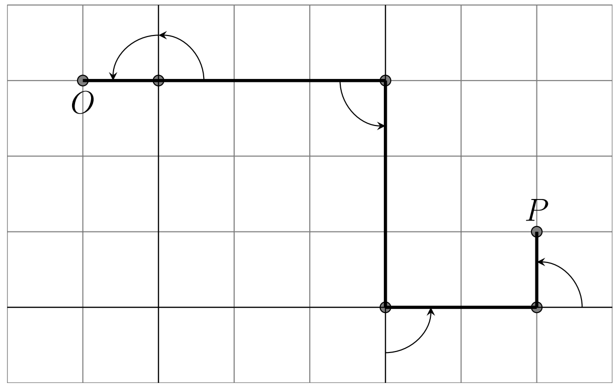
I polinomi $x^2 + 3x + 2$ e $x^2 + 3x - 2$.

Esercizio Che polinomio è?

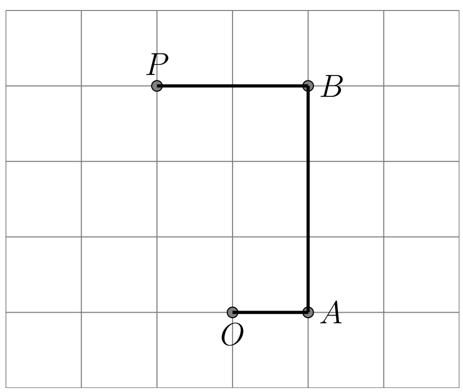


Esercizio Disegnare i polinomi $P(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$, $Q(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$ e $R(x) = x^5 - 3x^3 + 3x^2 + 2x + 1$.

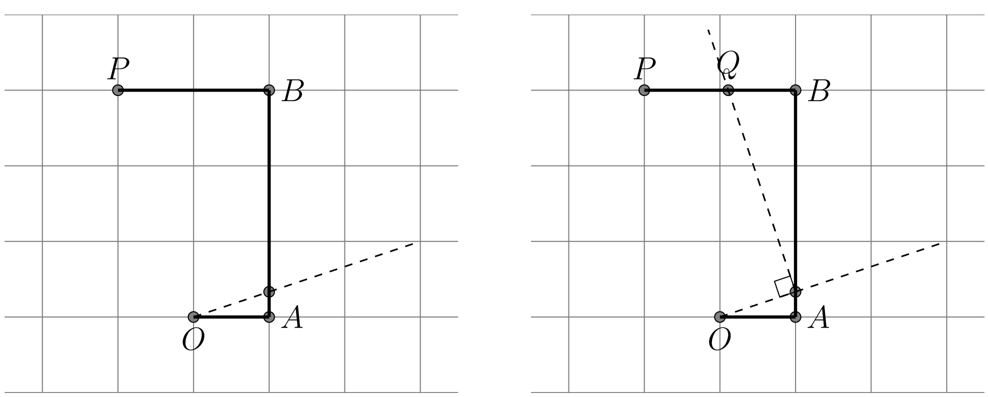
Per l'ultimo, essendo uno dei coefficienti nulli, si deve ruotare **due volte** di 90° gradi in senso antiorario.



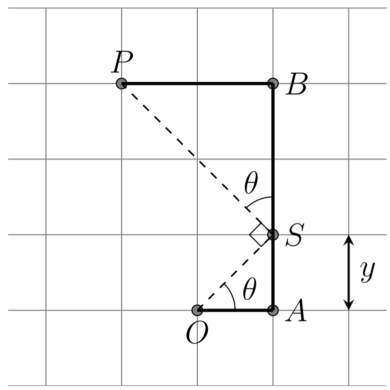
Torniamo ora al polinomio $P(x) = x^2 + 3x + 2$. Vogliamo, “sparando” dall’origine, “colpire” il punto di arrivo (che, in questo caso, è il punto $P = (-1, 3)$).



“Sparare”, per noi, significa, partendo da O, colpire la retta che congiunge i punti A e B, e “rimbalzare” con un angolo di 90°:



trovando così un punto Q sulla retta che passa per B e P. Se P coincide con Q, siamo riusciti a “colpire” P partendo da O:



Consideriamo ora la lunghezza del segmento che congiunge A con S, e chiamiamola y. Allora, dal momento che i triangoli OAS e SBP sono simili (l'angolo θ è lo stesso, ed hanno un angolo retto entrambi per costruzione), abbiamo che

$$\overline{OA} : \overline{AS} = \overline{SB} : \overline{PB}\,, \qquad \text{ovvero} \qquad 1 : y = 3 - y = 2\,.$$

Pertanto, $1 \cdot 2 = y \cdot (3 - y)$, da cui $y^2 - 3y + 2 = 0$. Riscrivendo, abbiamo che

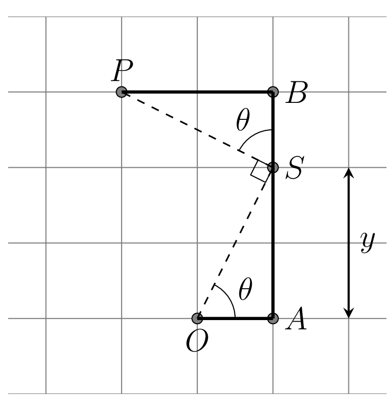
$$(-y)^2 + 3(-y) + 2 = 0\,,$$

cosicché $x = -y$ è soluzione dell'equazione $x^2 + 3x + 2 = 0$. Un altro modo di vedere tale fatto, è considerare che se $P(x) = x^2 + a_1 x + a_2$, allora si ha $O = (0, 0)$ e $P = (1 - a_2, a_1)$. La retta $y = mx$ interseca la retta $x = 1$ nel punto $S = (1, m)$; la retta ortogonale ad $y = mx$ per tale punto ha equazione $y = -\frac{1}{m}(x - 1) + m$; imponendo il passaggio per P, si trova

$$a_1 = -\frac{1}{m}(1 - a_2 - 1) + m \iff m\,a_1 = a_2 + m^2 \iff (-m)^2 + a_1(-m) + a_2 = 0\,,$$

e quindi $-m$ è soluzione dell'equazione.

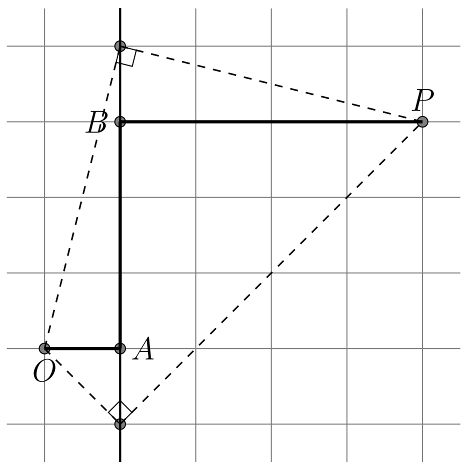
Tornando a $P(x) = x^2 + 3x + 2$, osserviamo ora che abbiamo un altro modo di "colpire" P "sparando" da O:



Se prima trovavamo $y = 1$, adesso troviamo $y = 2$, ovvero (dopo aver cambiato segno) l'altra radice del polinomio

$$P(x) = x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2).$$

Che succede se abbiamo il polinomio $x^2 + 3x - 4$? In questo caso, non è più possibile "sparare" direttamente sul segmento di estremi A e B, e si deve "sparare" sulla **retta** che contiene i due punti.

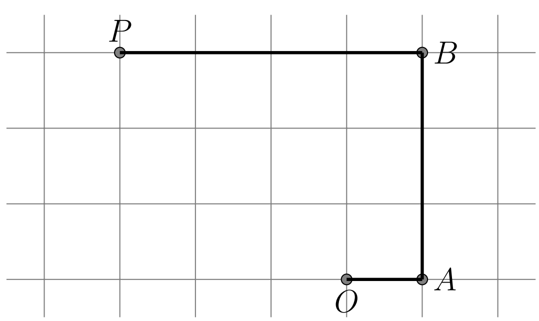


In questo caso le radici sono $x = 1$ e $x = -4$; ed infatti

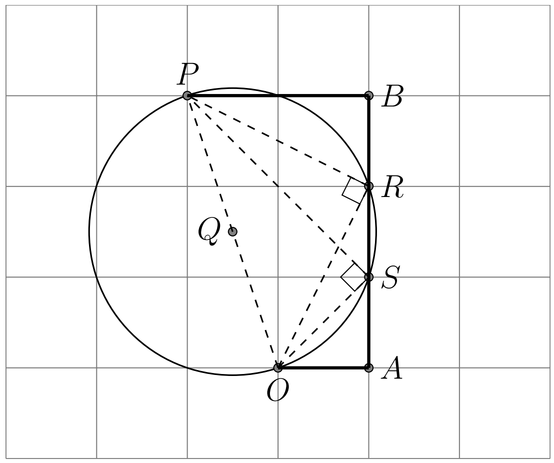
$$x^2 + 3x - 4 = (x - 1)(x + 4),$$

come si verifica facilmente.

Ci chiediamo ora: esiste sempre un modo di "colpire" P "sparando" da O? Se così fosse, saremmo in grado di risolvere tutte le equazioni di secondo grado, mentre è ben noto che esistono equazioni di secondo grado che non hanno soluzioni (in campo reale). Ed infatti, è facile vedere che se l'equazione di secondo grado non ha soluzioni, non esiste modo di "colpire" P. Consideriamo, ad esempio, il polinomio $P(x) = x^2 + 3x + 4$:

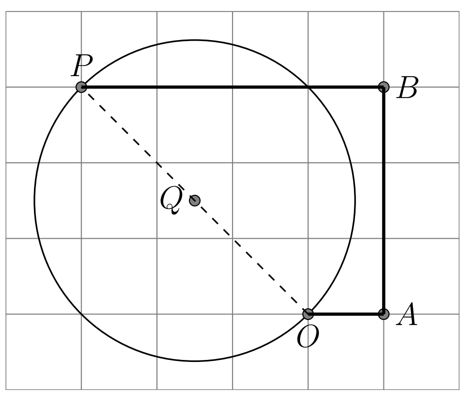


Come facciamo a dimostrare che non esiste alcuna "traiettoria ad angolo retto" che, partendo da O, termina in P? Facciamo un passo indietro, e torniamo al polinomio $P(x) = x^2 + 3x + 2$. Prendiamo il punto medio Q del segmento che congiunge O e P, e tracciamo la circonferenza di centro Q, passante per O. La circonferenza (in questo caso) interseca il segmento che congiunge A e B in due punti R ed S; se consideriamo i due triangoli ORP e OSP, essi sono entrambi rettangoli (perché inscritti in una semicirconferenza), cosicché i percorsi $O \to R \to P$ e $O \to S \to P$ sono due "traiettorie di sparo" corrette per colpire P partendo da O:



Chiaramente, questa costruzione si può ripetere per ogni polinomio: se la circonferenza interseca il segmento di estremi A e B (o la retta che passa per questi due punti) l'equazione ha due soluzioni reali (eventualmente coincidenti); altrimenti, non ne ha.

Torniamo a $P(x) = x^2 + 3x + 4$: in questo caso, la circonferenza non interseca il segmento di estremi A e B (o la retta), e dunque non esistono soluzioni reali all'equazione $x^2 + 3x + 4 = 0$, come peraltro si verifica facilmente usando la formula risolutiva.

