Il problema di Apollonio

Ciro Ciliberto

Università di Roma "Tor Vergata"

Liceo Matematico
12 Marzo 2021

Apollonio di Perga

Apollonio di Perga (Perga, 262 a.C.– Alessandria d'Egitto, 190 a.C.) è stato un matematico e astronomo greco, famoso per le sue opere sulle coniche. Fu Apollonio che diede alla ellisse, alla parabola e alla iperbole i nomi con i quali da allora queste curve sono conosciute.

Le notizie sulla vita di Apollonio sono molto scarse. Nacque a Perga, in Panfilia, ma si spostò ad Alessandria, dove compose una prima versione delle "Coniche". Visitò Efeso e Pergamo e qui conobbe il matematico Eudemo da Pergamo, al quale poi inviò i primi tre libri rivisti delle Coniche.

Di lui sopravvivono solo due opere:

• "Separazione di un rapporto": due libri giunti a noi in una traduzione in arabo;
• "Le coniche": opera in otto libri dei quali quattro sopravvivono nella versione greca originale e sette in una traduzione in arabo, l'ottavo libro essendo perduto, ma ricostruito per via deduttiva dallo scienziato arabo Ibn al-Haytham, chiamato in Occidente Alhazen.

Di altre opere, perdute, restano solo i titoli.

A noi qui interessa in modo particolare l'opera "Tangenze", della quale ci sono giunti solo i riferimenti fatti ad essa da Pappo di Alessandria (290 circa–350 circa) nella sua opera "Mathematicae Collectiones", giunta a noi e tradotta in latino nel 1589 da Federico Commandino (1509–1575).

Il problema di Apollonio

Pappo riporta il problema trattato da Apollonio in "Tangenze", noto come Problema di Apollonio: *dati tre oggetti qualsiasi tra punti, rette e circonferenze determinare (possibilmente con costruzioni geometriche che usano solo riga e compasso) le circonferenze che passano per i punti dati e sono tangenti alle curve date (rette o circonferenze).*

Ci sono in totale dieci casi (un paio dei quali, in rosso nella lista che segue, banali) nei quali sono dati rispettivamente:

(1) tre punti (p, p, p)
(2) due punti e una retta (p, p, r)
(3) due punti e una circonferenza (p, p, c)
(4) un punto e due rette (p, r, r)
(5) un punto e una retta e una circonferenza (p, r, c)
(6) un punto e due circonferenze (p, c, c)
(7) tre rette (r, r, r)
(8) due rette e una circonferenza (r, r, c)
(9) due circonferenze e una retta (r, c, c)
(10) tre circonferenza (c, c, c)

Il mio obiettivo è di ripercorrere la storia di questo problema, spiegandone a grandi linee alcuni tentativi di risoluzione, e di spiegare come le inversioni circolari si possano utilmente applicare per risolvere il problema. Infine darò alcuni cenni a sviluppi più recenti relativi al Problema di Apollonio.

L'inversione circolare

Ricorderò ora le principali proprietà dell'inversione circolare e farò alcuni commenti in proposito.

Comincio col dire che non è del tutto chiaro chi abbia per primo considerato le inversioni circolari. Di certo esse appaiono presso vari autori all'inizio del XIX secolo, ad esempio in Germinal Pierre Dandelin (1794–1847), Julius Plücker (1801–1868), Jakob Steiner (1796–1863), ma il primo a dare una esposizione sistematica della teoria è stato il matematico italiano Giusto Bellavitis (1803–1880), che è stato anche il primo ad applicare l'inversione circolare alla soluzione di alcuni casi del Problema di Apollonio.

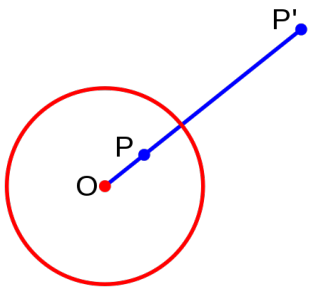
L'inversione circolare è un caso particolare di trasformazione quadratica (una trasformazione del piano che muta in generale rette in coniche e viceversa), trasformazioni di cui furono studiati casi particolari da vari autori nella prima metà dell'800, ma che furono studiate in forma più organica da Giovanni Schiaparelli (1835–1910) nel 1861 e da Thomas Archer Hirst (1830 –1892) nel 1864, e infine da Luigi Cremona (1830–1903), che le generalizzò dando il concetto di trasformazione birazionale che è alla base della geometria algebrica.

La definizione di inversione circolare

Sia γ una circonferenza di centro O e raggio r. L'inversione circolare rispetto a γ è la funzione ι che associa ad ogni punto P del piano distinto da O il punto P' appartenente alla semiretta uscente da O e passante per P tale che

$$\boxed{(OP) \cdot (OP') = r^2}$$

Il punto P' è detto punto inverso di P rispetto alla circonferenza γ, r^2 è detta potenza dell'inversione, il punto O è detto centro della inversione circolare.



