Il problema di Apollonio

CIRO CILIBERTO

Dipartimento di Matematica Università di Roma "Tor Vergata" Via della Ricerca Scientifica 00133 Roma, Italia e-mail: cilibert@mat.uniroma2.it

12 marzo 2021

1 Apollonio e il problema da lui posto

Apollonio di Perga (Perga, 262 a.C.— Alessandria d'Egitto, 190 a.C.) è stato un matematico e astronomo greco, famoso per le sue opere sulle sezioni coniche. Fu Apollonio che diede alla ellisse, alla parabola e alla iperbole i nomi con i quali da allora queste curve sono conosciute.

Le notizie sulla vita di Apollonio sono molto scarse. Nacque a Perga, in Panfilia, ma si spostò ad Alessandria, dove compose una prima versione delle "Coniche", che egli stesso in seguito definì troppo affrettata. Visitò Efeso e Pergamo e qui conobbe il matematico Eudemo da Pergamo, al quale poi inviò i primi tre libri rivisti delle Coniche.

Di lui sopravvivono solo due opere:

- "Separazione di un rapporto": due libri giunti a noi in una traduzione in arabo;
- "Le coniche": opera in otto libri dei quali quattro sopravvivono nella versione greca originale e sette in una traduzione in arabo, l'ottavo libro essendo perduto, ma ricostruito per via deduttiva dallo scienziato arabo Ibn al-Haytham, chiamato in Occidente Alhazen.

Di altre opere, perdute, restano solo i titoli:

- Separazione di un'area
- Sezione determinata
- Tangenze
- Inclinazioni
- Luoghi piani

A noi qui interessa in modo particolare l'opera "Tangenze", della quale ci sono giunti solo i riferimenti fatti ad essa da Pappo di Alessandria (290 circa— 350 circa), nella sua opera "Mathematicae Collectiones", giunta a noi e tradotta in latino nel 1589 da Federico Commandino (1509–1575).

Pappo riporta il problema trattato da Apollonio in "Tangenze", noto poi come Problema di Apollonio: dati tre oggetti qualsiasi tra punti, rette e circonferenze determinare (con costruzioni

geometriche che usano solo riga e compasso) le circonferenze che passano per i punti dati e sono tangenti alle curve date (rette o circonferenze). Ci sono quindi in totale dieci casi nei quali sono dati rispettivamente:

- 1. tre punti (p, p, p)
- 2. due punti e una retta (p, p, r)
- 3. due punti e una circonferenza (p, p, c)
- 4. un punto e due rette (p, r, r)
- 5. un punto e una retta e una circonferenza (p, r, c)
- 6. un punto e due circonferenze (p, c, c)
- 7. tre rette (r, r, r)
- 8. due rette e una circonferenza (r, r, c)
- 9. due circonferenze e una retta (r, c, c)
- 10. tre circonferenza (c, c, c)

Il nostro obiettivo in queste note è, da un lato, di ripercorrere la storia di questo problema, spiegandone a grandi linee alcuni tentativi di risoluzione, dall'altro spiegheremo come le *inversioni* circolari si possano utilmente applicare per risolvere il problema. Infine daremo alcuni cenni a sviluppi successivi relativi al Problema di Apollonio. Vi è da osservare che la letteratura sul Problema di Apollonio è immensa, gli approcci per la sua risuluzione molteplici, e dunque una trattazione esaustiva è impossibile.

2 L'inversione circolare

In questa sezione ricordiamo le principali proprietà dell'inversione circolare e faremo alcuni commenti in proposito. Cominciamo col dire che non è del tutto chiaro chi abbia per primo considerato le inversioni circolari. Di certo esse appaiono presso vari autori all'inizio del XIX secolo, ad esempio in Germinal Pierre Dandelin (1794–1847), Plücker, Julius (1801–1868), Jakob Steiner (1796–1863), ma il primo a dare una esposizione sistematica della relativa teoria è stato il matematico italiano Giusto Bellavitis (1803–1880), che è stato anche il primo ad applicare l'inversione circolare alla soluzione di alcuni casi del Problema di Apollonio. Notiamo che l'inversione circolare è un caso particolare di trasformazione quadratica (una trasformazione del piano che muta in generale rette in coniche e viceversa), trasformazioni di cui furono studiati casi particolari da vari autori nella prima metà dell'800, ma che furono studiate in forma più organica da Giovanni Schiaparelli (1835–1910) nel 1861 e da Thomas Archer Hirst (1830–1892) nel 1864, e infine da Luigi Cremona (1830–1903), che le generalizzò dando il concetto di trasformazione birazionale che è alla base della geometria algebrica.

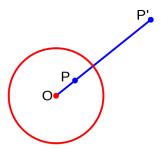
2.1 La definizione di inversione circolare

Sia γ una circonferenza di centro O e raggio r. L'inversione circolare rispetto a γ è la funzione ι_{γ} (che per brevità denotiamo anche semplicemente con ι) che associa ad ogni punto P del piano

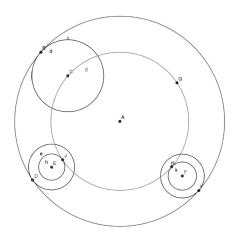
distinto da O il punto P' appartenente alla semiretta uscente da O e passante per P tale che

$$(OP) \cdot (OP') = r^2.$$

Il punto P' è detto punto inverso di P rispetto alla circonferenza γ , r^2 è detta potenza dell'inversione, il punto O è detto centro della inversione circolare.



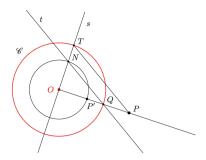
L'inverso del punto P si può costruire con riga e compasso. Questo equivale al problema di determinare il terzo proporzionale dopo due segmenti dati, in questo caso OP e il raggio della circonferenza γ . In generale vediamo come si determina il terzo proporzionale dopo due segmenti AB e AC (vedi figura). Si prolunga AB in modo che BD sia uguale ad AC. Da D conduciamo la parallela DE a BC. Per il Teorema di Talete, il segmento CE è quello cercato. Se cerchiamo l'immagine di E per la inversione circolare rispetto alla circonferenza di centro O e raggio AC, esso è il punto B' indicato in figura.



Una costruzione diretta con riga e compasso dell'inverso di un punto $P \neq O$ rispetto ad una circonferenza \mathcal{C} di centro O si può fare nel modo seguente:

- si traccia la semiretta OP;
- si indica con Q il punto di intersezione tra $OP \in \mathcal{C}$;
- \bullet si traccia una retta s per O diversa da OP;
- si indica con T uno dei due punti di intersezione tra $s \in \mathcal{C}$;

- si traccia la parallela t per Q alla retta PT;
- si indica con N il punto di intersezione tra s e t;
- si trova l'intersezione P' tra la circonferenza di centro O e passante per N e la semiretta OP: P' è l'inverso di P.

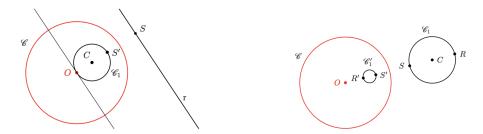


La costruzione funziona perché i due triangoli OPT e OQN sono simili, e dunque

$$(OP): (OQ) = (OT): (ON)$$
 quindi $(OP): r = r: (OP')$.

In verità la costruzione del corrispondente di P tramite l'inversione circolare si può effettuare col solo compasso, ma per questo rinviamo a [3, pp. 231–233].

Di conseguenza si effettua con riga e compasso la costruzione dell'immagine di una retta o di una circonferenza mediante l'inversione circolare. Questo è mostrato nelle due figure che seguono.



Nella prima si mostra l'inversa di una retta r per l'inversione rispetto ad una circonferenza \mathcal{C} di centro O. Basta determinare l'inverso S' del punto S, proiezione ortogonale di O sulla retta r, e si costruisce la circonferenza \mathcal{C}_1 di diametro OS'. La stessa costruzione può essere usata per costruire la retta inversa r di una circonferenza \mathcal{C}_1 passante per il centro: basterà scambiare i ruoli di S ed S'.

Nella seconda figura si determina l'immagine C'_1 di una circonferenza C_1 di centro C che non passa per il centro O della inversione rispetto alla circonferenza C. Si determinano degli inversi S' e R' dei punti S ed R, intersezioni della circonferenza C_1 con la rettaOC.

In ogni caso, per trovare rette o circonferenze inverse si possono sempre determinare due o tre loro punti, anche senza seguire le strategie sopra indicate.

2.2 Le principali proprietà

Le proprietà principali della inversione circolare sono le seguenti:

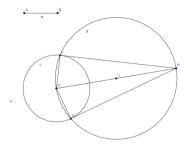
- 1. l'inversione circolare è inversa di se stessa, ossia $\iota^2 = \mathrm{id}$, cioè ι è una involuzione;
- 2. i punti di γ sono gli unici punti del piano fissati da ι ;
- 3. l'interno di γ viene mandato da ι nell'esterno di γ e viceversa;
- 4. l'imagine di una retta passante per O è la retta stessa;
- 5. l'imagine di una circonferenza passante per O è una retta parallela alla tangente alla circonferenza in O:
- 6. l'immagine di una retta non passante per O è una circonferenza per O, la cui tangente in O è parallela alla retta data;
- 7. l'immagine di una circonferenza non passante per O di centro un punto C è una circonferenza il cui centro è sulla semiretta OC;
- 8. l'inversione è una trasformazione *conforme*, ossia conserva gli angoli ad esempio tra rette e circonferenza: l'angolo tra due circonferenze [risp. tra una circonferenza e una retta] in un punto dato è per definizione l'angolo tra le relative tangenti in quel punto [risp. l'angolo tra la tangente alla circonferenza e la retta in quel punto]. In particolare l'inversione conserva le tangenze;
- 9. una circonferenza diversa da γ è fissata da ι se e solo se interseca γ ortogonalmente in due punti distinti.

Notiamo che l'inversione circolare non è definita nel punto O. Tuttavia dalla stessa definizione si vede che quando un punto P si avvicina indefinitamente ad O lungo una retta, l'immagine P' di P sta sempre su quella retta ma tende ad allontanarsi indefinitamente da O. Possiamo allora pensare che l'immagine di O sia all'infinito e che la ι dilati O nell'insieme dei punti all'infinito di ciascuna retta passante per O.

2.2.1 Prima applicazione

Come prima applicazione dell'inversione circolare, risolviamo il problema di trovare le circonferenze passanti per due punti distinti A e B del piano e tangenti ad una circonferenza G data. Applichiamo una inversione circolare qualunque di centro A. Allora la questione si riconduce a quella, più semplice, di trovare le rette passanti per il trasformato B' di B tangenti alla circonferenza G' trasformata di G. La risposta dunque sarà: non c'è alcuna tale retta se B' è interno a G', ce ne è una sola se B' sta su G' (il che equivale a dire che B sta su G), ce ne sono due se B' è esterno a G'.

Notiamo che le rette tangenti ad una circonfenerza da un suo punto esterno si costruiscono con riga e compasso. Infatti, data la circonferenza c di centro O e raggio AB, dato il punto P esterna ad essa, si conduce la circonferenza d di diametro OP e centro C il punto medio del segmento di estremi O e P. Le circonferenze c e d si intersecano in due punti D e E. Tali punti sono i punti di tangenza cercati, dato che le rette PD e PE formano angoli rette con i raggi OC e OD rispettivamente.