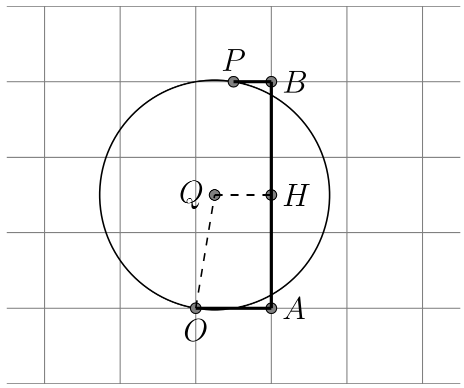


Come devono essere le lunghezze $\overline{AB}$ e $\overline{BP}$, ovvero i coefficienti b e c del polinomio $P(x) = x^2 + b\,x + c$ in modo tale che la circonferenza "tagli" il segmento AB? È presto detto: il centro Q della circonferenza ha coordinate $((1-c)/2, b/2)$, mentre il raggio r della circonferenza è dato da

$$r^2 = \frac{b^2}{4} + \frac{(1-c)^2}{4}\,.$$

La circonferenza “taglia” il segmento AB se il raggio r è maggiore o uguale alla distanza $\overline{QH}$ tra il punto Q e la retta che contiene A e B, ovvero se

$$r^2 = \frac{b^2}{4} + \frac{(1-c)^2}{4} \geq \left(1 + \frac{1-c}{2}\right)^2 .$$

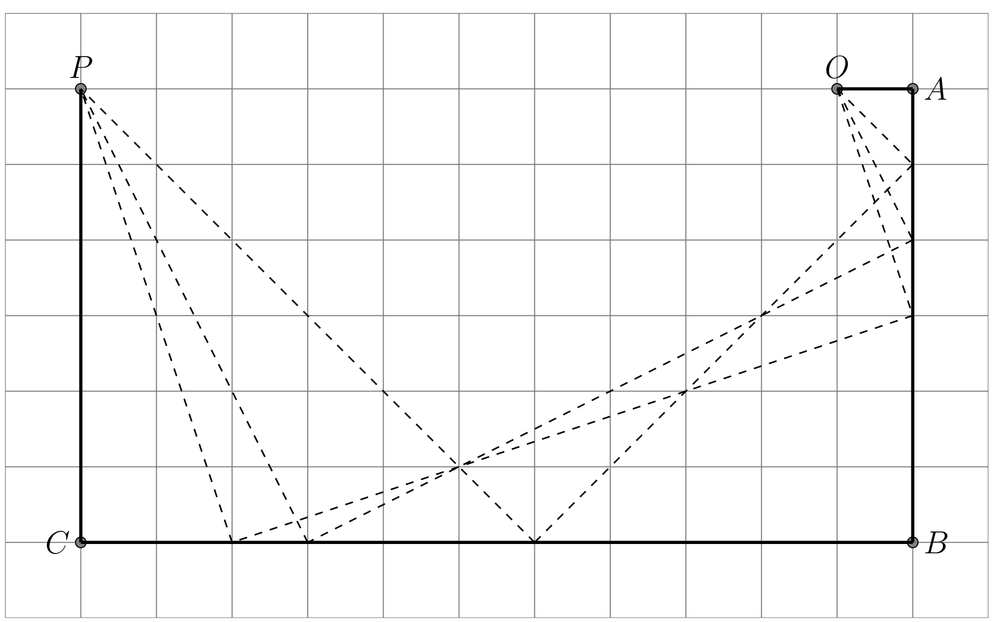


Svolgendo i quadrati si trova la condizione

$$b^2 \geq 4\,c\,,$$

ed ecco (ri)trovata la condizione di risolubilità: il discriminante $b^2 - 4\,c$ del polinomio di secondo grado deve essere positivo.

Che succede con un polinomio di terzo grado? Ad esempio, $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$, cui corrisponde il seguente diagramma:

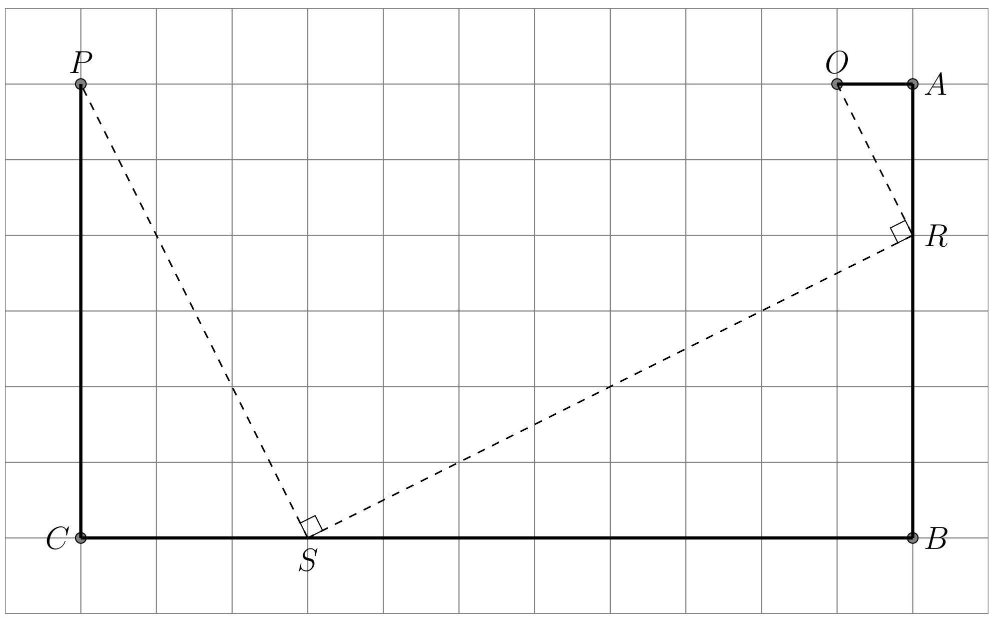


In questo caso, come si vede, esistono **tre** traiettorie possibili, corrispondenti alle tre radici $x = 1$, $x = 2$ ed $x = 3$. D'altra parte, si ha

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x-2)(x-3)\,.$$

La cosa interessante è che, dato che **ogni** equazione di terzo grado ammette almeno una radice reale[(2)], **deve** esistere sempre almeno una "traiettoria a 90°" che permette di raggiungere l'estremo finale partendo dall'origine.

Alt, un momento! Chi ci dice che se ne troviamo una, il valore del "primo punto di rimbalzo" (cambiato di segno) è soluzione dell'equazione?



Torniamo ai triangoli simili: questa volta sono tre: OAR, RBS e SCP. Allora, se $\overline{AR} = y$[(3)], si ha

$$1 : y = \overline{RB} : \overline{BS}\,, \qquad \overline{RB} : \overline{BS} = \overline{SC} : \overline{CP}\,.$$

Dalla prima si ottiene, osservando che $\overline{RB} = 6 - y$, che $\overline{BS} = y\,(6-y)$. Ne segue allora dalla seconda che

$$6 - y : y\,(6-y) = \overline{SC} : 6\,,$$

da cui $\overline{SC} = \frac{6}{y}$. Essendo $\overline{BS} + \overline{SC} = 11$, ne segue che

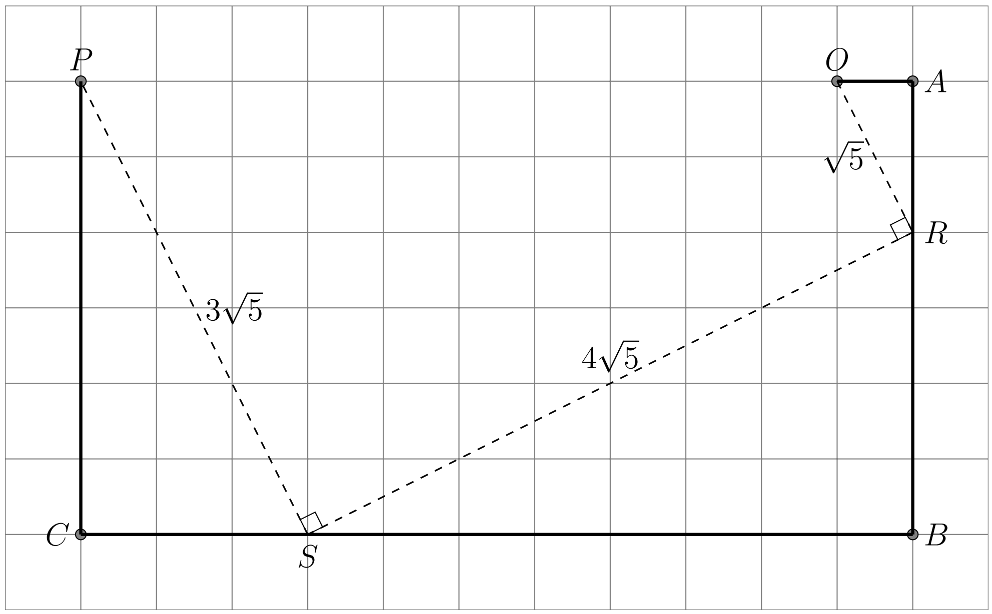
$$y\,(6-y) + \frac{6}{y} = 11 \qquad \Longleftrightarrow \qquad y^2\,(6-y) + 6 = 11y \qquad \Longleftrightarrow \qquad y^3 - 6y^2 + 11y - 6 = 0\,,$$

cosicché $P(y) = 0$.

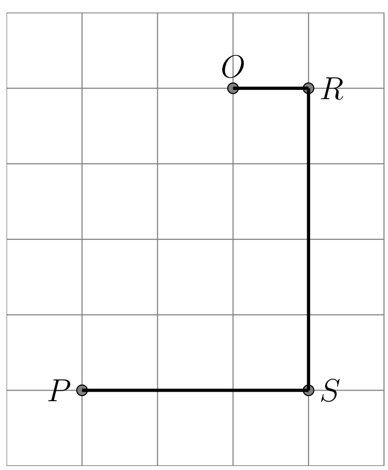
(2) Giuro!

(3) Si noti che in questo caso y è positivo, essendo una lunghezza, e dunque è già "cambiato di segno".