L'inverso del punto P si può costruire con riga e compasso. Questo equivale al problema di determinare il terzo proporzionale dopo due segmenti dati, in questo caso OP e il raggio della circonferenza γ, cioè

$$(OP) : r = r : (OP').$$

Principali proprietà

Le proprietà principali della inversione circolare sono le seguenti:

• l'inversione circolare è inversa di se stessa, ossia $\iota^2 = \mathrm{id}$, cioè ι è una involuzione;
• i punti di γ sono gli unici punti del piano fissati da ι;
• l'interno di γ viene mandato da ι nell'esterno di γ e viceversa;
• l'imagine di una retta passante per O è la retta stessa;
• l'imagine di una circonferenza passante per O è una retta parallela alla tangente alla circonferenza in O;
• l'immagine di una retta non passante per O è una circonferenza per O, la cui tangente in O è parallela alla retta data;
• l'immagine di una circonferenza non passante per O di centro un punto C è una circonferenza il cui centro è sulla semiretta OC;
• l'inversione è una trasformazione conforme, ossia conserva gli angoli ad esempio tra rette e circonferenza: l'angolo tra due circonferenze [risp. tra una circonferenza e una retta] in un punto dato è per definizione l'angolo tra le relative tangenti in quel punto [risp. l'angolo tra la tangente alla circonferenza e la retta in quel punto]. In particolare l'inversione conserva le tangenze;
• una circonferenza diversa da γ è fissata da ι se e solo se interseca γ ortogonalmente in due punti distinti.

Le suddette proprietà si possono tutte verificare geometricamente.

Le immagini di rette e circonferenze tramite l'inversione circolare si possono costruire con riga e compasso.

L'espressione analitica

Se si pone O nel centro di coordinate cartesiane ortogonali, sicché la circonferenza γ ha equazione

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

si trovano agevolmente le equazioni della inversione circolare ι rispetto a γ. Cioè, se $P = (x, y)$ allora $P' = \iota(P) = (x', y')$, con

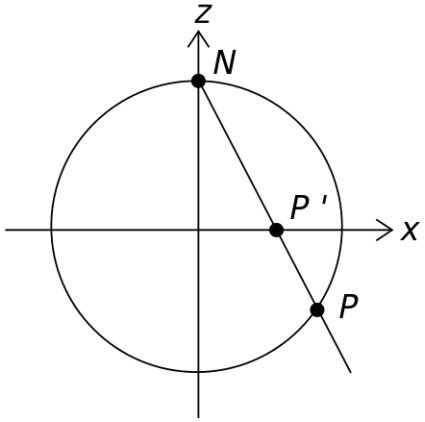
$$\boxed{x' = \frac{r^2 x}{x^2 + y^2}, \quad y' = \frac{r^2 y}{x^2 + y^2}}$$

Le proprietà che abbiamo elencate si possono verificare analiticamente facendo uso di queste equazioni: si tratta di un utile esercizio algebrico–geometrico.

La proiezione stereografica

L'inversione circolare è legata alla proiezione stereografica. Nella tradizione della geometria dell'antica Grecia non si trova la nozione di trasformazione geometrica. Forse l'unica eccezione è proprio la proiezione stereografica, presente nel "Planispherium" di Tolomeo (100 circa–175 circa), un'opera a noi pervenuta in traduzione araba.

La proiezione stereografica è una trasformazione della sfera meno un punto sul piano. Consideriamo una sfera Σ di raggio r, fissiamone un punto, che indichiamo con N (che sta per polo nord). Consideriamo poi il piano π diametrale ortogonale al diametro passante per N. Per ogni punto P di S diverso da N consideriamo la retta r_P che congiunge P con N, e intersechiamo r_P con π ottenendo il punto P'. Notiamo che r_P non è parallela a π, in quanto le rette per N parallele a π giacciono tutte nel piano tangente a Σ in N, e intersecano Σ solo in N. La proiezione stereografica associa al punto P il punto P'.



Nella figura vediamo come funziona la proiezione stereografica in un piano diametrale di Σ per N.