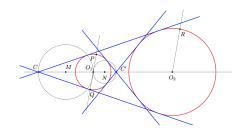


Anche la costruzione della tangente in un suo punto ad una circonferenza si fa con riga e compasso, lasciamo al lettore il compito di trovarla per esercizio.

Osservazione 2.1. È opportuno qui fare una osservazione. Fissati due punti A e B come sopra, rendiamo piccolo a piacere il raggio della circonferenza G. Se questo raggio ha lunghezza $1 \gg \epsilon > 0$, vi sono due circonferenze passanti per A e B tangenti a G. Quando ϵ si riduce a 0, G si riduce al suo centro G, e le due circonferenze si riducono alla sola circonferenza per i punti G, G, la quale è pertanto limite di due circonferenze e dunque va riguardata come soluzione del problema limite con molteplicità due.

È opportuno ricordare anche uno dei metodi per trovare, con riga e compasso, le tangenti comuni a due circonferenze. Notiamo che non vi sono tangenti comuni se una delle due circonferenze è interna all'altra. Vi è una tangente comune se le due circonferenze sono internamente tangenti. Vi sono due tangenti comuni se le due circonferenze si intersecano in due punti distinti, vi sono tre tangenti comuni se le due circonferenze sono esternamente tangenti. Vi sono infine quattro tangenti comuni se le due circonferenze sono esterne una all'altra. Se le due circonferenze hanno lo stesso raggio, la costruzione è banale e la si lascia al lettore. Concentriamoci dunque sul caso in cui le due circonferenze γ_1 e γ_2 (rosse in figura), di centri O_1 e O_2 rispettivamente, hanno raggi diversi, e trattiamo il caso in cui siano esterne l'una all'altra, lasciando gli altri casi al lettore. Si procede così:

- si traccia una retta qualunque, distinta dalla retta che congiunge O_1 e O_2 , per uno dei due centri, per esempio per O_1 , e si indicano con P e Q le sue intersezioni con la circonferenza γ_1 ;
- si traccia la semiretta per O_2 parallela alla retta PQ, che interseca γ_2 in R;
- le rette RP ed RQ intersecano la retta O_1O_2 in C e C', punti che prendono il nome di centri di omotetia di γ_1 e γ_2 : le tangenti da C e C' ad una delle due circonferenze sono tangenti anche all'altra.



Per spiegare perché questa costruzione funziona, basta spiegare perché C e C' si chiamano centri di omotetia delle due circonferenze. Consideriamo ad esempio l'omotetia ω di centro C e di rapporto $\frac{(CO_1)}{(CO_2)}$. Essa muta γ_1 in γ_2 . Infatti ω , che è una similitudine (quindi muta rette in rette conservando i rapporti tra lunghezze di segmenti), muta γ_1 in una circonferenza di centro O_2 . Inoltre poiché i triangoli CO_1P e CO_2R sono simili, ω ovviamente manda P in R e pertanto manda γ_1 in γ_2 . È allora ovvio che una tangente a γ_1 condotta da C è pure tangente a γ_2 . Analogo discorso si può fare per C'.

2.2.2 Seconda applicazione

Similmente possiamo chiederci di trovare le circonferenze passanti per due punti distinti A e B del piano e ortogonali ad una circonferenza G data. Operando come prima vediamo che il problema si riduce a quello, più semplice, di trovare le rette passanti per B' ortogonali a G' Qui vediamo che in generale la risposta è una sola retta, quella congiungente B' col centro di G', a meno che B' non sia il centro di G' nel qual caso di soluzioni ne esistono infinite.

2.3 L'espressione analitica

Le suddette proprietà si possono tutte verificare geometricamente (cfr. ad esempio [3, pp. 229–231, 250–253]). Tuttavia esse si possono anche verificare analiticamente. Infatti, se si pone O nel centro di coordinate cartesiane ortogonali, sicchè Γ ha equazione

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

allora si trovano agevolmente le equazioni di ι . Cioè, se P=(x,y) allora P'=(x',y'), con

$$x' = \frac{r^2x}{x^2 + y^2}, \quad y' = \frac{r^2y}{x^2 + y^2}.$$

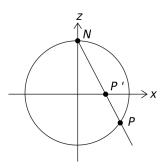
Le proprietà che abbiamo elencate si possono verificare anche analiticamente facendo uso di queste equazioni: si tratta di un utile esercizio algebrico—geometrico.

2.4 La proiezione stereografica

Un'altra proprietà interessante dell'inversione circolare è legata alla proiezione stereografica. Notiamo che nella tradizione della geometria dell'antica Grecia non si sintraccia la nozione di trasformazione geometrica. Forse l'unica eccezione è proprio la proiezione stereografica, presente nel "Planispherium" di Tolomeo (100 circa–175 circa), un'opera a noi pervenuta in traduzione araba.

La proiezione stereografica è una trasfromazione della sfera meno un punto sul piano, che si effettua nel seguente modo. Consideriamo una sfera Σ di raggio r, fissiamone un punto, che indichiamo con N (che sta per polo nord). Consideriamo poi il piano π diametrale ortogonale al diametro passante per N. Per ogni punto P di S diverso da N consideriamo la retta r_P che congiunge P con N,

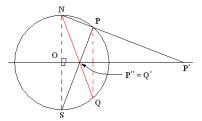
e intersechiamo r_P con π ottenendo il punto P'. Notiamo che r_P non è parallela a π , in quanto le rette per N parallele a π giacciono tutte nel piano tangente a Σ in N, e intersecano Σ solo in N. La proiezione stereografica associa al punto P il punto PO'. nella seguente figura vediamo in un piano diametrale di S per N, come funziona la proiezione stereografica.



La relazione tra proiezione stereografica e inversione circolare è la seguente. Prendiamo un punto P' del piano π diverso dal centro O della sfera Σ e facciamone l'inverso P tramite la proiezione stereografica. Ora facciamo la proiezione stereografica di P dal punto S (che sta per $polo \ sud$) diametralmente opposto a N. Otteniamo così un punto P''. Ebbene P'' è l'iimagine di P' tramite la inversione rispetto alla circonferenza γ intersezione della sfera Σ con il piano π . Infatti consideriamo i due triangoli rettangoli P'ON e OSP''. Essi sono simili in quanto gli angoli in S e P' sono uguali perchè formati da rette perpendicolari. Allora abbiamo

$$(P'O): (NO) = (OS): (P''O)$$
 quindi $(P'O) \cdot (P''O) = r^2$.

Notiamo che P'' è altresì la proiezione stereografica da N del simmetrico Q di P rispetto alla retta OP'.



Un altro utile esercizio è ritrovare le proprietà da noi elencate della inversione circolare facendo uso della proiezione stereografica.

Un altro utile esercizio è verificare che se P è un punto della sfera Σ diverso da N, se P' è la sua immagine su π tramite la proiezione stereografica da N, e se Q' è l'immagine su π tramite la proiezione stereografica da N del punto Q diametralmente opposto a P su Σ , allora il simmetrico di Q' rispetto al centro O di Σ è l'immagine P'' di P' tramite l'inversione circolare rispetto alla circonferenza γ intersezione di Σ e π .

3 Risoluzione del problema con l'inversione circolare

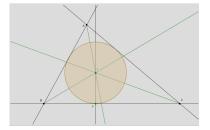
In questa sezione vedremo come possiamo risolvere il Problema di Apollonio usando le inversioni circolari. Divideremo i dieci casi in cui si suddivide il problema in tre gruppi: il primo gruppo contiene tutti i casi (da 1 a 6) in cui tra i tre elementi della terna (a, b, c) vi sia un punto, il secondo gruppo contiene solo il caso 7 in cui abbiamo (r, r, r), e infine nel gruppo rimanente includiamo i rimanenti casi 8, 9 e 10. Come vedremo il caso 7 si risolve elementarmente, i casi del primo gruppo si risolvono usando inversioni circolari, i casi del terzo gruppo sono i più ostici ma, mediante un opportuno trucco, si possono ricondurre ai casi del primo gruppo.

3.1 Il caso (r, r, r)

In questo caso abbiamo tre rette distinte e occorre trovare le circonferenze tangenti a tali rette. Ovviamente se le tre rette passano per uno stesso punto o sono parallele il problema non ha soluzione. Assumiamo dunque che le tre rette non passino per uno stesso punto e non siano tutte parallele. Suppongo, più precisamente che a coppie le rette non siano parallele, lasciando per esercizio al lettore il caso (analogo ma più semplice) in cui vi siano coppie di rette parallele. Quindi le tre rette sono lati di un triangolo.

Notiamo che date due rette distinte e non parallele, le circonferenze tangenti ad entrambe sono quelle che hanno centri sulle bisettrici degli angoli formati dalle due rette (e raggio pari alla distanza del centro da una delle due rette).

Nel caso delle tre rette lati di un triangolo abbiamo per ogni coppia di rette due bisettrici, quindi sei rette. Tuttavia, come è ben noto, le tre bisettrici interne al triangolo si intersecano in un punto (l' incentro del triangolo), che è il centro della circonferenza inscritta nel triangolo, mentre due bisettrici esterne si intersecano in un punto che è anche comune ad una bisettrice interna, ottenendo così tre punti che sono i centri delle circonferenze exinscritte nel triangolo. Queste quattro circonferenze, risoluzione del problema, si determinano con riga e compasso in quanto, come è ben noto, con riga e compasso si determinano le bisettrici di un angolo e la distanza di un punto da una retta.



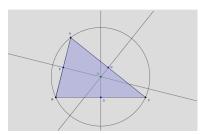


4 I casi del primo gruppo

L'idea basilare è che questi casi si semplificano applicando una inversione circolare di centro uno del punti (o l'unico punto se del caso) della terna (a, b, c).

4.1 Il caso (p, p, p)

Il problema non ha soluzione se i tre punti sono allineati. Altrimenti, questo caso è semplicissimo riducendosi al problema di determinare la circonferenza circoscritta ad un triangolo, la quale è univocamente determinata e ha per centro il *circocentro* del triangolo punto di intersezione degli assi dei lati.

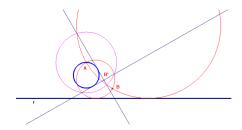


Notiamo tuttavia che l'applicazione del criterio generale di effettuare una inversione circolare rispetto a uno dei tre punti pure funziona molto bene. Infatti se i tre punti sono, come in figura, A, B, C, facciamo una inversione circolare di centro A. Allora il problema si riduce a trovare l'unica retta che passa per i trasformati B' e C' di B e C rispettivamente.

4.2 Il caso (p, p, r)

Sono dati due punti A e B ed una retta r e si chiede di trovare le circonferenze passanti per i due punti e tangenti alla retta. Il problema ha soluzioni solo se i due punti stanno entrambi nello stesso semipiano dei due individuati dalla retta e se almeno uno dei due non appartiene alla retta.

Si consideri un'inversione circolare avente centro in uno dei due punti A, B, per esempio in A, e raggio qualunque (in violetto la circonferenza di inversione nella figura). Si consideri la circonferenza c inversa della retta r (blu nella figura) e l'inverso B' di B. Da B' si traccino le tangenti a c (cosa che sappiamo fare con riga e compasso). Le circonferenze inverse di queste due rette tangenti soddisfano i requisiti richiesti. La costruzione si semplifica un po' se si sceglie AB come raggio del circolo di inversione: in questo caso B e B' coincidono.