Continuiamo con un'osservazione: torniamo alla traiettoria relativa alla soluzione $x = 2$ per $P(x)$:



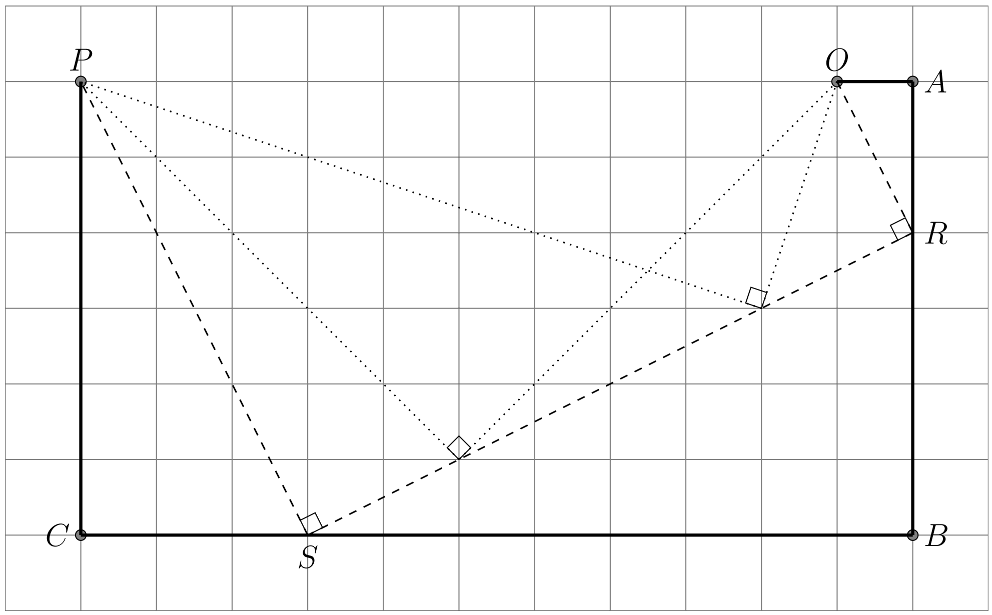
Consideriamo i tre lati della traiettoria, o meglio le loro lunghezze: sono, rispettivamente, $\sqrt{5}$, $4\sqrt{5}$ e $3\sqrt{5}$; se le riscaliamo, dividendo per $\sqrt{5}$, e disegniamo la traiettoria ruotata in senso antiorario di 45°, abbiamo:



Se interpretiamo il disegno come polinomio, ottieniamo $Q(x) = x^2 - 4x + 3$, che non è altro che il quoziente del rapporto tra $P(x)$ e $x - 2$:

$$\frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x - 2} = x^2 - 4x + 3\,.$$

In altre parole, una volta trovata una radice del polinomio $P(x)$, la traiettoria che ci permette di calcolarla ci "disegna" il polinomio quoziente; pertanto, possiamo — sempre graficamente — provare a trovare le altre radici:



Perché la traiettoria che ci permette di trovare la radice x_0 ha lunghezze proporzionali ai coefficienti del polinomio ottenuto dividendo il polinomio di partenza per $x - x_0$? Torniamo a $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$, e ricordiamo che, in un polinomio di terzo grado, il coefficiente di x^2 è la somma, cambiata di segno, delle radici. Se, pertanto, $\overline{AR}$ è 2, ne segue che $\overline{RB}$, che è $6 - \overline{AR} = 4$, è uguale a $x_1 + x_2$, dove x_1 ed x_2 sono le altre due radici di $P(x)$; ma allora, dato che si ha

$$P(x) = (x - 2)(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2)\,,$$

ne segue che

$$P(x) = (x - 2)(x^2 - \overline{RB}\,x + x_1 x_2)\,.$$

Osserviamo ora che i due triangoli OAR e RBS sono simili per costruzione, e quindi

$$\overline{OA} : \overline{OR} = \overline{RB} : \overline{RS} \qquad \Longrightarrow \qquad \overline{RS} = \overline{OR} \cdot \overline{RB}\,.$$

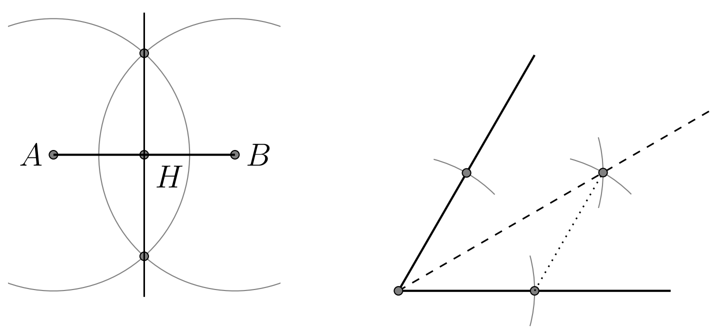
Pertanto, i primi due lati della traiettoria, che codificano il polinomio $\overline{OR}\,x^2 - \overline{RS}\,x + \ldots$, codificano anche il polinomio $\overline{OR}\,[x^2 - \overline{RB}\,x + \ldots] = \overline{OR}\,[x^2 - (x_1 + x_2)\,x + \ldots]$. Quanto al lato $\overline{SP}$, esso sta ad $\overline{OR}$ come $\overline{CP}$ sta a $\overline{AR}$. Ricordiamo ora che $\overline{CP}$ è il prodotto, cambiato di segno, delle radici di $P(x)$, che nel nostro caso vale $2x_1x_2$. Pertanto, dato che $\overline{AR} = 2$, $\overline{PS}$ è uguale a $x_1 x_2 \overline{OR}$, cosicché il polinomio codificato dalla traiettoria è $\overline{OR}\,[x^2 - (x_1 + x_2)\,x + x_1 x_2]$, come volevasi dimostrare.

Abbiamo, dunque, dimostrato che il procedimento di "sparo", se funziona, produce una radice del polinomio di terzo grado (e, contemporaneamente, ci permette di calcolare anche le altre radici) . Con un po' di fatica si può dimostrare che questa tecnica funziona per polinomi di grado qualsiasi, il che ci lascia con una domanda: come possiamo — almeno per un polinomio di terzo grado — costruire la "traiettoria"?

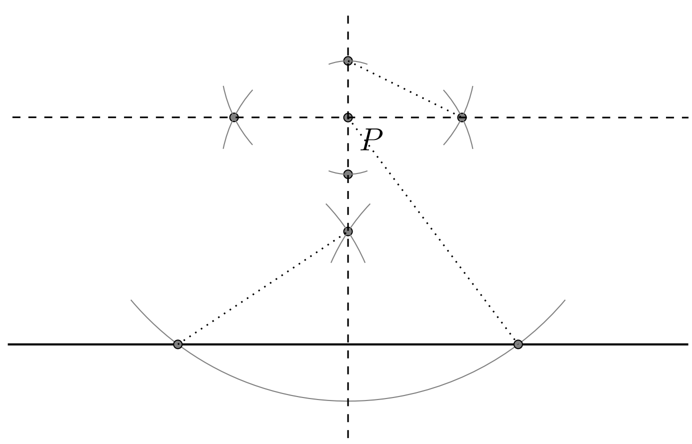
2. Riga e compasso

Come è a tutti ben noto, una parte "storica" della matematica si è interessata alle cosiddette "costruzioni con riga e compasso". Con tale locuzione si intende comprendere una vasta classe di problemi "risolubili" usando unicamente una riga ed un compasso (ovverosia, uno strumento in grado di tracciare cerchi, o archi di cerchio). Esempi tipici di problemi risolubili con riga e compasso sono: dato un segmento, trovarne il punto medio e l'asse; dato un angolo, trovarne la bisettrice; costruire, dati una retta ed un punto che non vi appartenga, la retta perpendicolare e la retta parallela alla retta data, passante per il punto dato; dato un segmento, costruire il quadrato che abbia tale segmento come lato.

Ad esempio:

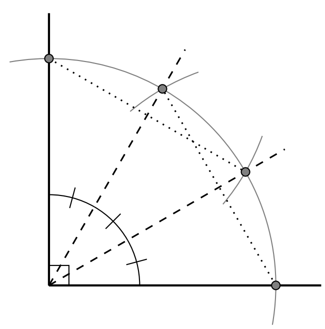


Punto medio ed asse di un segmento; bisettrice di un angolo.



Retta perpendicolare e retta parallela ad una retta data passante per un punto dato.

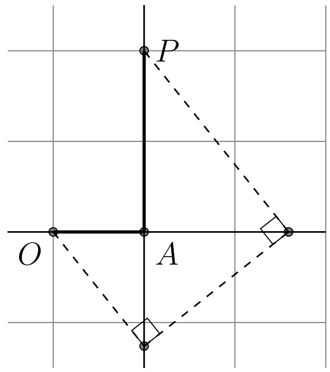
Si può dimostrare (e non è una cosa facile...) che non tutti i problemi sono risolubili con riga e compasso. Due, in particolare, sono i problemi per i quali solo nel 1800 si è riusciti a dare una risposta negativa: la duplicazione del cubo e la trisezione di un angolo. Il primo problema chiede — in sostanza — di "calcolare" la radice cubica di due, mentre il secondo chiede, dato un angolo, di dividerlo in tre parti uguali. Si noti che con riga e compasso si può costruire la radice quadrata di due (è sufficiente costruire la diagonale di un quadrato di lato unitario — costruibile), mentre il secondo problema è relativo ad un angolo "generico". Ad esempio, se l'angolo dato è retto, è semplice suddividerlo in tre parti uguali (essenzialmente perché sappiamo costruire un triangolo equilatero con riga e compasso); quello che non si sa fare è trisecare un angolo qualsiasi.



Trisezione di un angolo retto.

Perché non è possibile costruire la radice cubica di due (o trisecare un angolo qualsiasi)? Perché quello che è stato dimostrato è che, con riga e compasso, si possono costruire oggetti (ovvero: numeri) che siano radici di polinomi di grado una potenza di due: 2, 4, 8, ..., 2^n. Dal momento che la radice cubica di due risolve l'equazione di grado tre $x^3 - 2 = 0$, $\sqrt[3]{2}$ non è costruibile con riga e compasso; analogamente, trisecare un angolo è equivalente a risolvere un'equazione di terzo grado e dunque, nulla da fare.

Se, pertanto, abbiamo il polinomio $P(x) = x^3 - 2$, e vogliamo costruire la traiettoria che ci permette di calcolare $\sqrt[3]{2}$ (e anche $\sqrt[3]{4}$), non possiamo sperare di riuscirci con riga e compasso; con tali strumenti possiamo "solo" risolvere le equazioni di secondo grado (come abbiamo visto in precedenza).



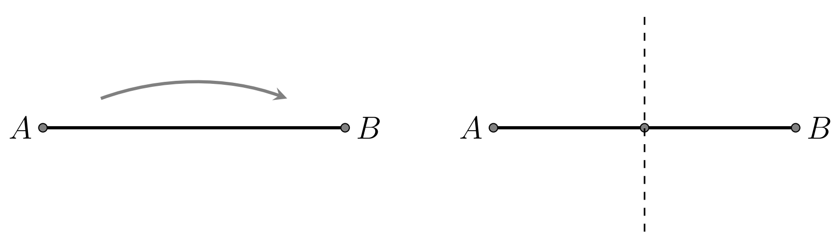
Come trovare questa traiettoria?

3. Origami

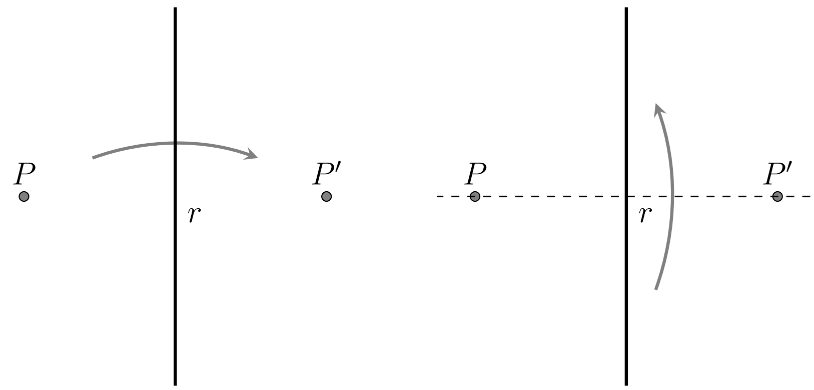
"Origami" è una parola giapponese, derivata da *ori* (piegare) e *kami* (carta): vuol dire, letteralmente, "piegare la carta". Origami, da piccoli, li abbiamo fatti tutti: la barchetta, il cappello, gli aeroplanini, il "paradiso-e-inferno".