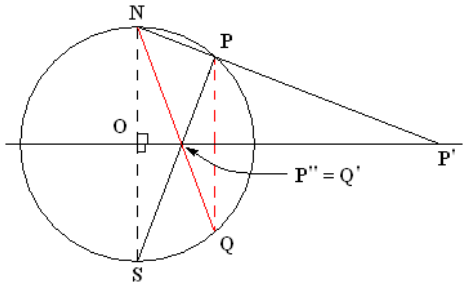
Relazione tra proiezione stereografica e inversione circolare

Prendiamo un punto P' del piano π diverso dal centro O della sfera Σ e facciamone l'inverso P tramite la proiezione stereografica. Ora facciamo la proiezione stereografica di P dal punto S (che sta per polo sud) diametralmente opposto a N. Otteniamo così un punto P''. Ebbene P'' è l'immagine di P' tramite la inversione rispetto alla circonferenza γ intersezione della sfera Σ con il piano π.

Infatti consideriamo i due triangoli rettangoli $P'ON$ e OSP''. Essi sono simili in quanto gli angoli in S e P' sono uguali perchè formati da rette perpendicolari. Allora abbiamo

$$(P'O) : (NO) = (OS) : (P''O) \quad \text{quindi} \quad (\mathrm{P'O}) \cdot (\mathrm{P''O}) = \mathrm{r}^2.$$

Notiamo che P'' è altresì la proiezione stereografica da N del simmetrico Q di P rispetto alla retta OP'.



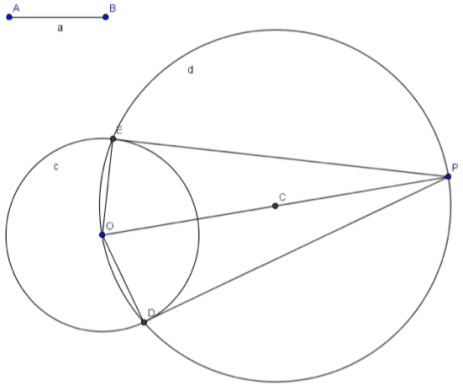
Un altro utile esercizio è ritrovare le proprietà della inversione circolare facendo uso della proiezione stereografica.

Una prima applicazione

Come prima applicazione dell'inversione circolare, risolviamo il problema di trovare le circonferenze passanti per due punti distinti A e B del piano e tangenti ad una circonferenza G data, che è il caso (p, p, c) del problema di Apollonio.

Applichiamo una inversione circolare qualunque di centro A. Allora la questione si riconduce a quella, più semplice, di trovare le rette passanti per il trasformato B' di B tangenti alla circonferenza G' trasformata di G. La risposta è: non c'è alcuna tale retta se B' è interno a G', ce ne è una sola se B' sta su G' (il che equivale a dire che B sta su G), ce ne sono due se B' è esterno a G'.

Le rette tangenti ad una circonferenza da un suo punto esterno si costruiscono con riga e compasso. Infatti, data la circonferenza c di centro O e raggio AB, dato il punto P esterno ad essa, si disegna la circonferenza d di diametro OP e centro C il punto medio del segmento di estremi O e P. Le circonferenze c e d si intersecano in due punti D e E. Questi sono i punti di tangenza cercati, dato che le rette PD e PE formano angoli retti con i raggi OC e OD rispettivamente.



Risoluzione del problema di Apollonio con l'inversione circolare

Ora vedremo più in generale come si possa risolvere il Problema di Apollonio usando le inversioni circolari.

Si ripartiscono i dieci casi in cui si suddivide il problema in tre gruppi:

- il primo gruppo contiene tutti i casi (da 1 a 6) in cui tra i tre elementi della terna (a, b, c) vi sia un punto,
- il secondo gruppo contiene solo il caso 7 in cui abbiamo (r, r, r),
- infine nel gruppo rimanente includiamo i rimanenti casi 8, 9 e 10.

Come vedremo il caso 7 si risolve elementarmente, i casi del primo gruppo si risolvono usando inversioni circolari con centro in uno dei punti della terna (come abbiamo già visto nel caso (p, p, c)), i casi del terzo gruppo sono i più ostici ma, mediante un opportuno trucco, si possono ricondurre ai casi del primo gruppo.

Non esaminerò in dettaglio tutti i casi dei tre gruppi, ma tratterò il caso 7 del secondo gruppo e un esempio del terzo gruppo. Del primo gruppo ho già fatto l'esempio (p, p, c).

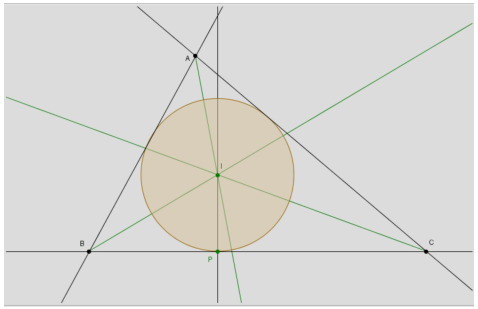
Secondo gruppo: il caso (r, r, r)

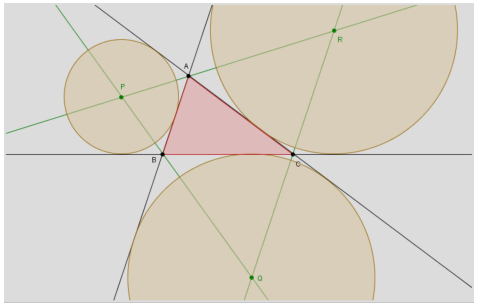
Faccio il caso (generale) in cui le tre rette sono lati di un triangolo, lasciando a voi la discussione dei casi rimanenti (più semplici).