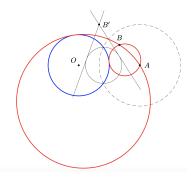
Vediamo quindi che in questo caso abbiamo al massimo due soluzioni, ma ne possiamo avere anche nessuna (se i due punti stanno in semipiani opposti rispetto alla retta o stanno entrambi sulla retta) o una sola (se uno dei due punti sta sulla retta e l'altro no).

4.3 Il caso (p, p, c)

Questo caso l'abbiamo già trattato, a titolo di esempio in §2.2.1. Ripetiamo, con qualche dettaglio in più.

Sono dati due punti A e B ed una circonferenza γ di centro O e raggio r. Vogliamo costruire le circonferenze passanti per A e B e tangenti alla circonferenza γ (in figura è blu). È ovvio che il problema non ha soluzioni se i punti A e B sono uno interno e uno esterno alla circonferenza γ ovvero se stanno entrambi su γ . Inoltre il problema è banale (ed ha una sola soluzione) se uno dei due punti (ma non anche l'altro) su γ . Escludendo questi casi, una costruzione utilizzando l'inversione circolare consta dei passi seguenti:

- si considera una inversione di centro A rispetto ad una circonferenza raggio qualunque (in figura è tratteggiata);
- si trovano gli inversi B' del punto B e γ' della circonferenza γ (in figura è nera);
- si tracciano le tangenti da B' a γ' : le inverse di queste tangenti sono le circonferenze cercate (in figura sono rosse).

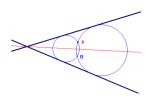


Vediamo che anche in questo caso abbiamo al massimo due soluzioni, ma possono essercene anche nessuna o una.

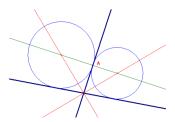
4.4 Il caso (p, r, r)

Dati un punto A e due rette r ed s, proponiamo due soluzioni per trovare le circonferenze tangenti a r ed s e passanti per A: la prima riconduce questo problema a quello (che abbiamo già risolto) in cui siano dati due punti ed una retta, la seconda si basa sull'inversione circolare.

Se le rette sono incidenti ed A non appartiene a nessuna delle due basta considerare il simmetrico B, di A rispetto alla bisettrice di quell'angolo tra le due rette a cui appartiene A; si trovano poi le due circonferenze per A e B, e tangenti ad una delle due rette.



Se le rette sono incidenti ed il punto appartiene ad una delle due la costruzione è immediata: basta tracciare le bisettrici dei due angoli individuati dalle rette e la perpendicolare per A alla retta cui appartiene A stesso, le loro intersezioni sono i centri delle circonferenze richieste. Si hanno di nuovo due circonferenze.

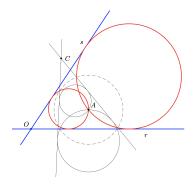


Se le rette sono parallele il problema ha soluzioni solo se il punto A è non esterno alla striscia individuata dalle due rette. Se A è sulla retta mediana della striscia individuata da r e s, basta considerare le due circonferenze che hanno centri equidistanti da A su tale mediana a distanza da A pari alla metà larghezza della striscia, e raggio pari a tale larghezza. Se A non sta sulla mediana, basta considerare il simmetrico B di A rispetto alla retta mediana della striscia e considerare le circonferenze per A e B tangenti a r o ad s. Infine se A sta su una delle rette parallele, la costruzione è immediata (come mostra la figura che segue) e di circonferenze richieste ve ne è una sola.



Vediamo ora la soluzione che fa uso dell'inversione circolare. Per semplicità consideriamo solo il caso di due rette incidenti, e tali che il punto A non stia su nessuna delle due. Procediamo nel seguente modo:

- ullet si considera l'inversione di centro A rispetto ad una circonferenza γ (tratteggiata in figura) di raggio qualunque;
- si trovano le circonferenze inverse, rispetto a γ , delle due rette r e s, le quali si intersecano in A e nell'immagine del punto comune alle due rette r e s;
- si trovano le due tangenti comuni a queste circonferenze (che abbiamo imparato a costruire con riga e compasso nella §2.2.1): le inverse delle due tangenti comuni sono le circonferenze richieste.

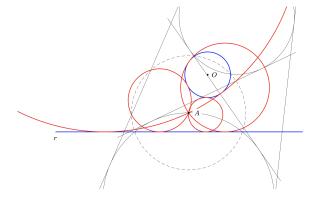


Vediamo che ci sono qui al massimo 2 soluzioni, ma, come abbiamo visto, ve ne possono essere anche 0, 1.

4.5 Il caso (p, r, c)

Sono dati un punto A, una retta r e un circonferenza γ di centro O (retta e circonferenza sono blu in figura. Si vogliono trovare le circonferenze passanti per A e tangenti a r e a γ . È chiaro che il problema non ha soluzioni se A e γ stanno in semipiani diversi rispetto alla retta r, oppure se A è interno a γ e r è tutta esterna a γ . Il problema poi è abbastanza semplice (e si può lasciare al lettore) se A sta su r o su γ oppure se r e γ sono tangenti (casi in cui è facile vedere che vi sono una, due o tre soluzioni). Il caso generale si risolve con un'inversione seguendo i passi di seguito indicati:

- si fa una inversione circolare di centro A rispetto ad una qualunque circonferenza (tratteggiata in figura);
- si trovano le circonferenze inverse della retta r e della circonferenza γ ;
- si trovano le (massimo 4) tangenti comuni alle due circonferenze inverse sopra trovate: le circonferenze inverse di tali tangenti sono quelle cercate.

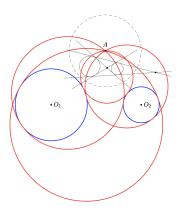


Vediamo ancora che vi sono al massimo 4 soluzioni, ma possono esservene anche 0,1,2 o 3.

4.6 Il caso (p, c, c)

Sono dati un punto A e due circonferenze γ_1 e γ_2 , di centri O_1 e e O_2 rispettivamente (in blu in figura): si vogliono trovare le circonferenze passanti per A e tangenti a γ_1 e γ_2 . È chiaro che il problema non ha sempre soluzioni (per esempio non ne ha nel caso in cui le due circonferenze sono interne una all'altra, mentre A è esterno ad entrambe). Nel seguito proponiamo la costruzione in un caso classico, in cui il problema ha 4 soluzioni (il massimo consentito in questa situazione), utilizzando un'inversione, secondo lo schema seguente:

- si considera un'inversione circolare di centro A rispetto ad una qualunque circonferenza (tratteggiata in figura);
- si trovano le circonferenze inverse di γ_1 e γ_2 (nere in figura);
- si trovano le tangenti comuni alle due circonferenze: le inverse di queste tangenti comuni sono le circonferenze cercate.



In questo caso vi sono al massimo 4 soluzioni, ma possono esservene anche nessuna, o 1,2 o 3 (questo a seconda di quante sono le tangenti comuni alle circonferenze inverse di γ_1 e γ_2 nella costruzione di cui sopra.

5 I casi del terzo gruppo

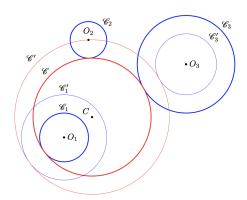
I tre casi del terzo gruppo sono i più ostici da trattare con le inversioni circolari, in quanto non vi è nessun punto preferenziale che si possa prendere come centro di una inversione. Occorre allora un espediente per venire a capo di questi casi mediante inversioni circolari, ed esso consiste nell'applicare la cosiddetta dilatazione parallela, che, come vedremo, ha un significato importante anche dal punto di vista storico. Essa consente di ridurre questi casi alla soluzione di casi del primo gruppo.

5.1 La dilatazione parallela

Per illustrare come funziona la dilatazione parallela, discutiamo il caso (c, c, c). Supponiamo dunque di avere tre circonferenze, C_1 , C_2 , C_3 , di centri rispettivi O_1 , O_2 , O_3 e raggi r_1 , r_2 , r_3 , e supponiamo di

aver trovato una delle circonferenze loro tangenti comuni: la circonferenza \mathcal{C} di centro C e raggio r. Immaginiamo ora di ridurre la più piccola delle tre circonferenze (nel caso in figura \mathcal{C}_2) al suo centro riducendone il raggio a zero. Supponiamo di far diminuire il raggio di \mathcal{C}_3 da r_3 a $r_3 - r_2$, ottenendo \mathcal{C}_3' , e di far aumentare il raggio di \mathcal{C}_1 da r_1 a $r_1 + r_2$, ottenendo \mathcal{C}_1' . La circonferenza di centro di centro C e raggio $r + r_2$ passa per O_2 ed è tangente alle due circonferenze \mathcal{C}_1' e \mathcal{C}_3' .

Quindi, invece di costruire subito la circonferenza \mathcal{C} tangente a \mathcal{C}_1 , \mathcal{C}_2 , \mathcal{C}_3 , possiamo costruire prima la circonferenza \mathcal{C}' tangente a \mathcal{C}'_1 e \mathcal{C}'_3 e passante per O_2 : questo è un problema che già abbiamo imparato a risolvere per inversione nel caso (p, c, c). Successivamente passiamo da \mathcal{C}' a \mathcal{C} diminuendo il raggio di \mathcal{C}' di r_2 .



In generale succede che si devono considerare, sia nelle circonferenze date che in quelle ottenute applicando l'inversione, aumenti e diminuzioni dei raggi. Inoltre nel caso si abbiano problemi con rette e circonferenze, invece che solo con circonferenze, la dilatazione parallela applicata alle rette consisterà nel costruire rette parallele alle rette date nei due semipiani formati dalle rette date, a distanza pari al raggio della circonferenza più piccola (che è quella che viene ridotta a un punto).

In conclusione, date nel piano alcune rette e alcune circonferenze, operare una dilatazione parallela signfica:

- individuare la circonferenza di raggio più piccolo (o una di quelle di raggio più piccolo), diciamolo ρ , riducendola ad un punto diminuendo il raggio da ρ a 0;
- aumentare e diminuire i raggi delle altre circonferenze di una quantità uguale a ρ ;
- traslare parallelamente a se stesse, sui due lati possibili, le rette date di un quantità uguale a ρ .

Il sistema di rette e circonferenze è allora ridotto ad un nuovo sistema costituito da un punto, da rette e da circonferenze. Questa idea permette di ricondurre i casi del problema di Apollonio in cui non sono presenti punti, a casi in cui invece è presente almeno un punto, e che sono già stati trattati con inversione circolare.

Occorre però fare attenzione al fatto che la costruzione indicata può anche produrre alcune circonferenze che non sono soluzioni del problema in quanto esse possono essere tangenti solo a due delle tre figure date. Occorre dunque un'attenta valutazione delle varie situazioni che si possono presentare.

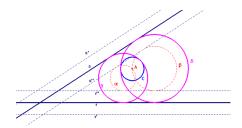
5.2 Il caso (r, r, c)

Siano date due rette r ed s e un circonferenza C di centro A. Vogliamo trovare le circonferenze tangenti ad r, s e C. Il problema ammette fino a otto soluzioni distinte ed è molto semplice se le due rette sono parallele (e pertanto lasciamo questo caso al lettore).