In queste note, vogliamo vedere il lato "matematico" degli origami, iniziando dalle costruzioni "possibili" mediante piegatura. Come vedremo, lo strumento "origami" si dimostrerà più potente dell'accoppiata "riga e compasso". Ad esempio, sarà possibile risolvere equazioni di terzo grado (e, quindi, duplicare il cubo e trisecare l'angolo).

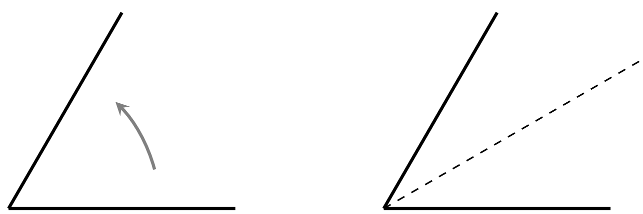
Iniziamo, però, con le cose semplici. Dato un segmento "disegnato" sulla carta di estremi A e B, è facile costruire sia il punto medio che l'asse del segmento $\overline{AB}$: è sufficiente, infatti, piegare la carta in modo da far combaciare A e B. Una volta riaperto il foglio, la piega sulla carta funge da asse (e l'intersezione tra la piega ed il segmento è il punto medio).



Analogamente, dato un punto P ed una retta r, è semplice costruire sia il punto "simmetrico" di P rispetto ad r, che la perpendicolare ad r passante per P; è sufficiente prima piegare il foglio lungo r, denominare P' il punto in cui "atterra" P, e poi piegare il foglio lungo il segmento $\overline{PP'}$.

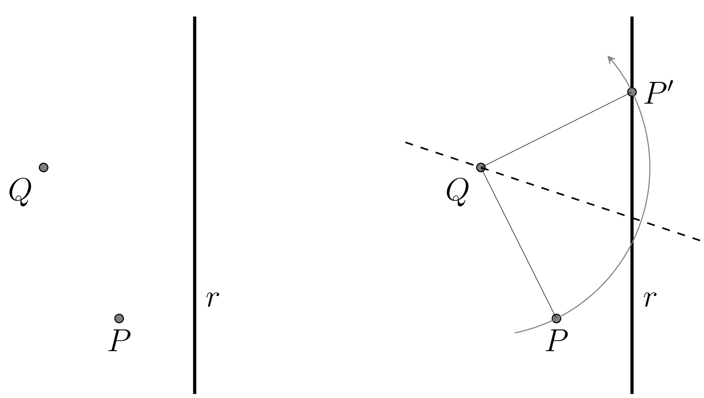


Infine, per trovare la bisettrice di un angolo, è sufficiente piegare il foglio in modo che la retta che determina uno dei due lati dell'angolo si sovrapponga all'altra retta. Riaprendo il foglio, la piega è la bisettrice cercata.

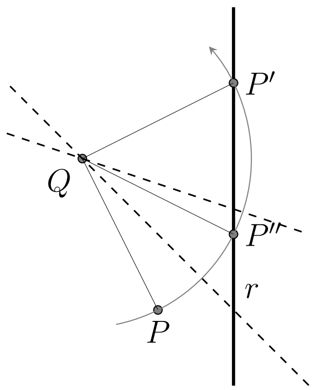


Questi "movimenti" elementari sono stati codificati — nel corso degli anni — e ridotti a sette; in altre parole, esistono solo sette modi "distinti" di piegare la carta (effettuando un'unica piega).

Uno di questi movimenti consiste, dati due punti P e Q ed una retta r, nel piegare il foglio in maniera tale da portare il punto P sulla retta r, "ruotando" intorno a Q.

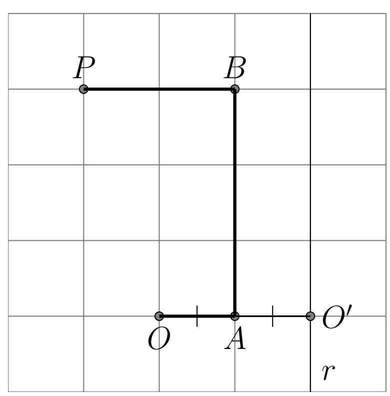


Dal momento che — per costruzione — i punti P e P' si trovano sulla circonferenza di centro Q e raggio $\overline{QP}$, possono esistere due modi diversi di "portare" P su r ruotando intorno a Q (se la distanza $\overline{QP}$ è maggiore della distanza tra Q e r), ovvero un solo modo (se la distanza è uguale), oppure nessuno (se la distanza è maggiore).



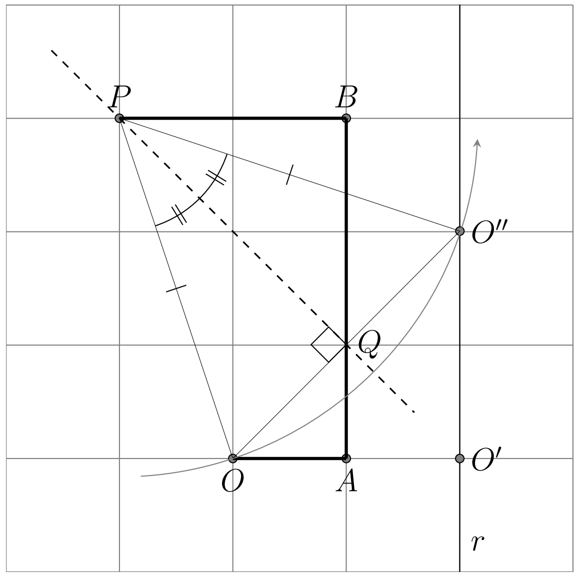
Uhm... Due soluzioni, una soluzione, nessuna soluzione... Sembra quasi un'equazione di secondo grado! E, infatti, lo è: stiamo trovando le intersezioni tra una circonferenza (un'equazione di secondo grado) ed una retta (un'equazione di primo grado), ed è dunque ragionevole avere due soluzioni, o una sola, o nessuna.

Possiamo, allora, risolvere le equazioni di secondo grado, con gli origami? Torniamo alla rappresentazione grafica, ad esempio di $P(x) = x^2 + 3x + 2$, e tracciamo[(4)] la retta r, parallela al segmento AB, e contenente il punto O', simmetrico di O rispetto al segmento $\overline{AB}$:



Dopodiché "portiamo" il punto O sulla retta r, ruotando intorno a P, e chiamiamo O'' il punto così trasformato e Q l'intersezione tra la "piega" ed il segmento $\overline{OO''}$:

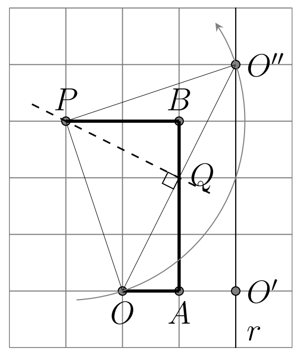
[(4)] "Tracciare" nel senso degli origami: come si farà? Esercizio!



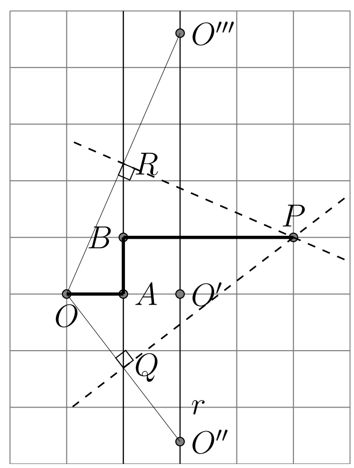
Ora, per costruzione il triangolo OPO'' è isoscele (dato che i due lati $\overline{OP}$ e $\overline{O''P}$ sono uguali essendo i raggi di una circonferenza), ed il segmento $\overline{PQ}$ è la bisettrice dell'angolo OPO''; infatti, nel portare il punto O sulla retta r, abbiamo contemporaneamente portato la retta $\overline{OP}$ sulla retta $\overline{O''P}$, cosicché la "piega" $\overline{PQ}$ è la bisettrice dell'angolo OPO''. Essendo bisettrice di un triangolo isoscele, è anche altezza di tale triangolo, cosicché l'angolo OQP è retto; ne segue che la traiettoria $O \to Q \to P$ è una delle traiettorie che permette di "risolvere" l'equazione $x^2 + 3x + 2 = 0$. Chi ci dice, però, che il punto Q si trova (come nel disegno, che potrebbe essere fuorviante) sul segmento $\overline{AB}$? Ce lo dice il teorema di Talete[(5)]: se chiamiamo R l'intersezione del segmento $\overline{OO''}$ con il segmento $\overline{AB}$, dal momento che il segmento $\overline{AB}$ e la retta r sono paralleli (per costruzione), il segmento $\overline{OA}$ sta al segmento $\overline{AO'}$ come il segmento $\overline{OR}$ sta al segmento $\overline{RO''}$; dal momento che i segmenti $\overline{OA}$ ed $\overline{AO'}$ sono uguali (per costruzione), anche i segmenti $\overline{OR}$ e $\overline{RO''}$ sono uguali, e quindi R è il punto medio del segmento $\overline{OO''}$ — cosicché coincide con Q.

Abbiamo così trovato una radice; piegando il foglio nel secondo modo, troviamo l'altra:

[(5)]Un fascio di rette parallele che interseca due trasversali determina su di esse segmenti direttamente proporzionali.



Che succede se il polinomio è $P(x) = x^2 + x - 3$? La costruzione è la stessa:



Come abbiamo detto prima, l'equazione è risolubile se la distanza tra il punto P e la retta r è minore (o uguale) alla distanza tra P e O. Se abbiamo il polinomio $P(x) = x^2 + b\,x + c$, le coordinate dei due punti sono $O = (0, 0)$ e $P = (1 - c, b)$, mentre la retta r ha equazione $x = 2$ (essendo il polinomio monico, si ha sempre $O' = (2, 0)$). Pertanto, la distanza (al quadrato) tra P e O è $\alpha^2 = b^2 + (1 - c)^2$, mentre la distanza (al quadrato) tra P e la retta r è $\beta^2 = (1 + c)^2$. Dovendo essere $\alpha^2 \geq \beta^2$, abbiamo

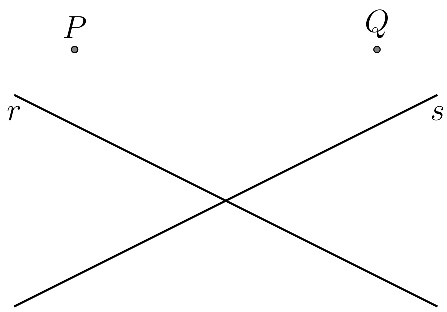
$$b^2 + (1 - c)^2 \geq (1 + c)^2 \quad \Longleftrightarrow \quad b^2 + 1 - 2c + c^2 \geq 1 + c^2 + 2c \quad \Longleftrightarrow \quad b^2 - 4c \geq 0\,,$$

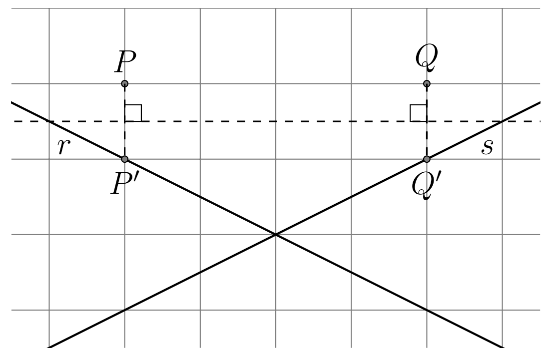
che è proprio la condizione di positività del discriminante dell'equazione.

Fin qui, tra riga e compasso e origami, non sembra esserci differenza dal punto di vista della risoluzione delle equazioni: usando una delle due costruzioni viste in precedenza, sappiamo risolvere equazioni di secondo grado (o sappiamo dire quando non hanno soluzioni).

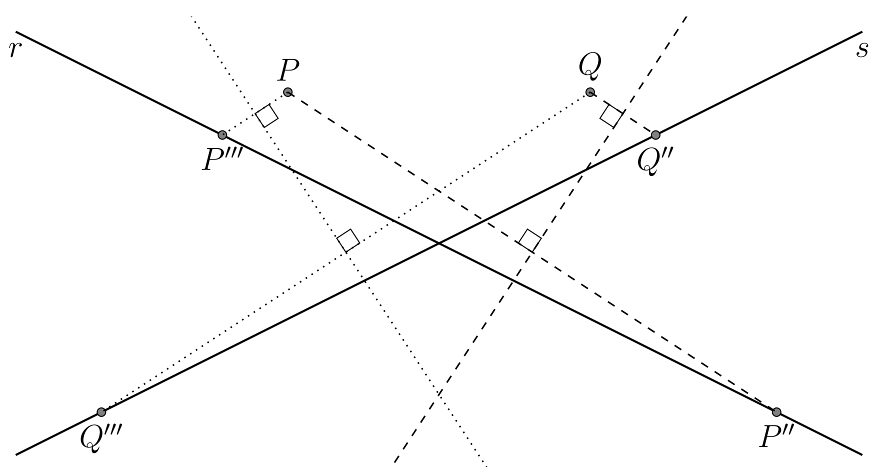
Dove, però, l'origami è "migliore" delle costruzioni con riga e compasso è nella risoluzione delle equazioni di terzo grado. Perché, tra i tanti modi di piegare la carta, ne esiste uno che permette di risolvere equazioni di grado superiore al secondo.

Supponiamo di avere le rette r e s e due punti (generici) P e Q, e vogliamo piegare la carta in modo da portare P su r e, contemporaneamente, Q su s:



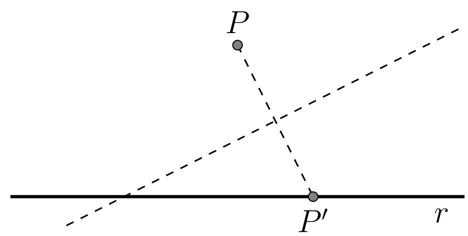


Il fatto notevole è che la "piega" disegnata qui sopra non è l'unica possibile che porta P su r e Q su s: ne esistono altre due (e non più di due...).

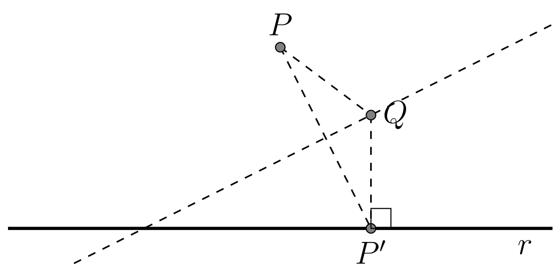


Quello che abbiamo fatto, essenzialmente, è la seguente operazione: portando P su r (ed esistono infiniti modi di fare una simile operazione), la piega che facciamo è l'asse del segmento $\overline{PP'}$ che congiunge il punto P e la sua "immagine" su r; analogamente, portando Q su s (di nuovo: infiniti modi), pieghiamo il foglio di carta lungo l'asse del segmento $\overline{QQ'}$ che congiunge Q con la sua immagine su s; portare contemporaneamente P su r e Q su s consiste nel trovare le "posizioni finali" P' e Q' in modo tale che la piega sia, allo stesso tempo, asse del segmento $\overline{PP'}$ e del segmento $\overline{QQ'}$.

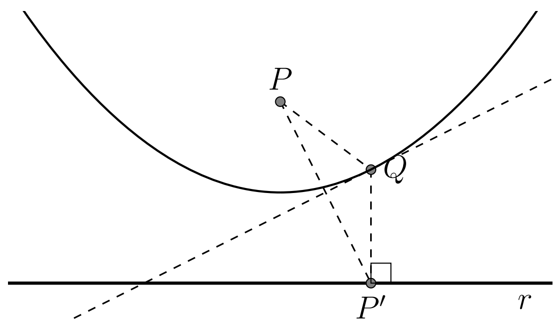
Come si fa a vedere che esistono al più tre modi di far sì che i due assi coincidano? L'idea è la seguente: limitiamoci ad un solo punto, ed una sola retta. Che cosa rappresenta la "piega" che porta P in P', situato sulla retta r?



Come abbiamo detto, la piega è l'asse del segmento $\overline{PP'}$; pertanto, se da P' alziamo la perpendicolare ad r, che incontra la "piega" nel punto Q, i due segmenti $\overline{PQ}$ e $\overline{P'Q}$ sono uguali.



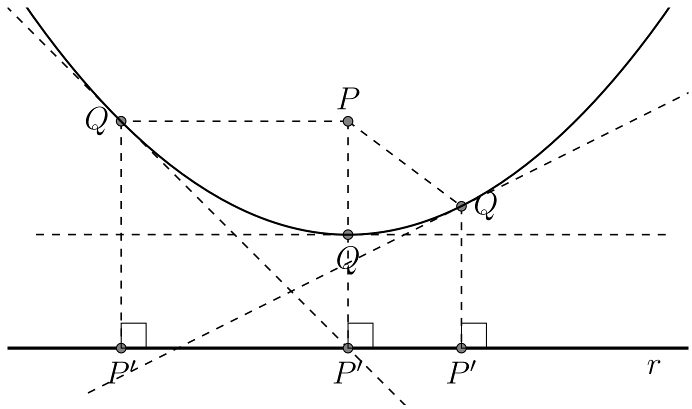
In altre parole, il punto Q si trova sulla parabola(6) che ha direttrice r e fuoco P.



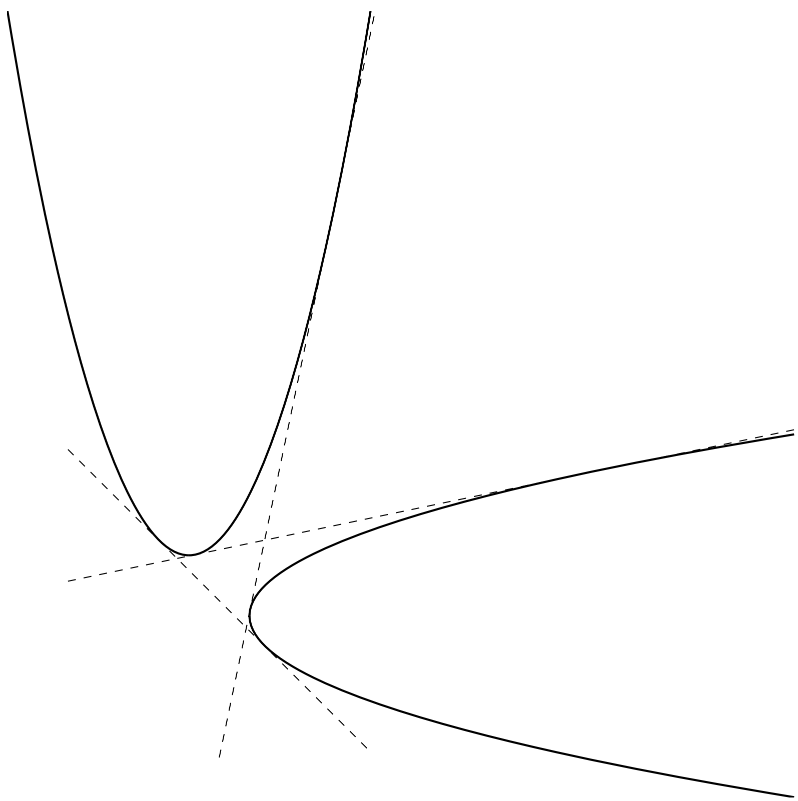
E la "piega", che retta è, per la parabola? È facile vedere che nessun altro punto della piega si trova sulla parabola (essenzialmente perché, essendo l'asse del segmento $\overline{PP'}$, ogni altro suo punto, essendo equidistante da P e P', non può essere equidistante da P e dalla retta r). Pertanto, la "piega" ha un unico punto di contatto con la parabola; ma tra una retta (primo grado), ed una parabola (secondo grado), i punti di contatto sono in generale due (o nessuno). Se ne esiste uno solo, vuol dire che — per definizione — la retta è tangente.

In definitiva: portando P su r, in un modo qualsiasi, la "piega" è tangente alla parabola di direttrice r e fuoco P.

(6)Per definizione: il luogo dei punti equidistanti da una retta r (direttrice) e da un punto P (fuoco).



Se, quindi, vogliamo portare contemporaneamente P su r e Q su s, la "piega" dovrà essere allo stesso tempo tangente alla parabola di direttrice r e fuoco P, ed alla parabola di direttrice s e fuoco Q. Dal momento che al più tre rette del piano possono essere contemporaneamente tangenti a due parabole, ecco che esistono al più tre pieghe del foglio con la proprietà di portare P su r e Q su s.



Le tre tangenti comuni a $y = x^2 + 1$ e $x = y^2 + 1$.

Per vedere che le rette sono esattamente tre, supponiamo di avere le due parabole $y = x^2 + 1$ e $x = y^2 + 1$. Fissato a reale, la retta tangente alla prima parabola, nel suo punto (a, a^2+1) ha come equazione

$$y = 2ax + 1 - a^2 \,.$$

Tale retta interseca la seconda parabola nei punti di ascissa x tale che

$$x = (2ax + 1 - a^2)^2 + 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 4a^2x^2 + (4a - 4a^3 - 1)x + a^4 - 2a^2 + 2 = 0 \,.$$

Imponendo che le due ascisse coincidano (per avere che la retta sia tangente alla seconda parabola), il discriminante deve essere nullo, e quindi

$$(4a - 4a^3 - 1)^2 = 16a^2(a^4 - 2a^2 + 2) \,.$$

Elevando al quadrato, si ottiene

$$16a^2 + 16a^6 + 1 - 32a^4 - 8a + 8a^3 = 16a^6 - 32a^4 + 32a^2 \,,$$

da cui si ottiene, semplificando, che a deve essere tale che

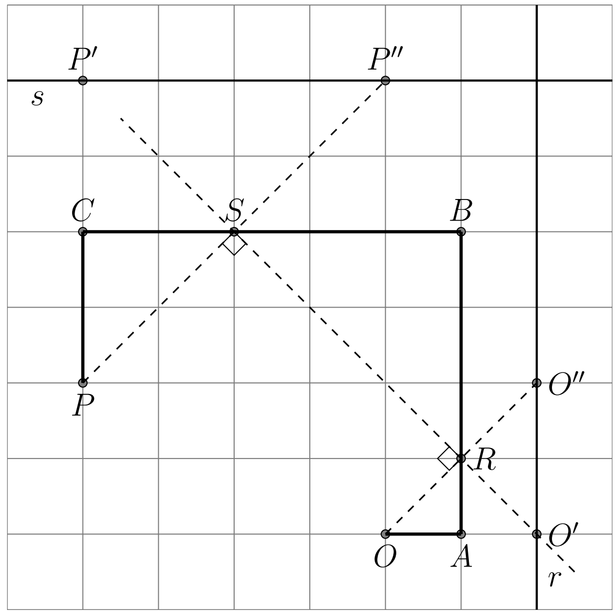
$$8a^3 - 16a^2 - 8a + 1 = 0 \,.$$

Risolvendo l'equazione, si trova $a = -\frac{1}{2}$, $a = \frac{5-\sqrt{21}}{4}$ e $a = \frac{5+\sqrt{21}}{4}$, cui corrispondono, appunto, tre rette tangenti (e solo tre).