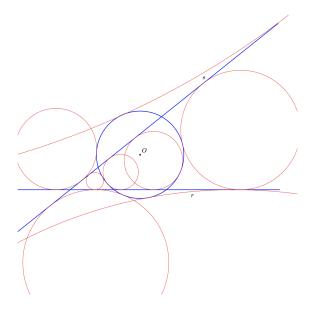
Effettuiamo la dilatazione parallela nel modo seguente:

- riduciamo il raggio ρ della circonferenza C a zero (sicché la circonferenza si riduce al solo centro A);
- trasliamo le rette r ed s nelle rette ad esse parallele r', r'' e s', s'', poste a distanza ρ da r e s rispettivamente;
- cerchiamo le circonferenze per A che sono tangenti alle coppie di rette (r', s'), (r', s''), (r'', s''), (r'', s'') con il metodo che abbiamo già visto per la risoluzione del caso (p, r, r);
- applichiamo una dilatazione inversa della precedente, quella cioè che ritrasforma il punto A nella circonferenza C e applica alle rette ed alle circonferenze ad esse tangenti che abbiamo trovate opportune dilatazioni di ampiezza ρ o contrazioni di ampiezza ρ : le circonferenze trovate sono possibili soluzioni del problema.

Nella figura si vedono le circonferenze α e β per A tangenti a r'' e s'', ed espandendone il raggio di ρ si ottengono le circonferenze γ e δ soluzioni del problema.



Come è chiaro dalla figura precedente, in quel caso vi sono solo due soluzioni del problema di Apollonio. Invece, some abbiamo detto, in generale ve ne sono (al massimo) otto in questo caso: infatti il problema (p, r, r) ammette al massimo 2 soluzioni, ma questo va applicato quattro volte per risolvere il problema (r, r, c). La figura che segue, in cui la circonferenza (blu come le rette r e s) ha centro in O, mostra un caso in cui le soluzioni sono effettivamente s.

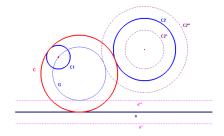


5.3 Il caso (r, c, c)

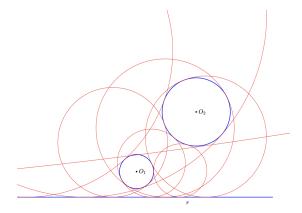
Sono date una retta s e due circonferenze C_1 e C_2 , di raggi r ed R ($r \le R$). Si vogliono determinare le circonferenze tangenti ad s, C_1 e C_2 .

Applichiamo la dilatazione parallela:

- riducendo a zero il raggio r di C_1 ;
- \bullet aumentando e riducendo il raggio di C_2 ottenendo così le due circonferenze C_2' e C_2'' ;
- traslando parallalelamente a se stessa la retta s ed ottenendo così le due rette s' e s'' a distanza r da s. Si trovano poi, col metodo che conosciamo, le circonferenze che passano per il centro di C_1 e sono tangenti a (s', C_2') , o (s', C_2'') , o (s'', C_2'') . Poi si applica la trasformazione inversa della dilatazione parallela precedente per determinare le circonferenze richieste. Poiché la figura diventa complessa nella figura che segue viene indicata la costruzione con questo metodo di una sola tra le otto circonferenze possibili.



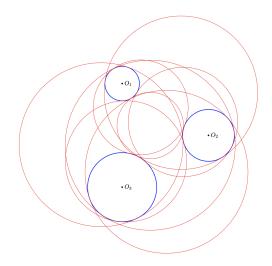
Invece nella figura che segue (in cui la retta è indicata con r e i centri delle circonferenze con O_1 e O_2), sono indicate tutte e otto le possibili soluzioni.



Notare che a priori sembrerebbe che la costruzione indicata possa produrre fino a 16 circonferenze soluzione del problema: infatti il problema (p, r, c) ammette al massimo 4 soluzioni, ed occorre applicarlo 4 volte per risolvere il problema (r, c, c). Tuttavia (come vedremo anche altrimenti) il problema di Apollonio ha al massimo 8 soluzioni, e qui, delle possibili ottenute alcune(la metà) non soddisfano il problema: si deve fare una opportuna valutazione caso per caso.

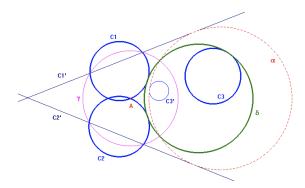
5.4 Il caso (c, c, c)

Questo si può considerare il vero e proprio Problema di Apollonio. Abbiamo già visto come la dilatazione parallela possa applicarsi a questo caso. Il massimo numero di soluzioni è 8, anche se, come nel caso precedente, sembrerebbe che la costruzione indicata possa produrre fino a 16 circonferenze soluzione del problema: infatti il problema (p, c, c) ammette al massimo 4 soluzioni, ed occorre applicarlo 4 volte per risolvere il problema (c, c, c). Qui ci limitiamo a mostrare una figura in cui appaiono tutte e otto le soluzioni del problema.



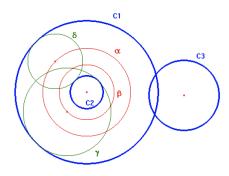
Non volendo usare la dilatazione parallela, ma solo l'inversione circolare c'è un metodo interessante che funziona in questo caso.

Cominciamo a considerare il caso, più semplice, in cui almeno due dei tre cerchi dati abbiano un punto in comune A. In questo caso si può considerare un'inversione di centro A e raggio qualunque: i due cerchi passanti per A si trasformano in due rette, mentre l'altro cerchio si trasforma in un cerchio (o in una retta se passa anch'esso per A). Siamo ricondotti al caso di due rette e un cerchio o di tre rette, casi che sappiamo trattare. Per inversione si ritrovano le soluzioni richieste. Nella figura qui sotto C_1, C_2, C_3 sono le tre circonferenze date, di cui due si incontrano in A. Con centro in A consideriamo la circonferenza di inversione γ , le rette C'_1, C'_2 , sono inverse di C_1 e C_2 , e il cerchio C'_3 è inverso di C_3 . La circonferenza α è una delle circonferenze tangenti a C'_1, C'_2, C'_3 . La circonferenza δ , ottenuta per inversione da α , è una delle circonferenze cercate.

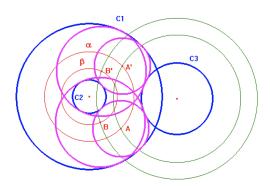


Consideriamo poi il caso in cui due delle tre circonferenze siano concentriche (se lo fossero tutte e tre non ci sarebbero soluzioni), anche se la terza circonferenza incontra, come nella figura più sotto, una delle due. Perché il problema abbia soluzioni la terza circonferenza deve intersecare la corona circolare limitata dalle prime due.

Nella figura di seguito C_1, C_2, C_3 sono le tre circonferenze date, di cui C_1 e C_2 concentriche di centro O e raggi r_1, r_2 , con $r_1 > r_2$, e C_3 ha raggio r_3 . Le circonferenze cercate sono del tipo di γ e δ , cioè con diametro $r_1 + r_2$ e $r_1 - r_2$ e con centro sulle circonferenze α e β di centro anche esse in O e raggi rispettivamente $\frac{r_1+r_2}{2}$ e $\frac{r_1-r_2}{2}$.

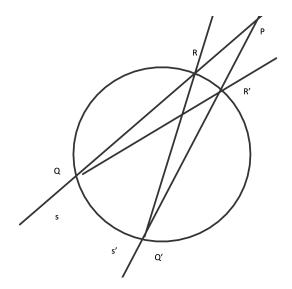


Tra tutte queste circonferenze quelle tangenti anche a C_3 si trovano con una costruzione elementare, come si può vedere nella figura qui sotto. Basta costruire le circonferenze concentriche a C_3 e di raggi $r_1 + r_2 + r_3$ e $r_3 + r_1 - r_2$ e considerare le loro intersezioni A, A', B, B', con le circonferenze α e β : questi sono i centri delle circonferenze cercate.



E veniamo infine al caso generale, in cui le circonferenze non hanno punti in comune, e non ci sono due circonferenze concentriche. Per trattare questo caso occorre introdurre il concetto di *punti limite* di due circonferenze senza punti a comune.

Sia C una circonferenza e sia P un punto del piano. Tracciamo una qualunque retta s per P che intersechi C i due punti Q, R. Allora il prodotto (PQ)(PR) non dipende dalla retta s. Questo si vede dalla figura che segue, tenendo conto che i triangoli PQR' e PQ'R sono simili.



Più in particolare, se mettiamo un verso v di percorrenza sulla retta s e consideriamo le misure orientate $(PQ)_v$ e $(PR)_v$ dei segmenti PQ e PR, vediamo che $(PQ)_v(PR)_v$ non dipende dalla retta s. Questo numero è detto potenza di P rispetto a C ed è positivo, negativo o nullo, a seconda che P si trovi all'esterno, all'interno o sulla circonferenza. Notiamo che se P è esterno alla circonferenza

C, la sua potenza rispetto a C è il quadrato della distanza che separa P dai punti di contatto delle due tangenti a C condotte da P, e quindi è uguale a $(PO)^2 - r^2$, dove O è il centro di C e r il suo raggio.

Se C ha in un sistema di coordinate cartesiane monometriche ortogonali l'equazione

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 (1)$$

e se P ha coordinate (x_0, y_0) si verifica che la potenza di P rispetto a C vale $x_0^2 + y_0^2 + ax_0 + by_0 + c$. Consideriamo ora due circonferenze C e C' distinte. L'asse radicale di C e C' è il luogo dei punti del piano che hanno la stessa potenza rispetto a C e C'. Se C e C' hanno equazioni rispettive (1) e

$$x^2 + y^2 + a'x + b'y + c' = 0$$

l'asse radicale ha evidentemente equazione

$$(a - a')x + (b - b')y + (c - c') = 0.$$
 (2)

Se le due circonferenze sono concentriche, allora a = a' e b = b', sicchè l'equazione (2) non ha soluzioni, ossia l'asse radicale è vuoto. Se invece le due circonferenze non sono concentriche, allora la (2) ci mostra che l'asse radicale una retta la quale è ortogonale alla retta congiungente i centri di $C \in C'$.