Se — dunque — portare contemporaneamente due punti su due rette equivale a risolvere un'equazione di terzo grado, possiamo pensare (o sperare...) che un'equazione di terzo grado si possa risolvere portando due punti su due rette.

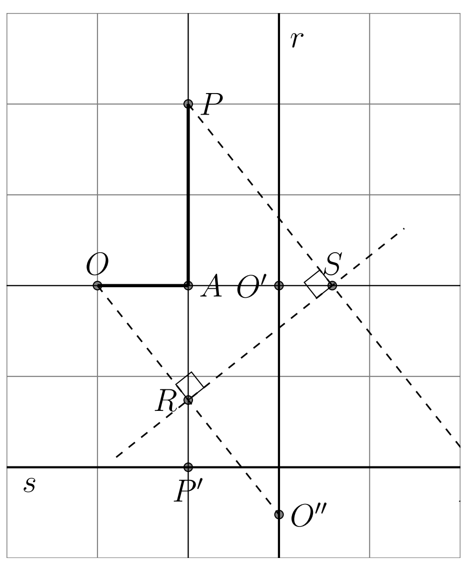
Ed è proprio così: si tratta di generalizzare il procedimento valido per le equazioni di secondo grado[7]. Prendiamo il polinomio $P(x) = x^3 + 4x^2 + 5x + 2$, rappresentiamolo graficamente, tracciamo le parallele ad $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ "simmetriche" rispetto a O e P rispettivamente, e "portiamo" O sulla retta r parallela ad $\overline{AB}$, e P sulla retta parallela a $\overline{BC}$, eseguendo la piega che congiunge R ed S:

[7]A dirla tutta, il procedimento per le equazioni di secondo grado è una caso particolare di quello che stiamo per definire. Perché? Esercizio!

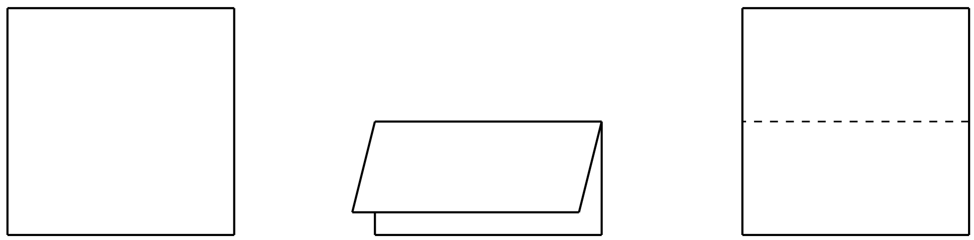


Perché questo meccanismo funziona? Ovvero, perché la traiettoria $O \to S \to R \to P$ è una corretta "traiettoria di sparo" per risolvere l'equazione $P(x) = 0$? Perché, come abbiamo detto in precedenza, la retta che passa per R ed S è, allo stesso tempo, sia l'asse del segmento $\overline{OO''}$ che l'asse del segmento $\overline{PP''}$, cosicché gli angoli OSR e SRP sono retti; inoltre — di nuovo per il teorema di Talete — la simmetria tra O e O', e tra P e P', fa sì che S appartenga al segmento $\overline{AB}$, e R al segmento $\overline{BC}$.

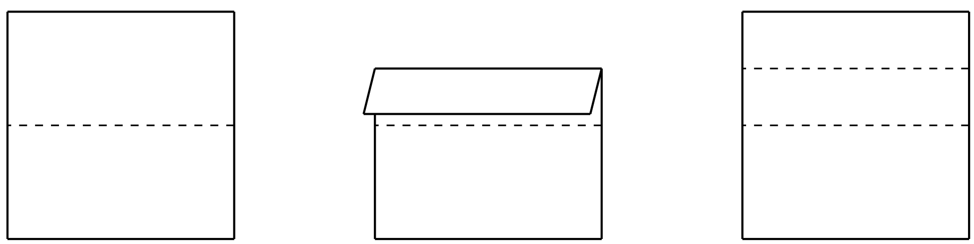
A questo punto, possiamo risolvere l'equazione $P(x) = x^3 - 2 = 0$, ovvero "costruire" la radice cubica di 2. In questo caso, il polinomio ha due coefficienti nulli, che però determinano comunque le rette r e s, parallele e simmetriche:



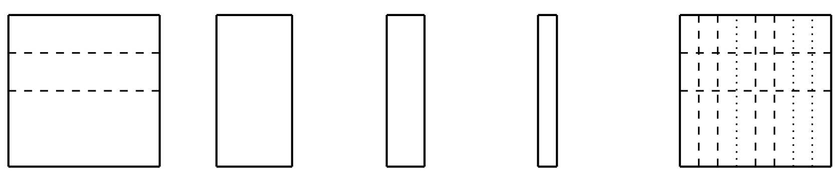
Come fare, nella pratica, a costruire la radice cubica di 2 partendo da un foglio di carta? Innanzitutto, supponiamo di partire da un foglio quadrato, che piegheremo in due parti in orizzontale, per poi riaprirlo (ottenendo una piega centrale “a valle”):



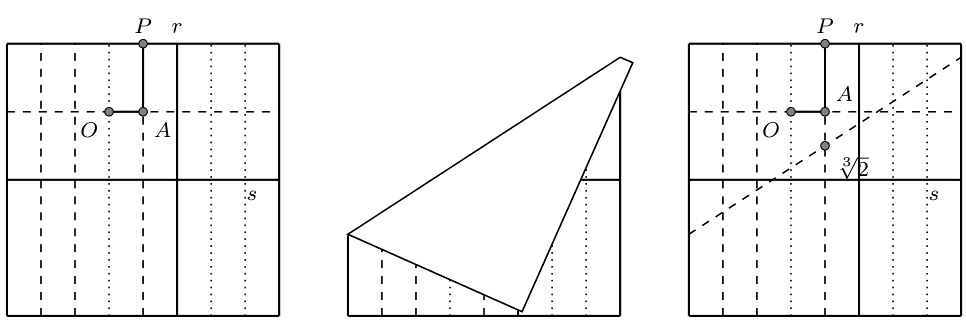
Pieghiamo ora la parte superiore, portandola verso il centro del foglio, e riapriamo (altra piega “a valle”):



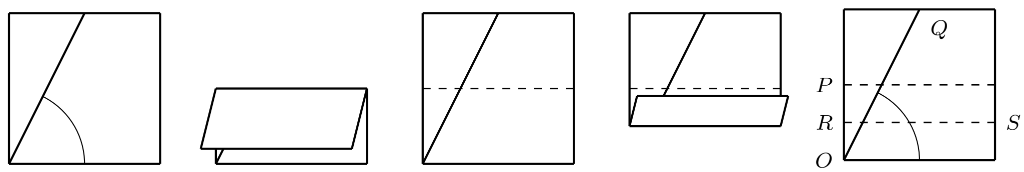
Pieghiamo ora il foglio a metà in senso verticale, poi di nuovo a metà, poi di nuovo a metà, e riapriamo (ottenendo un’alternanaza di pieghe “a valle” ed “a monte”):



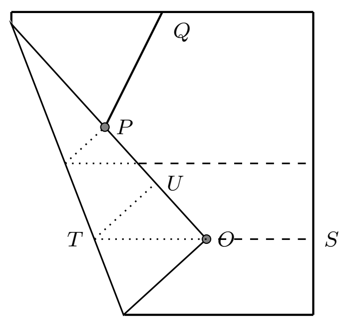
A questo punto, possiamo marcare il polinomio, le due rette “simmetriche”, piegare il foglio portando O su r e P su s e riaprire:



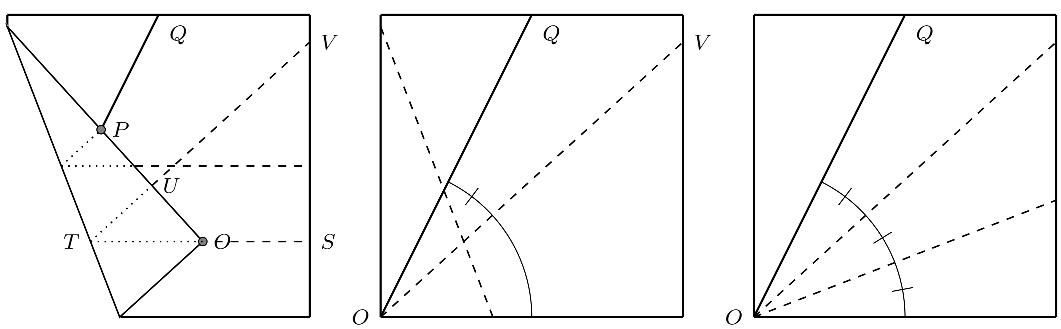
Come fare per la trisezione di un angolo? Ci limitiamo qui a dare una "ricetta" per ottenere la trisezione, partendo da un foglio quadrato (o rettangolare). Pieghiamo orizzontalmente il foglio "a caso" (ad esempio: a metà) e riapriamo. Pieghiamo ora la parte bassa del foglio in modo da dimezzarla, e riapriamo:



A questo punto (ed ecco l'operazione "di terzo grado") portiamo il punto O sulla retta che congiunge R ed S, e il punto P sulla retta che congiunge O e Q:



Successivamente, pieghiamo il foglio lungo la linea che congiunge T con U, e riapriamolo, proseguendo la piega fino all'origine:



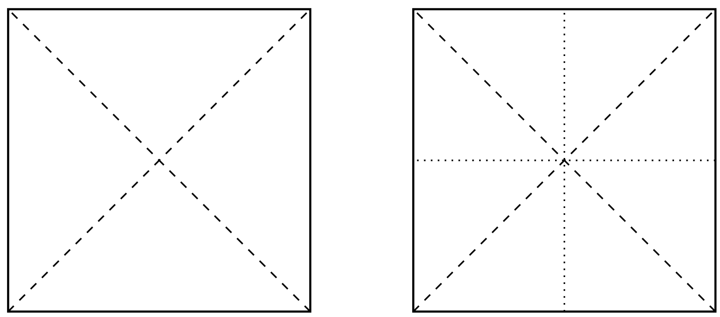
L'angolo VOQ è un terzo dell'angolo dato; per ottenere l'altro terzo, è sufficiente piegare il lato basso del quadrato sulla retta che congiunge O a V, bisecando così il rimanente angolo. Come si vede che l'angolo così ottenuto è un terzo dell'angolo di partenza? Esercizio[8]!