Mettiamoci ora nell'ipotesi che C e C', che sono distinte, siano non concentriche. Consideriamo, a partire da C e C', tutti i luoghi del piano che hanno eqazionbi del tipo

$$\lambda(x^2 + y^2 + ax + by + c) + \mu(x^2 + y^2 + a'x + b'y + c') = 0$$
(3)

al variare di λ, μ in \mathbb{R} non entrambi nulli. Si vede subito che tutti questi luoghi sono circonferenze (eventualmente di raggio nullo) o insiemi vuoti, tranne che se $\lambda = -\mu$, caso in cui il luogo in questione è proprio l'asse radicale. Le circonferenze date dall'equazione (3) si dicono formare un fascio, determinato da C e C' e si dice che (3) è l'equazione del fascio. Ci sono alcune proprietà dei fasci (facili da verificare) che vanno evidenziate:

- un fascio è determinato da due sue qualunque circonferenze distinte;
- date due circonferenze C e C' distinte non concentriche, se (1) è l'equazione di C e

$$cx + dy + e = 0$$

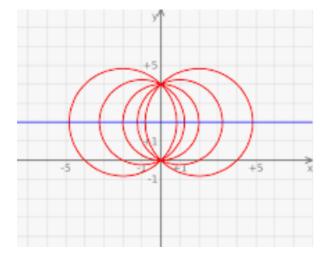
è l'equazione dell'asse radicale di C e C', il fascio determinato da C e C' ha anche equazione del tipo

$$\lambda(x^{2} + y^{2} + ax + by + c) + \mu(cx + dy + e) = 0;$$

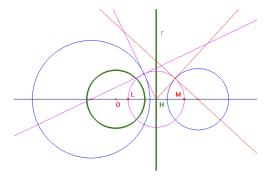
• tutte le circonferenze del fascio hanno lo stesso asse radicale, quindi i punti dell'asse radicale hanno potenza costante rispetto alle circonferenze del fascio;

- se C e C' hanno a comune due punti distinti (che sono anche i punti a comune delle due circonferenze con il loro asse radicale), tutte le circonferenze del fascio passano per tali punti che si dicono punti base semplici;
- se C e C' sono tangenti in un punto (dove la tangente comune è l'asse radicale), tutte le circonferenze del fascio sono tangenti tra loro in quel punto che si dice *punto base tangenziale*;
- \bullet se C e C' sono esterne (in tal caso l'asse radicale è esterno alle due circonferenze), tutte le circonferenze del fascio sono esterne;
- ullet i centri delle circonferenze del fascio stanno tutti sulla retta che congiunge i centri di C e C'.

Qui di seguito abbiamo l'immagine di un fascio di circonferenze che si intersecano in due punti distinti. La retta blu è il luogo dei centri.



Ora consideriamo il caso in cui le due circonferenze C, C' siano esterne, sicchè il fascio da loro individuato non ha punti base. Come abbiamo visto il fascio è individuato anche da una delle sue circonferenze (in verde in figura) e dall'asse radicale r. Sia O il centro della circonferenza in questione e ne sia H la proiezione ortogonale sull'asse radicale r. Il punto H, in quanto appartiene all'asse radicale, ha potenza costante e positiva, chiamiamola a^2 , con a positivo, rispetto alle circonferenze del fascio. Consideriamo ora la circonferenza Γ di centro H e raggio a (in viola in figura). Evidentemente tale circonferenza interseca tutte le circonferenze del fascio nei punti di tangenza ad esse condotte da H. Quindi questa circonferenza è ortogonale a tutte le circonferenze del fascio. Il centro di una circonferenza γ del fascio è intersezione della retta OH con la tangente a Γ in uno dei due punti in cui Γ interseca γ .



In sostanza per costruire le circonferenze del fascio si può procedere così: data la circonferenza Γ di centro H e raggio a, per ogni suo punto P si tracci la tangente a Γ , che incontrerà la retta OH in un punto che è centro di una circonferenza del fascio, univocamente determinata dal fatto di passare anche per P. Da questo si deduce che il luogo dei centri delle circonferenze del fascio è la parte della retta OH non interna al segmento LM, dove i punti L e M sono le intersezioni di OH con Γ , cioè hanno da H distanza a, e quindi L ed M si possono riguardare come i centri di due circonferenze di raggio nullo che appartengono al fascio. I punti L e M si dicono punti limite del fascio.

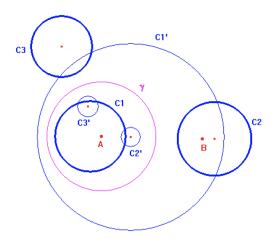
Non sarebbe difficile dimostrare sinteticamente che se facciamo una inversione circolare di centro L o M, il fascio in questione si trasforma in un fascio di circonferenze concentriche. Tuttavia per fare ciò occorrono alcune nozioni di geometria complessa che non sono note in una classe di secondaria superiore. Allora si potrà procedere analiticamente fissando un sistema di assi cartesiani monometrici ortogonali in cui ad esempio L sia l'origine, il punto H abbia coordinate (a,0), sicchè Γ abbia equazione

$$x^2 + y^2 - 2ax = 0.$$

Si potrà poi effettuare una inversione circolare rispetto ad una qualunque circonferenza di centro L, ad esempio rispetto alla circonferenza $x^2 + y^2 = 1$, e verificare che le circonferenze del fascio sono mandate in circonferenze che hanno tutte lo stesso centro.

Torniamo ora al problema di Apollonio. Stiamo esaminando il caso in cui le tre circonferenze non abbiano punti a comune e, tra le tre, non ve ne sono due concentriche. Allora ci si può ridurre al caso delle due circonferenze concentriche mediante una inversione di raggio qualunque che abbia centro uno dei due punti limite del fascio individuato da due delle tre circonferenze date.

Nella figura qui sotto si vedono le tre circonferenze date, C_1, C_2, C_3 , i punti limite A e B del fascio individuato dalle circonferenze C_1 e C_2 , il circolo di inversione γ (viola in figura), e le tre circonferenze C_1', C_2', C_3' inverse delle tre circonferenze date. Si è ricondotti al caso sopra trattato di tre circonferenze di cui due concentriche.



6 Un primo riassunto

Volendo fare un primo sommario relativo al Problema di Apollonio, vediamo che dalle considerazioni che abbiamo fatto segue che il numero massimo di soluzioni al Problema di Apollonio nei vari casi considerato, è mostrato nella tabella che segue. Come vedremo, non è un caso che il numero massimo di soluzioni sia 8.

Tipo di oggetti	Numero massimo di soluzioni
Tre cerchi	Otto soluzioni
Due cerchi e una retta	Otto soluzioni
Due cerchi e un punto	Quattro soluzioni
Un cerchio e due rette	Otto soluzioni
Un cerchio, una retta e una punto	Quattro soluzioni
Un cerchio e due punti	Due soluzioni
Tre rette	Quattro soluzioni
Due rette e un punto	Due soluzioni
Una retta e due punti	Due soluzioni
Tre punti	Una soluzione

7 L'approccio algebrico-cartesiano

Il problema di Apollonio diventa semplicissimo se lo guardiamo da un punto di vista algebrico, introducendo nel piano coordinate cartesiane monometriche e ortogonali. Trattiamo, a titolo di esempio, il caso generale (c, c, c). Qui abbiamo le tre circonferenze C_1, C_2, C_3 di raggi rispettivi r_1, r_2, r_3 e di centri rispettivi O_1, O_2, O_3 . Supponiamo che i centri abbiano coordinate $O_i = (x_i, y_i)$, i = 1, 2, 3. Noi cerchiamo centro O = (x, y) e raggio r incogniti di circonferenze C tangenti a

 C_1, C_2, C_3 . La condizione è che la distanza tra O e O_i sia pari a $r \pm r_i$, per i = 1, 2, 3, dove vale il segno più o meno a seconda che la tangenza sia esterna o interna. Questo conduce alle equazioni

$$(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 - (r \pm r_i)^2 = 0, \quad i = 1, 2, 3$$
(4)

Sottraiamo ora dalla equazione relativa a i = 1 quella relativa a i = 2. I termini di secondo grado in x, y, r si elidono e otteniamo una relazione del tipo

$$ax + by + cr = d$$

dove a, b, c, d dipendono unicamente da $x_1, y_1, x_2, y_2, r_1, r_2$. Similmente, sottraendo dalla equazione relativa a i = 1 quella relativa a i = 3, otteniamo una relazione del tipo

$$a'x + b'y + c'r = d'$$

dove a', b', c', d' dipendono da $x_1, y_1, x_3, y_3, r_1, r_3$. Ora possiamo risolvere il sistema

$$ax + by + cr = d, \quad a'x + b'y + c'r = d'$$
 (5)

in x e y, che troveremo in funzione di r. Sostituendo nella equazione (4) per i=1 si ottiene un'equazione di secondo grado in r che si risolve con l'estrazione di una sola radice quadrata (e con operazioni razionali). Questa equazione ha dunque in generale al massimo due soluzioni reali. Sostituendo tali soluzioni in (5), si ricavano le relative coordinate del centro della circonferenza. Ora, volendo contare quante soluzioni troviamo, notiamo che (4) dà luogo ad otto sistemi di equazioni, per la scelta dei segni più e meno da dare ai raggi r_1, r_2, r_3 . Per ognuno di tali sistemi, col procedimento che abbiamo delineato, otterremo due possibili soluzioni per r e per le coordinate del centro. Quindi apparentemente otterremmo 16 soluzioni. Tuttavia, a parte il fatto che per non tutte queste r potrebbe essere reale, osserviamo che se r è una soluzione, ovviamente anche -r lo è. Quindi di soluzioni con r positivo (che è quello che cerchiamo poiché r è il raggio della circonferenza voluta) ve ne sono al più otto. Inoltre, dal fatto che le soluzioni si trovano con operazione razionali e con una sola estrazione di radice, troviamo conferma della circostanza che le soluzioni si possono determinare tutte col solo uso di riga e compasso.

8 Un approccio algebrico-geometrico enumerativo

Vogliamo ora proporre un approccio che non risolve il problema in generale, ma risponde al quesito di quante sono le possibili soluzioni. Trattiamo di nuovo il caso (c, c, c). Qui abbiamo le tre circonferenze C_1, C_2, C_3 di raggi rispettivi r_1, r_2, r_3 e di centri rispettivi O_1, O_2, O_3 , che supponiamo non allineati. Facciamo tendere a zero i raggi r_1, r_2, r_3 . Allora le tre circonferenze al limite si riducono ai loro centri. In tal caso c'è un'unica soluzione al problema, la circonferenza che passa per i punti O_1, O_2, O_3 . Questa, se è limite di soluzione deve apparire con molteplicità 8, in quanto il passaggio per ciascuno dei punti O_1, O_2, O_3 le attribuisce, se ricordiamo l'Osservazione 2.1, molteplicità 2. Quindi vi possono essere al più 8 soluzioni al problema.

9 Un po' di storia

Il primo a riscoprire il Problema di Apollonio in epoca moderna è stato Françoise Viète (1540–1603) che pose il problema ai matematici belgi. Gli rispose nel 1596 Adriaan van Roomen (1561–1615) che fornì una soluzione completa che tuttavia aprì tra i due una polemica di cui parleremo. La contesa probabilmente aveva anche una motivazione politico–religiosa, in quanto Viète era vicino agli ambienti ugonotti mentre van Roomen era legato ai gesuiti.

9.1 La soluzione di van Roomen

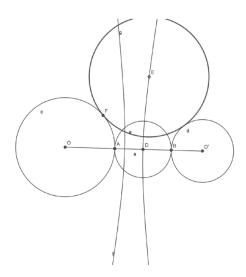
La soluzione proposta da van Roomen è molto naturale ed interessante, da vari punti di vista, incluso quello didattico. Van Roomen determina per prima cosa il luogo dei centri delle circonferenze tangenti a due circonferenze date. La condizione di tangenza tra due circonferenze di centri rispettivamente O e C e raggi r e R è che $(OC) = r \pm R$, con i segni più o meno a seconda che la tangenza sia esterna o interna. Quindi una circonferenza di centro C sarà tangente a due circonferenze date c e d di centri O e O' e raggi r e r' rispettivamente, se e solo se

$$(CO) = r \pm R$$
 e $(CO') = r' \pm R$.

Si hanno così quattro casi, a seconda della scelta dei segni. Esaminiamo ad esempio il caso in cui scegliamo entrambi i segni più. Allora avremo

$$(CO) - (CO') = r - r'$$

dove supponiamo r > r'. Allora il luogo dei punti C è una iperbole di fuochi i due punti O e O'. Più precisamente si tratta di un ramo della iperbole in questione.



Nella figura che precede viene disegnata l'iperbole, di cui va scelto un ramo, su cui si trovano i centri delle circonferenze desiderate (qui ne sono disegnate due di centri D ed E). Da notale che il ramo di iperbole si determina immediatamente in quanto ne sono noti i fuochi O e O' e un punto, precisamente il punto medio del segmento AB, dove A e B sono i punti della congiungente i raggi O e O' che sono tra O e O' e tagliati su tale congiungente dalle circonferenze di partenza c e d.

Ora, se abbiamo tre circonferenze C_1, C_2, C_3 , avremo un ramo di iperbole relativo alle circonferenze C_1 e C_2 and un ramo di iperbole relativo a C_1 e C_3 . I due rami di iperbole si intersecano in al più due punti, che danno i centri di due delle circonferenze desiderate. Se poi si scelgono diversamente i segni, si hanno altre tre possibilità e per ciascuna di esse due punti al più e quindi in totale abbiamo al più otto soluzioni, che possiamo costruire col metodo suddetto.

Va notato che l'approccio di van Roomen ha alcuni notevoli epigoni. Il primo è Evangelista Torricelli (1608–1647), il quale in uno scritto apparso in stampa solo nel 1919, tratta il Problema di Apollonio come un *ludus geometricus*. Egli non pare avesse letto nè van Roomen nè le obiezioni che all'opera di van Roomen contrappone Viète e di cui parleremo tra breve. Nel suo scritto Torricelli dà la soluzione mediante le iperboli del tutto analoga a quella di van Roomen. Egli sa che alcuni geometri possono storcere il naso di fronte a soluzioni non per riga e compasso, e infatti dice:

Sed aliquis nimis delicatus huiusmodi solutiones per loca ut appellant solida non probat.

Il suo "nimis delicatus" è di certo ironico, e si riferisce al fatto che non può essere vero che Apollonio, che aveva scritto un mirabile trattato sulle coniche, rifiutasse soluzioni che delle coniche facevano uso.

Un altro importante epigono di van Roomen è stato Isaac Newton (1643–1727) nei suoi "Principia Mathematica". Newton sostanzialmente usa, così come van Roomen, il metodo delle iperboli. Tuttavia egli osserva che non è necessario costruire effettivamente le iperboli luoghi dei centri delle circonferenze tangenti a due date, ma che basta costruire, con riga e compasso, solo alcuni punti di tali iperboli.

Il problema è equivalente al seguente: dato un triangolo ABC, determinare un punto Z di cui siano date le differenze delle distanze dai vertici. Ciò deriva infatti dalle relazioni di tangenza della circonferenza di raggio r e centro Z alle tre circonferenze d, e, f di centri A, B, C e raggi rispettivi r_1, r_2, r_3 . Le relazioni sono (ci riferiamo alla figura seguente):

$$(AZ) = r + r_1, \quad (BZ) = r + r_2, \quad (CZ) = r + r_3$$

da cui si ottiene

$$(AZ) - (BZ) = r_1 - r_2, \quad (BZ) - (CZ) = r_2 - r_3, \quad (AX) - (CZ) = r_1 - r_3.$$

Come sappiamo un tal punto Z si trova intersecando due opportune iperboli. Tuttavia possiamo procedere in modo un po' diverso, determinando due opportune rette che passano per Z.

Ricordiamo innanzitutto che data un'iperbole, ne rimane individuata l'eccentricità e > 1, che è il rapporto $\frac{c}{a}$ dove c è la semidistanza tra i fuochi e a è la semilunghezza dell'asse trasverso. Una

direttrice di un'iperbole, associata al fuoco F è la retta perpendicolare all'asse trasverso a distanza $\frac{a^2}{c}$ dal centro più vicina al fuoco F. Dato il fuoco F e la relativa direttrice ℓ , un punto X appartiene all'iperbole se e solo se e(FX) = d dove d è la distanza di X da ℓ .

Ora, riferendosi alla figura che segue, procediamo nel seguente modo. Consideriamo il ramo di iperbole descritto dai centri delle circonferenze tangenti a d ed e. Essa ha per fuochi A e B, e quindi il suo centro è il punto medio X del segmento AB. Notiamo che il punto medio Y del segmento MN sta su tale iperbole. Diciamone x la distanza da B. Il punto simmetrico di Y rispetto a X sta pure lui sull'iperbole, e allora abbiamo 2a = 2c - 2x. Pertanto abbiamo

$$e = \frac{c}{a} = \frac{c}{c - x}.$$

La direttrice relativa ad A è la perpendicolare alla retta AB nel punto P tale che e(AY) = d dove d è la distanza di Y da P, quindi P è tale che

$$(YP): (YA) = e.$$

Questo ci permette di costruire (con riga e compasso) il punto P e dunque la relativa direttrice.

Ora torniamo al punto Z che cerchiamo. Esso appartiene all'iperbole in questione e pertanto abbiamo

$$e(ZA) = d$$

dove d è la distanza di Z dalla direttrice.

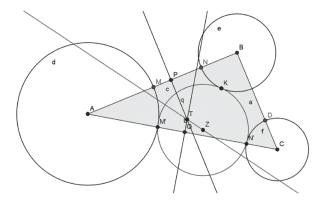
Facciamo ora la stessa costruzione a partire dalle due circonferenze d e f. Troveremo una nuova iperbole di eccentricità e' e ua nuova direttrice, questa volta perpendicolare alla retta AC nel punto Q, e la relazione

$$e'(AZ) = d'$$

dove d' è ora la distanza tra Z e la nuova direttrice. Dividendo tra loro le relazioni trovare otteniamo la nuova relazione

$$d = \frac{e}{e'}d'$$
.

Prese le due direttrici come assi obliqui delle coordinate cartesiane, con origine nella loro intersezione T, la relazione che abbiamo trovato ci dice che Z sta su una retta, costruibile con riga e compasso, che passa per T. Operando analoga costruzione as partire da un'altra coppia di triangoli, si trova un'altra retta, diversa dalla precedente, che pure passa per Z, e allora Z è determinato come intersezione di due rette.



Questa costruzione, oltre ad essere ingegnosissima, è anche molto utile. Essa infatti è alla base del funzionamento dei moderni GPS, che determinano appunto la posizione di un punto dalla sua distanza da tre punti dati: semplificando al massimo (in generale il problema non è bidimensionale ma tridimensionale), i tre punti sono ad esempio delle antenne e la distanza da loro viene calcolata contando il tempo che un segnale emesso dal punto di cui va determinata la posizione (ad esempio un areo o una nave) viene captato dalle tre antenne.

Dopo Newton, vari altri matematici si occupano del Problema di Apollonio, tra questi anche Leonhard Euler (1707–1783). Ma su ciò non ci tratteniamo oltre.

9.2 L'obiezione di Viète e la sua soluzione

Nel suo opuscolo "Apollonius Gallus" Viète contesta la soluzione di van Roomen, in quanto essa non è ottenuta mediante il solo uso di riga e compasso ma dalla intersezione di curve del secondo grado. Come si esprime Viète, alla soluzione di van Roomen

Reclamaret Euclides et tota Euclideorum schola.

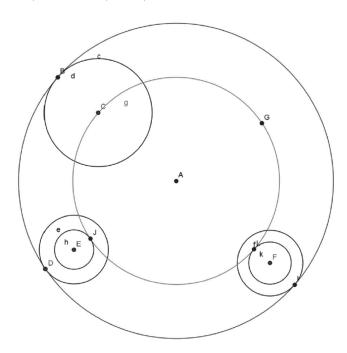
Viète propone un diverso approccio, che risolva il problema con riga e compasso. Il suo punto di vista è eccezionalmente audace e profondo. Quel che Viète fa è di risolvere ogni problema di tipo (a,b,c) in cui appaia una circonferenza in uno più semplice in cui la circonferenza in questione sia sostituita da un punto, il suo centro. In linea di massima, l'idea non è molto diversa da quella della dilatazione parallela, che abbiamo già vista. Ad esempio mostriamo cole Viète passi dal caso (c,c,c) a quello (p,c,c). In partenza abbiamo le tre circonferenze c,e,f di centri C,E,F e raggi r_1,r_2,r_3 rispettivamente. Il problema sarà risolto se determiniamo il centro A della circonferenza voluta, che avrà raggio r. Tale centro deve soddisfare le relazioni (ci riferiamo alla situazione in figura in cui si cerca la circonferenza tangente esternamente alle tre date e i raggi di queste sono distinti)

$$(AC) + r_1 = r$$
, $(AE) + r_2 = r$, $(AF) + r_3 = r$,

da cui si trae

$$(AC) = (AE) - (r_1 - r_2) = (AF) - (r_1 - r_3).$$

Pertanto il centro A cercato è lo stesso della circonferenza g di raggio AC, quindi passante per C, tangente alle circonferenze h e k di centri E ed F e raggi rispettivi $r_1 - r_2$ e $r_1 - r_3$. Quindi abbiamo ricondotto il problema (c, c, c) a quello (p, c, c).



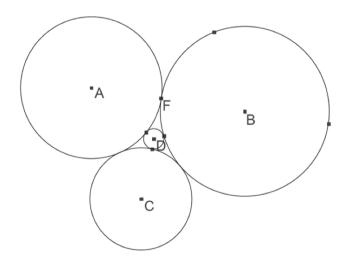
Viète passa poi a ridurre il caso (p, c, c) a quello (p, p, c) e quest'ultimo al caso (p, p, p), che come sappiamo è banale. Per fare ciò non applica di nuovo l'idea precedente, ma produce degli argomenti che funzionano caso per caso. Non è tuttavia il caso che ci tratteniamo di più su questo argomento, avendo già illustrato l'idea basilare del matematico francese. Per ulteriori informazioni, si veda [1].

9.3 Il Teorema di Decartes

L'approccio algebrico che abbiamo descritto in §7 è sostanzialmente dovuto a René Descartes (1596–1650). Decartes propone, per corrispondenza, nel 1643 il Problema di Apollonio alla principessa Elisabetta di Boemia, sua allieva, pensando, in un primo momento, che fosse un problema molto facile da risolvere per via algebrica. Si rese però subito conto che si trattava invece di un problema alquanto difficile per cui, in varie epistole successive dirette alla stessa principessa, ritorna più volte sulla questione cercando di spiegarle come ottenere correttamente una soluzione. Il punto di vista di Descartes è quello di impostare bene il problema dal punto di vista algebrico, usando le coordinate, onde poter stabilire se esso si possa risolvere con riga e compasso. Decartes è meno interessato alla determinazione esplicita della costruzione geometrica che risolva il problema. Non ci intratteniamo qui sui dettagli della corrispondenza tra Decartes e la sua allieva su questo argomento, ma menzioniamo solo una importante scoperta che Decartes fa quasi dper caso e che ora è nota come teorema di Decartes, che ora illustriamo.