---

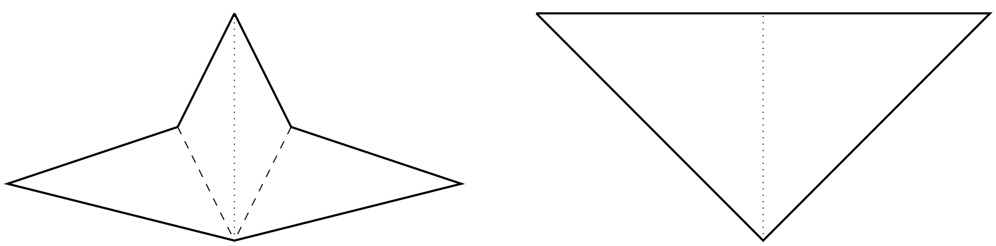
[8] Fate vedere che ci sono tre triangoli simili…

4. Le pieghe della gru

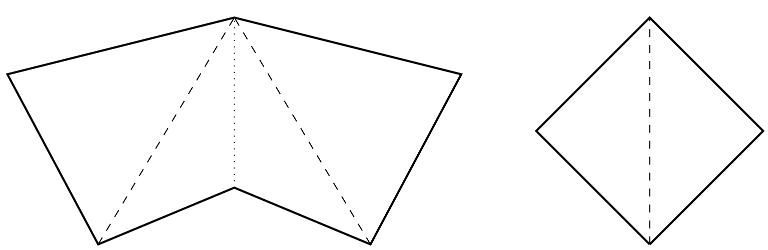
Supponiamo adesso di aver creato un origami; ad esempio, partendo da un foglio quadrato, pieghiamolo prima "a valle" lungo le due diagonali, e poi "a monte" lungo le mediane dei lati:



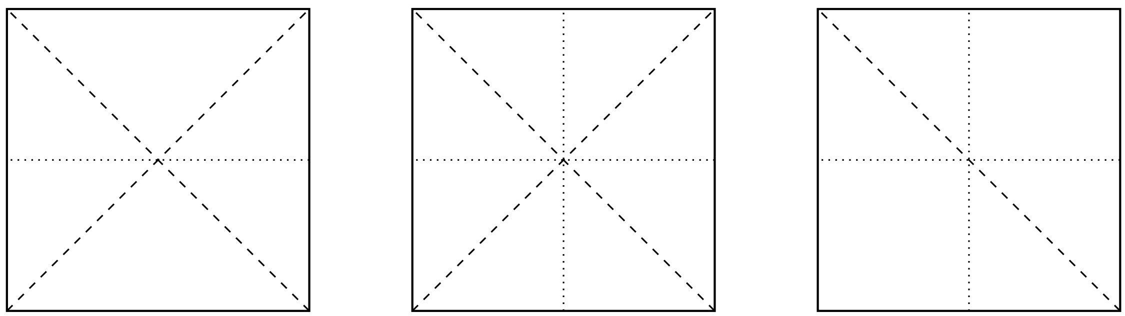
A questo punto — sfruttando le pieghe fatte — possiamo ripiegare il quadrato in due modi diversi: possiamo piegarlo lungo una diagonale, avvicinare i due lati verso il centro, e poi rendere il tutto piatto, formando una struttura triangolare (di area la metà del quadrato originale):



Oppure possiamo piegare il foglio lungo una delle due mediane, di nuovo avvicinare i lati verso il centro, per poi ottenere un quadrato (di area un quarto del quadrato originario):



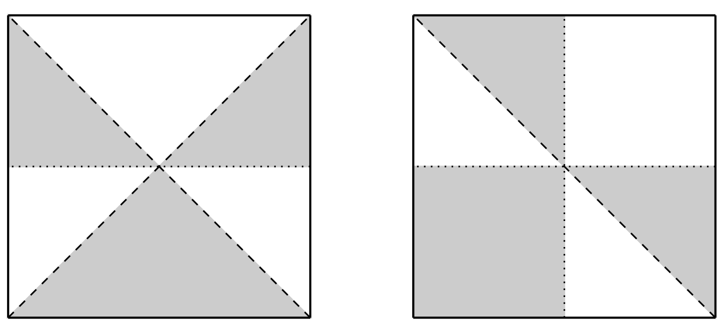
Qualsiasi sia la configurazione che scegliamo, ci rendiamo subito conto che le due pieghe visibili nel risultato finale sono state usate solo per la costruzione della struttura: mentre il foglio è piegato lungo tutte le altre pieghe che abbiamo fatto (e nella direzione in cui tali pieghe sono state fatte), il foglio rimane "piatto" intorno alle due pieghe verticali. In altre parole, per arrivare al triangolo (o al quadrato) una delle pieghe originarie era superflua: nel caso del triangolo una delle due pieghe "mediane", nel caso del quadrato una delle due pieghe diagonali. Il che significa che i diagrammi di piegatura "ridotti" — ottenuti da quelli originali eliminando le "pieghe superflue" — sono rispettivamente:



Qual è la differenza tra questi diagrammi? Che mentre il diagramma centrale può essere piegato ottenendo sia il triangolo che il quadrato, il primo dei tre può solo "piegarsi" nel triangolo, ed il secondo solo nel quadrato. Pertanto, eliminando una delle due pieghe, abbiamo reso univoco sia il modo di piegare la struttura, che il risultato ottenuto con le piegature.

Uno qualsiasi dei diagrammi "ridotti" — che altro non è che l'alternarsi di pieghe che otterremmo da un origami "riaprendolo" (e non considerando le pieghe ausiliarie fatte, ma solo quelle che sono effettivamente presenti nel modello piegato) — prende nome di "schema delle pieghe"[9], ed ha delle notevoli proprietà matematico-geometriche.

Innanzitutto, lo schema delle pieghe suddivide il foglio in regioni, come se fosse una mappa geografica. Come tutte le mappe piane, lo schema è colorabile con al più quattro colori[10]; in realtà, lo schema delle pieghe di un origami è colorabile **con soli due colori**, che si alternano:

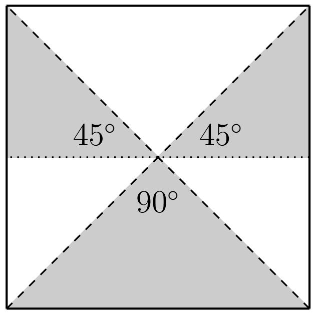


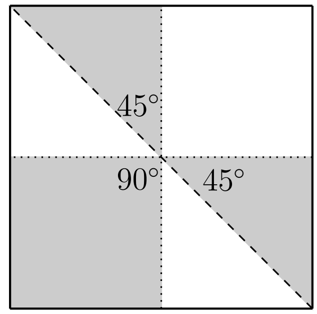
In ogni punto interno in cui si incontrano più pieghe, la differenza tra le pieghe "a valle" e quelle "a monte" è sempre ± 2. Ad esempio, nel primo caso al centro del quadrato si incontrano 4 pieghe a valle e 2 a monte, viceversa nel secondo caso. Infine, se sommiamo

[9] Traduzione di *crease pattern*.

[10] Ma questa è un'altra storia...

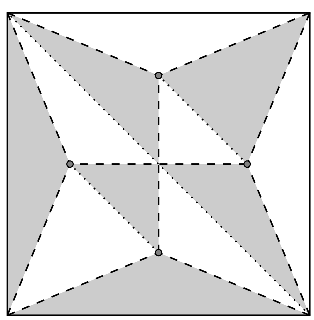
gli angoli "di posto pari" (che sono quelli con lo stesso colore), otteniamo 180° (e quindi otteniamo lo stesso risultato sommando gli angoli "di posto dispari").

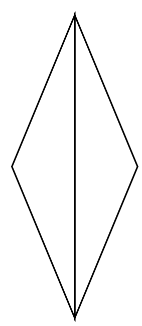




Si può dimostrare che, dato uno schema di pieghe che soddisfi le tre regole appena enunciate, è possibile "piegarlo" in modo da ottenere una struttura in cui le uniche pieghe "reali" siano quelle del diagramma. Come — poi — sia possibile capire dal diagramma la successione di mosse necessaria per arrivare alla struttura finale dallo scheme di pieghe, è tutto un altro discorso: esistono degli algoritmi che permettono di "piegare" il foglio di carta, ma il tempo di calcolo necessario per passare dallo schema alla struttura cresce in maniera esponenziale in funzione del numero di pieghe.

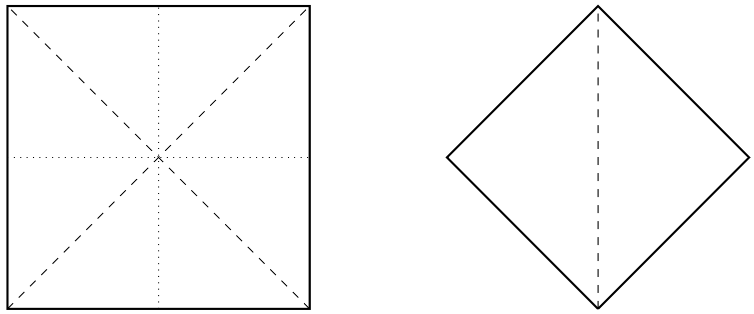
Consideriamo, ad esempio, il seguente schema di pieghe, che rispetta le regole e che, piegato, porta ad una delle strutture di base degli origami:



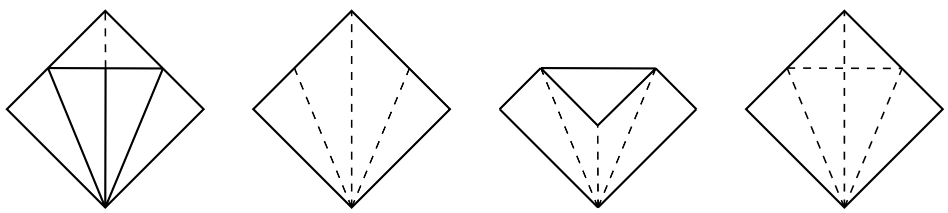


Se, però, provassimo a "piegare" direttamente la carta in modo da ottenere le pieghe a monte ed a valle dello schema qui sopra, ci troveremmo subito a mal partito: riusciremmo a rispettare l'alternanza di colori, e la "differenza ±2" tra le pieghe, ma difficilmente riusciremmo ad "azzeccare" la regola degli angoli. In particolare, i punti segnati nel diagramma sono gli incentri dei quattro triangoli in cui le diagonali suddividono il quadrato: come fare a determinarli? Qui entrano in gioco le "pieghe" di costruzione, quelle che facciamo per aiutarci.

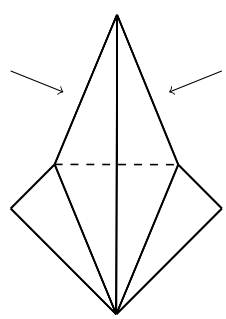
Ripartiamo dal quadrato con le quattro pieghe, e pieghiamolo nel secondo modo visto in precedenza (ovvero, partendo dalle pieghe mediane), ottenendo un quadrato più piccolo.



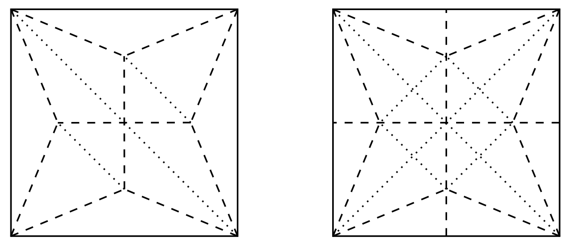
Una volta ottenuto il quadrato, dopo aver controllato che la parte “aperta” della struttura sia rivolta verso il basso, pieghiamo la struttura come qui sotto, riapriamo e pieghiamo la parte superiore (per poi riaprire):



A questo punto, apriamo il lembo inferiore e ripieghiamolo verso l’alto, per poi far “collassare” il tutto in piano.