Decartes considera il caso di tre circonferenze, di raggi a, b, c e centri A, B, C rispettivamente, tangenti esternamente ciascuna alle altre due. Se x è il raggio della circonferenza, di centro D tangente esternamente alle altre tre, Decartes prova (anche se il suo argomento non è del tutto esatto) che vale la elegante formula

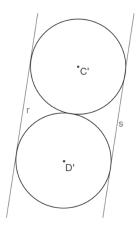
$$2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{x^2}\right) = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{x}\right)^2.$$



Ora è ben noto che l'inverso del raggio di una circonferenza si chiama curvatura della circonferenza. Quindi la formula di Decartes si può leggere anche dicendo che se abbiamo quattro circonferenze ciascuna tangente esternamente alle altre tre, e se le loro curvature sono c_1, c_2, c_3, c_4 , abbiamo la relazione

$$2(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + c_4^2) = (c_1 + c_2 + c_3 + c_4)^2.$$
(6)

Questa formula mostra un'elegante simmetria che apparentemente non è riscontrabile nella figura che precede che mostra le quattro circonferenze mutuamente tangenti. Tuttavia all'eleganza della formula fa riscontro l'eleganza della configurazione una volta che si effettui una appropriata inversione circolare. Infatti, operiamo una inversione circolare di centro il punto F di tangenza di a e b. Allora a e b vengono trasformate in due rette parallele r ed s, mentre la circonferenza c viene trasformata in una circonferenza, di centro C' equidistante da r e da s, tangente sia a r che a s. La quarta circonferenza tangente alle tre date, è quella di centro D' (cfr. figura) ottenibile per una semplice traslazione parallela a r ed s di quella di centro C'.



La dimostrazione originaria di Decartes del suo teorema è, come abbiamo detto, incompleta e abbastanza intricata. Noi ne proponiamo qui una diversa ed abbastanza semplice e naturale concettualmente, pur se richiede qualche calcolo, anche questa basata sulla inversione circolare. Essa è tratta da [5].

Supponiamo di avere quattro circonferenze che sono mutuamente tangenti esternamente. Noi faremo una inversione circolare di centro un punto di tangenza di due C_1 e C_2 delle suddette circonferenze. Scegliamo tale punto come origine degli assi cartesiani monometrici e ortogonali, l'asse x come la retta che congiunge i centri delle due circonferenze e l'asse y come la tangente comune nel punto dato. Allora le due circonferenze, di curvature c_1 e c_2 rispettivamente, avranno equazioni

$$(x - \frac{1}{c_1})^2 + y^2 = \frac{1}{c_1^2}, \quad (x + \frac{1}{c_2})^2 + y^2 = \frac{1}{c_2^2}.$$

Supponiamo che la circonferenza C di inversione abbia equazione

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Le inverse delle circonferenze C_1 e C_2 sono le due rette r_1, r_2 parallele all'asse y che intersecano C nelle coppie di punti tagliati su C da C_1 e C_2 rispettivamente. Quindi, come si vede subito le due rette r_1, r_2 hanno rispettive equazioni

$$x = \frac{c_1}{2}, \quad x = -\frac{c_2}{2}.$$

Le altre due circonferenze C_3 e C_4 , di curvature c_3 e c_4 rispettivamente, vengono mandate dalla inversione in due circonferenze C'_3 e C'_4 tra loro tangenti e tangenti alle rette r_1, r_2 . Esse hanno dunque centro sulla retta mediana della striscia delimitata da r_1, r_2 , che ha equazione

$$x = \frac{c_1 - c_2}{4} := p,$$

ed hanno raggio

$$r = \frac{c_1 + c_2}{4}.$$

Consideriamo una di queste circonferenze, ad esempio C'_3 abbia centro nel punto (p,q) e che C_4 abbia centro nel punto (p,q+2r), sicché C'_3 ha equazione

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2.$$

Con facili calcoli si vede che questa circonferenza è l'inversa della circonferenza di equazione

$$x^{2} + y^{2} - \frac{2(px + qy)}{p^{2} + q^{2} - r^{2}} + \frac{1}{(p^{2} + q^{2} - r^{2})^{2}} = 0$$

da cui si vede subito che il quadrato del suo raggio è

$$\frac{1}{c_3^2} = \frac{r^2}{(p^2 + q^2 - r^2)^2}.$$

Parenteticamente osserviamo che questa formula mostra che il quadrato del raggio della inversa di una circonferenza γ di raggio r e centro C rispetto ad una circonferenza γ' di raggio 1 e centro O, è dato dal rapporto tra r^2 e il quadrato della differenza tra $(CO)^2$ e r^2 .

In ogni caso, abbiamo

$$\pm rc_3 = p^2 + q^2 - r^2 = q^2 - \frac{c_1c_2}{4}.$$

Supponiamo ora che nella precedente equazione valga il segno + (altrimenti si argomenta in modo analogo). Allora, ragionando analogamente per C'_4 vediamo che si hanno le due relazioni

$$rc_3 = p^2 + q^2 - r^2, \quad rc_4 = p^2 + (q+2r)^2 - r^2.$$
 (7)

Sottraiamo membro a membro e dividiamo per r ottenendo

$$4q = -(c_3 - c_4 + 4r).$$

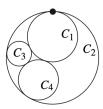
Tenendo conto della prima delle (7) si ha

$$16(rc_3 + r^2 - p^2) = 16q^2 = (c_3 - c_4 + 4r)^2.$$

Sostituendo in questa relazione $p = \frac{c_1 - c_2}{4}$ e $r = \frac{c_1 + c_2}{4}$, otteniamo (6), come voluto.

Il Teorema di Decartes si applica anche se vi sono tangenze interne, purché le curvature si prendano con segno appropriato, positivo o negativo. Per fare ciò occorre definire il concetto di circonferenza
orientata, che è una circonferenza più un vettore unitario ortogonale alla circonferenza che può puntare verso l'interno o l'esterno della circonferenza (quindi ogni circonferenza ha due orientazioni, una
inversa dell'altra). Se il vettore punta verso l'interno la circonferenza si dice orientata positivamente,
se verso l'esterno, si dice orientata negativamente. La curvatura, o meglio la curvatura con segno,
della circonferenza si assume positiva se la circonferenza è orientata positivamente, altrimenti si
assume negativa. Per convenzione, data una circonferenza orientata, il suo interiore è la parte del

piano verso cui punta il versore che ne determina l'orientazione. Quindi se la circonferenza è orientata positivamente, l'interiore della circonferenza coincide con il suo interno, altrimenti l'interiore è l'esterno della circonferenza. Definiamo infine configurazione di Decartes orientata una configurazione di quattro circonferenze tra loro mutuamente tangenti, dotate ciascuna di una orientazione in modo tale che o gli interiori delle quattro circonferenze siano disgiunti oppure lo siano quando le orientazioni delle quattro circonferenze vengono tutte invertite. Quindi ogni configurazione di Decartes ha esattamente due orientazioni, una opposta dell'altra, nel senso che una si ottiene dall'altra invertendo le orientazioni di tutte le circonferenza della configurazione. Per esempio nella configurazione in figura possiamo considerare l'orientazione in cui C_2 è orientata negativamente mentre C_1, C_3, C_4 positivamente. Otteniamo così una configurazione di Decartes orientata e le curvature di C_1, C_3, C_4 vanno considerate positivamente mentre quella di C_2 negativamente. La dimostrazione segue le stesse linee di quella che abbiamo dato precedentemente e su ciò non ci tratteniamo.



Con queste definizioni, il Teorema di Desargues continua a valere purché si considerino le curvature con segno.

10 Sviluppi più recenti

10.1 Sulle tracce di Decartes

Il teorema di Descartes pare caduto nell'oblio fino al 1826 quando Steiner, senza sapere del Teorema di Decartes, trovò lo stesso risultato e ne diede una completa dimostrazione. Un'altra riscoperta indipendente avvenne pochi anni dopo, nel 1842, da parte di Philipp Beecroft. Successivamente il teorema cadde di nuovo nell'oblio per quasi un secolo finché nel 1936 Sir Frederick Soddy (1877–1956), premio Nobel per la chimica nel 1921 per la scoperta degli isotopi, pubblicò sulla rivista Nature una poesia dal titolo "The kiss precise" nella quale espose (senza dimostrazione) il teorema in questione, suggerendo una estensione al caso tridimensionale. L'anno seguente Thorold Gossett (1869–1962) aggiunge un'altra strofa alla poesia estendendo il teorema in dimensione qualunque, cioè a una configurazione di Decartes di n + 2 sfere orientate di dimensione n - 1 nello spazio euclideo a n dimensioni, che sono mutuamente tangenti. Il risultato è che se c_1, \ldots, c_{n+2} sono le curvature con segno delle sfere in questione, si ha la relazione

$$n\left(\sum_{i=1}^{n+2} c_i^2\right) = \left(\sum_{i=1}^{n+2} c_i\right)^2.$$

Questo è ora noto come Teorema di Soddy–Gossett. Il caso n=3 di questo risultato era già apparso nel 1886 in un lavoro di R. Lachlan, in accordo con una tradizione inveterata per cui sovente i teoremi non prendono il nome da chi li ha dimostrati per primo. Secondo Pedoe (cfr. [5]), il primo ad attribuire il risultato (bidimensionale) a Decartes è stato il matematico svizzero Alfred Aeppli (1894–1971). Una dimostrazione nello spazio che fa uso delle inversioni rispetto a sfere è dovuta a M. T. Wise nel 1960. Il citato lavoro di Pedoe, così come quello di Brigaglia [1], è un'ottima sorgente di informazione anche dal punto di vista storico sulle questioni che stiamo trattando.

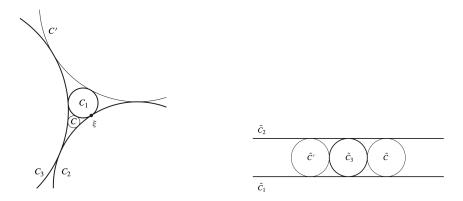
Un altro risultato molto interessante legato al Teorema di Decartes è dovuto, in tempi molto più recenti (2001), a Je?rey C. Lagarias ,Colin L. Mallows e Allan R. Wilks. Ad esso gli autori hanno dato il nome di Teorema di Desargues Complesso. Esso dice la cosa seguente. Consideriamo una configurazione di Decartes di quattro circonferenze mutuamente tangenti, di curvature c_j e di centri (x_j, y_j) , per $j = 1, \ldots, 4$. Consideriamo i numeri complessi $z_j = x_j + iy_j$, per $j = 1, \ldots, 4$. Si ha allora

$$2\left(\sum_{j=1}^{n+2} (c_j z_j)^2\right) = \left(\sum_{j=1}^{n+2} c_j z_j\right)^2 \tag{8}$$

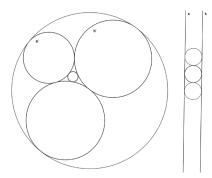
ottenendo così una relazione che coinvolge non solo le curvature ma anche i centri delle circonferenze. Questa relazione implica il classico Teorema di Desargues: infatti la relazione (8) continua a valere se sostituiamo a z_j il numero complesso $z_j + w$, per ogni j = 1, ..., 4, dove w è un qualunque altro numero complesso. Questo infatti equivale a effettuare una traslazione della configurazione in questione. Basta allora eguagliare a primo e secondo membro i coefficienti di w^2 .