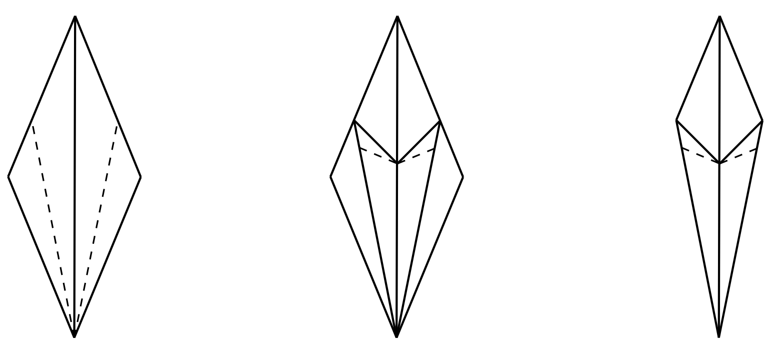
Osserviamo che, nel processo di “collassamento” due delle pieghe che erano “a valle” sono diventate “a monte” (sono quelle indicate dalle frecce); inoltre, una “piega a valle” (tratteggiata nella figura), e che proviene da una delle pieghe mediane originali, non è tale nel modello piegato, che è “piatto” intorno a quella piega; in altre parole, abbiamo da un lato dovuto forzare la carta a piegarsi in senso inverso rispetto a come era stata piegata (in modo “ausiliare”), e dall’altro abbiamo dovuto “trascurare” una parte delle pieghe fatte. Se, a questo punto, riaprissimo il foglio di carta dopo aver effettuato le pieghe “simmetriche” dall’altro lato del modello, ci troveremmo con una situazione diversa da quella disegnata prima:



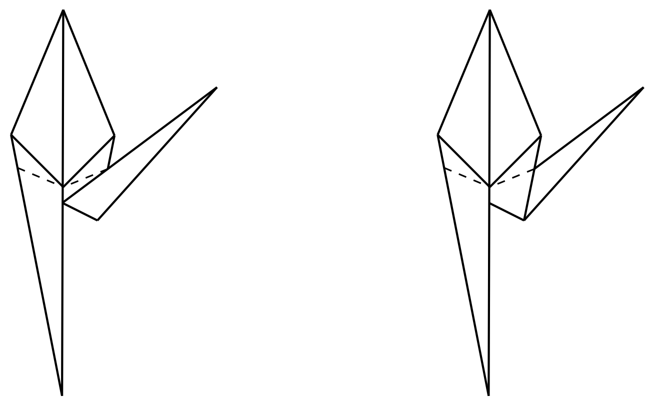
Dei due schemi, il secondo è "scorretto": pur rispettando la regola degli angoli (per costruzione! O meglio per piegatura) e la regola dell'alternanza dei colori, non rispetta la regola del "± 2": ad esempio, al centro del quadrato convergono quattro pieghe a valle e quattro a monte. Pertanto, davanti ad uno schema di pieghe come il secondo, non sapremmo come costruire la struttura: alcune delle pieghe che vediamo sono solo "ausiliarie", ma non abbiamo modo di sapere quali.

A partire dalla struttura che abbiamo "creato" (e che prende il nome di "base della gru") continuiamo: lo scopo sarà quello di ottenere un origami tridimensionale (mentre il passaggio dallo schema delle pieghe alla struttura crea un oggetto "piatto" e quindi sostanzialmente bidimensionale), che rappresenterà — non a caso — una gru.

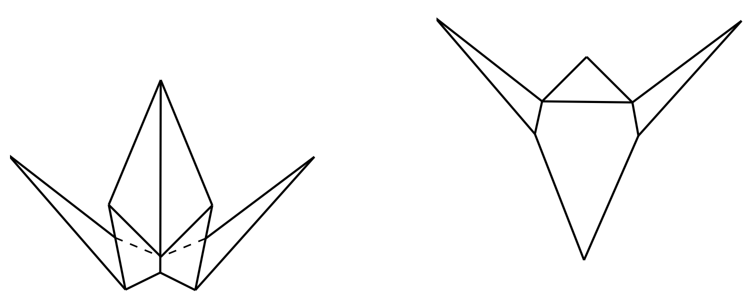
Torniamo — comunque — all'oggetto che abbiamo piegato, continuiamo con le pieghe (ripetendole sull'altro lato), e pieghiamo ancora:



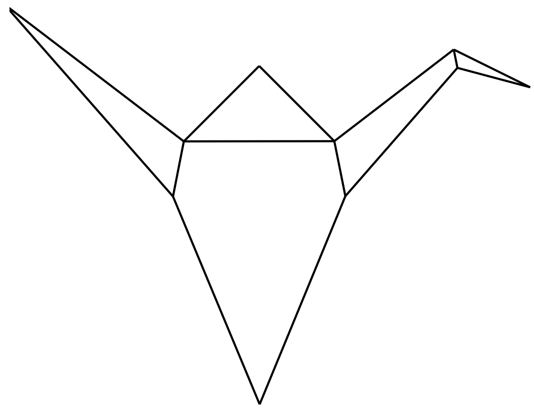
Pieghiamo ora la parte in basso verso l'alto (eseguiamo la piega prima a valle e poi a monte, per "ammorbidire" la carta):



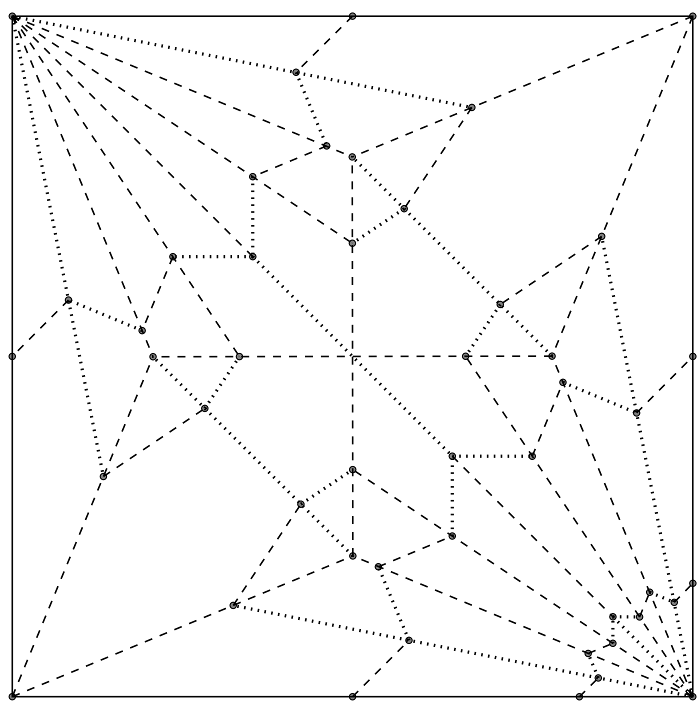
Ora (questa è la parte più difficile) dobbiamo “ribaltare” dall’esterno verso l’interno le pieghe indicate dalle frecce: il risultato finale è lo stesso, ma la parte che avevamo piegato è ora “incastrata” tra due lembi di carta (ed è così bloccata nel suo movimento). Ripetiamo le stesse operazioni dall’altro lato e, successivamente, “tiriamo giù” le ali:



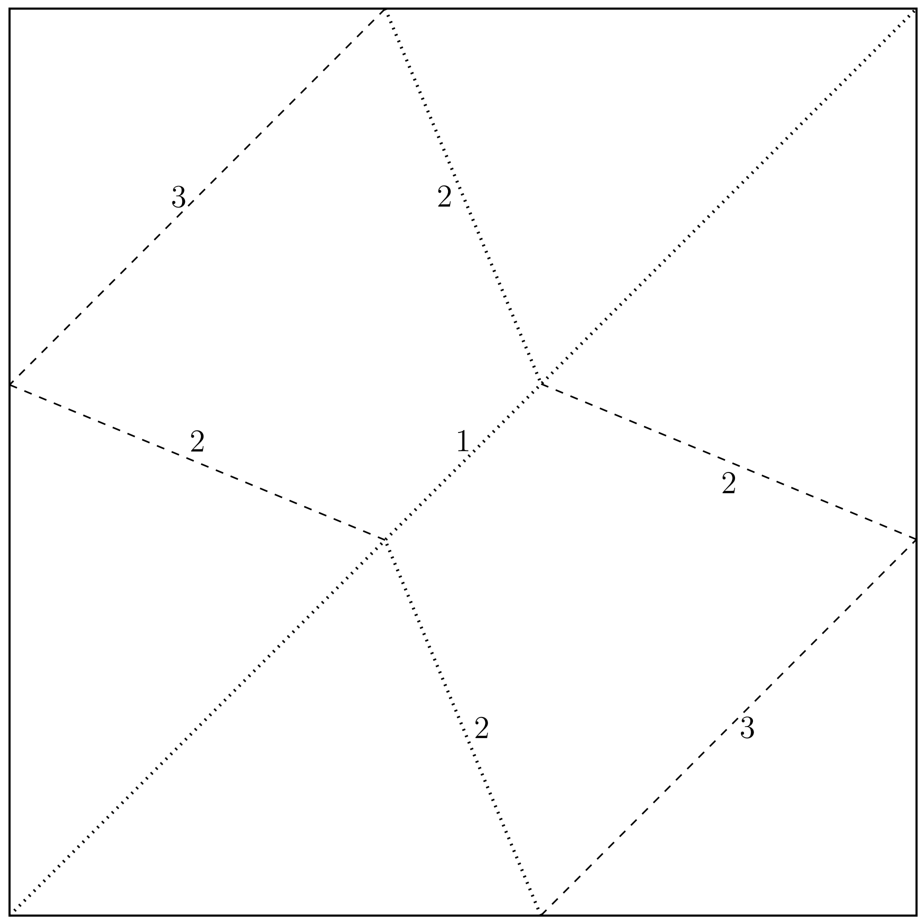
Non rimane che piegare il “becco” (con lo stesso principio con il quale abbiamo piegato il collo e la coda della gru), e “allargare” le ali (il che appiattirà la parte centrale), ed ecco la gru terminata:

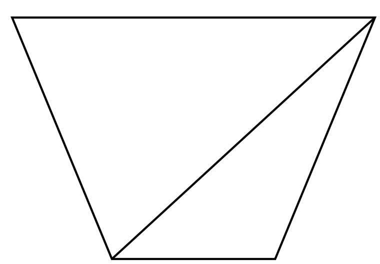


Una volta "riaperta" la carta, e non considerate le pieghe di costruzione, ecco lo schema delle pieghe per la gru (le pieghe tratteggiate sono a valle, le altre a monte); da notare l'alternarsi delle pieghe "a valle"–"a monte" lungo la diagonale, laddove si sono creati il collo, la coda, ed il becco:



Per concludere: due facili origami da ricostruire a partire dallo schema delle pieghe. Il primo permette di ottenere un bicchiere:





Il secondo crea una busta (e, contemporaneamente, lascia una parte bianca per il messaggio):