10.2 Il Fregio di Apollonio (Apollonian Gasket)

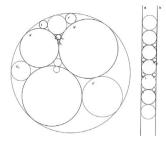
Consideriamo tre circonferenze C_1, C_2, C_3 che sono mutuamente tangenti. Un caso particolare del Problema di Apollonio è determinare le circonferenze tangenti a C_1, C_2, C_3 . Si vede subito che ve ne sono esattamente due. Questo si prova applicando una inversione circolare. Riferendoci alla figura che segue, applichiamo una inversione circolare di centro il punto ξ di tangenza di C_1 e C_2 . Allora C_1 e C_2 vengono trasformate in due rette parallele \tilde{C}_1 e \tilde{C}_2 , mentre C_3 viene mutata in una circonferenza \tilde{C}_3 tangente alle due rette \tilde{C}_1 e \tilde{C}_2 . Vi sono allora esattamente due circonferenze \tilde{C} e \tilde{C}' che sono tangenti a \tilde{C}_1, \tilde{C}_2 e \tilde{C}_3 , come mostrato in figura. Facendo l'inversione opposta si ottiene quanto asserito.



Quindi il dato di tre circonferenze tra loro tangenti determina una configurazione di cinque circonferenze, di cui due tangenti alle tre date. Supponiamo che vi sia una di queste ultime due che sia esternamente tangente alle tre date e una che lo sia internamente, come nella figura che segue, in cui è indicata anche una trasformata per inversione circolare della configurazione data.

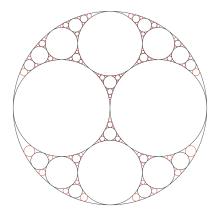


Come si vede dalla figura la regione esterna alle quattro circonferenze interne, ed interna alla circonferenza esterna si compone di sei regioni, limitate da tre circonferenze tra loro tangenti. In ognuna di tali regioni si potrà inscrivere una nuova circonferenza tangente alle tre date. Questo procedimento si può ripetere indefinitamente, come si vede nella figura che segue, che mostra sul lato sinistro come le varie circonferenze si dispongano nella configurazione di partenza delle cinque circonferenze, sul lato destro la controparte di questa disposizione nella figura ottenuta per inversione circolare in un punto di tangenza tra due delle tre circonferenze di partenza esternamente tangenti.



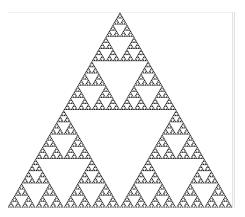
Si vede dunque come l'apparentemente disordinata configurazione che appare sulla figura a sinistra risponde invece ad una configurazione molto simmetrica nella figura inversa a destra.

La configurazione finale, che prende il nome di Fregio di Apollonio (Apollonian Gasket in inglese) o Impacchettamento di Apollonio (Apollonian Packing in inglese), è impossibile da disegnare, in quanto è frutto di un processo infinito, ma è ben illustrata dalla figura seguente



Il termine "Apollonian Packing" è stato coniato nel 1943 nel lavoro [4].

Se da tutte le circonferenze della configurazione togliamo l'interiore, otteniamo un insieme frattale, che chiameremo Frattale di Apollonio, di misura nulla, che è per certi versi analogo al, ma più complicato del, Triangolo di Sierpinski.



Alcune proprietà del Frattale di Apollonio non sono ancora note. Ad esempio la sua dimensione di Hausdorff non è nota, se ne conosce solo un'approssimazione a 1,30568 (mentre la dimensione di Hausdorff del Triangolo di Sierpiski è nota ed è $\frac{\log(3)}{\log(2)}$). Ricordiamo che i frattali, intuitivamente, sono figure geometriche caratterizzate dal ripetersi sino all'infinito di uno stesso motivo su scala sempre più ridotta. I frattali in natura si presentano con una grande frequenza. Dal punto di vista matematico essi sono stati introdotti, e per la prima volta studiati, negli anni 1970, dal matematico francopolacco Benoit Mandelbrot (1924–2010). Il risultato di Lagarias, Mallows e Wilks che abbiamo

prima menzionato è alla base della elaborazione si un programma estremamente efficace per produrre delle immagini al computer del Frattale di Apollonio.

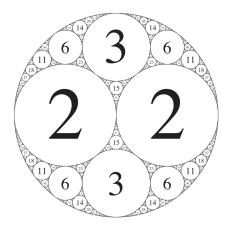
Una proprietà notevole e sorprendente del Fregio di Apollonio, scoperta ancora da Soddy nel 1937, è la seguente. Consideriamo tre circonferenze C_1, C_2, C_3 esternamente tangenti tra loro e di curvature c_1, c_2, c_3 . Siano C, C' le due circonferenze tangenti alle tre date, con curvature c_4 e c'_4 . Valendo il Teorema di Decartes (6), si vede subito che si ha

$$c_4 + c_4' = 2(c_1 + c_2 + c_3), \quad c_4, c_4' = c_1 + c_2 + c_3 \pm \sqrt{\Delta}$$
 (9)

dove

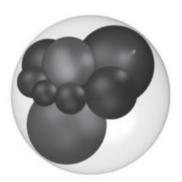
$$\Delta = c_1 c_2 + c_1 c_3 + c_2 c_3.$$

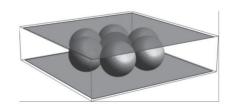
Supponiamo ora che c_1, c_2, c_3 siano interi e che anche $\sqrt{\Delta}$ sia un intero, sicchè c_4, c_4' sono pure interi. Ora se partiamo dalle circonferenze C_1, C_2, C_3, C_4 di curvature c_1, c_2, c_3, c_4 rispettivamente, troviamo una quinta circonferenza C_5 tangente, per esempio, a C_1, C_2, C_4 . La curvatura c_5 di C_5 è soluzione di una equazione di secondo grado di cui una soluzione è la curvatura c_4 di C_4 . Quindi nel trovare c_5 noi non dobbiamo più estrarre radici quadrate, ma adoperare solo l'analogo della prima equazione di (9), e pertanto c_5 risulterà anch'esso intero. Reiterando questo ragionamento vediamo che se c_1, c_2, c_3, c_4 sono tutti interi, allora tutte le circonferenze che appaiono nel Fregio di Apollonio hanno curvatura intera. Si parla allora di Fregio di Apollonio Intero. Questo è illustrato nella figura seguente



Tutto ciò pone dei sottili problemi di teoria dei numeri. Ad esempio, per prima cosa ci piacerebbe contare, in qualche modo, le circonferenze che appaiono in un Fregio di Apollonio Intero. Ciò si può fare in due modi. Il primo è contare in ordine crescente le relative curvature, un altro è contare le circonferenze nell'ordine di apparizione nelle successive generazioni. In entrambi i casi non si hanno risultati completi, ma solo stime. In particolare un problema interessante è quello di capire quali sono le possibili successioni delle curvature in un Fregio di Apollonio Intero. Tuttavia non si hanno ancora strumenti sufficientemente raffinati per rispondere a questo quesito, ma si dispone di risultati molto parziali e di alcune interessanti congetture che guidano la ricerca in proposito. Per informazioni si veda [6].

Problemi analoghi si possono porre in più dimensioni. Ad esempio lo stesso Soddy ha considerato nel 1937 la configurazione costituita da una sfera che ha al suo interno due altre sfere tangenti alla prima e tangenti tra loro. Soddy pone il problema di realizzare una successione di sfere ciascuna delle quali è tangente alla precedente e alla successiva ciclicamente, e alle tre di partenza. Soddy prova (facendone oggetto come al solito di una poesia) che esiste una successione finita, formata da esattamente sei sfere (indipendentemente dalla dimensione e disposizione delle tre sfere di partenza) che si chiude in modo esatto, ossia l'ultima sfera è tangente e non si sovrappone alla prima. Questa configurazione fu chiamata hexlet da Soddy, che provò anche altre sue eleganti proprietà:; ad esempio i centri delle sei sfere stanno su una ellissi e se c_1, \ldots, c_6 sono le loro curvature in successione, si ha $c_1 + c_4 = c_2 + c_5 = c_3 + c_6$. Una dimostrazione con l'inversione sferica fu prodotta da Frank Morley (1860–1937). Se facciamo, come di consueto una inversione di centro uno dei punti di tangenza delle tre sfere di partenza, la configurazione iniziale, qualunque essa sia, si trasforma in una coppia di piani paralleli π_1 e π_2 più una sfera S di diametro pari alla distanza tra i due piani, tangente ad entrambi. È chiaro allora che la risoluzione del problema di Soddy è fornita da una successione di sfere, delle stesse dimensioni della sfera S, tutte tangenti ad essa e ciclicamente tra loro, e tangenti a due piani π_1 e π_2 . Il problema è allora equivalente a questo: poggiamo su un piano una sfera e cerchiamo quante sfere, uguali a quella data, possiamo porre accanto ad essa, in modo che siano tutte tangenti alla sfera data e ciclicamente tra loro. Sperimentalmente (lavorando ad esempio con delle biglie) si vedrà che il problema è risolto esattamente da sei sfere la cui successione si chiude perfettamente. Peraltro non è difficile verificare la proprietà algebricamente. Le seguenti figure illustrano il problema di Soddy e la sua soluzione.





Aggiungiamo che molti brillanti lavori sono stati dedicati a questi argomenti dal geometra inglese Harold Coxeter (1907–2003), che ha posto in evidenza inattese relazioni con lo studio di *politopi* in spazi di dimensione superiore. Su ciò non possiamo qui soffermarci, ma si può vedere per ulteriori notizie, ampie notazioni storiche e vasta bibliografia l'articolo [2].

Concludiamo menzionando uno sviluppo teorico molto importante, dovuto alla medaglia Fields William Thurston (1946–2012), che ha indicato il nesso tra le questioni che abbiamo qui trattato con raffinati problemi di topologia algebrica e la teoria delle funzioni analitiche discrete (cfr. [7]).

Riferimenti bibliografici

- [1] A. Brigaglia, L'inversione circolare, aspetti storici e didattici, Conferenze e Seminari dell'Associazione Subalpina Mathesis, (2014–2015), 43–79.
- [2] A. Brigaglia, A kiss precise. L'evoluzione di un problema classico nel XX secolo, in "Serva di due padroni, Saggi di Storia della Matematica in onore di Umberto Bottazzini", a cura di Alberto Cogliati, Egea, 2019 (pp. 309–334).
- [3] R. Courant, H. Robbins, Che cos'è la matematica?, Einaudi, 1950.
- [4] E. Kasner, F. Supnik, *The Apollonian packing of circles*, Proceedings of the National Academy of Science of the United States of America, **29** (1943), 378—384.
- [5] D. Pedoe, On a Theorem in Geometry, The American Mathematical Monthly, **74**(6) (1967), 627–640.
- [6] P. Sarnak, *Integral Apollonian Packings*, The American Mathematical Monthly, **118** (4) (2011), 291-306.
- [7] K. Stephenson, Circle Packings: a Mathematical Tale, Notices of the American Mathematical Society, **50** (4) (2003), 1376–1388.