Date due rette distinte e non parallele, le circonferenze tangenti ad entrambe sono quelle che hanno centri sulle bisettrici degli angoli formati dalle due rette (e raggio pari alla distanza del centro da una delle due rette).

Nel caso delle tre rette lati di un triangolo abbiamo per ogni coppia di rette due bisettrici, quindi sei rette. Le tre bisettrici interne al triangolo si intersecano in un punto (il incentro del triangolo), che è il centro della circonferenza inscritta nel triangolo, mentre due bisettrici esterne si intersecano in un punto che è anche comune ad una bisettrice interna, ottenendo così tre punti che sono i centri delle circonferenze exinscritte nel triangolo.

Queste quattro circonferenze, risoluzione del problema, si determinano con riga e compasso in quanto con riga e compasso si determinano le bisettrici di un angolo e la distanza di un punto da una retta.





I casi del terzo gruppo

I tre casi del terzo gruppo sono i più difficili da trattare con le inversioni circolari, in quanto non vi è nessun punto preferenziale che si possa prendere come centro di una inversione. Occorre allora un espediente per venirne a capo mediante inversioni circolari, ed esso consiste nell'applicare la cosiddetta dilatazione parallela, che, come vedremo, ha un significato importante anche dal punto di vista storico. Essa consente di ridurre questi casi alla soluzione di casi del primo gruppo.

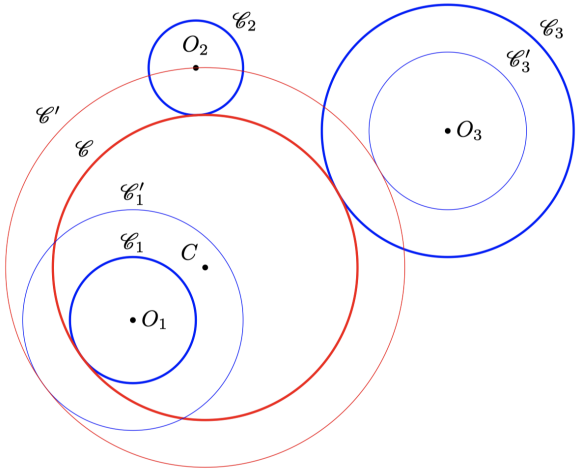
La dilatazione parallela (I)

Per illustrare cosa è e come funziona la dilatazione parallela, discutiamo il caso (c, c, c).

Supponiamo di avere tre circonferenze, $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$, di centri rispettivi O_1, O_2, O_3 e raggi r_1, r_2, r_3, e supponiamo di aver trovato una delle circonferenze loro tangenti comuni: la circonferenza $\mathcal{C}$ di centro C e raggio r.

Immaginiamo ora di ridurre la più piccola delle tre circonferenze (nel caso in figura $\mathcal{C}_2$) al suo centro riducendone il raggio a zero. Supponiamo di far diminuire il raggio di $\mathcal{C}_3$ da r_3 a $r_3 - r_2$, ottenendo $\mathcal{C}_3'$, e di far aumentare il raggio di $\mathcal{C}_1$ da r_1 a $r_1 + r_2$, ottenendo $\mathcal{C}_1'$. La circonferenza $\mathcal{C}'$ di centro C e raggio $r + r_2$ passa per O_2 ed è tangente alle due circonferenze $\mathcal{C}_1'$ e $\mathcal{C}_3'$.

Quindi, invece di costruire la circonferenza $\mathcal{C}$ tangente a $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$, possiamo costruire prima la circonferenza $\mathcal{C}'$ tangente a $\mathcal{C}_1'$ e $\mathcal{C}_3'$ e passante per O_2: questo è un problema (p, c, c) del primo gruppo. Successivamente passiamo da $\mathcal{C}'$ a $\mathcal{C}$ diminuendo il raggio di $\mathcal{C}'$ di r_2.



La dilatazione parallela (II)

In generale si dovranno considerare, sia nelle circonferenze date che in quelle ottenute applicando l'inversione, aumenti e diminuzioni dei raggi. Inoltre nel caso si abbiano problemi con rette e circonferenze, invece che solo con circonferenze, la dilatazione parallela applicata alle rette consisterà nel costruire rette parallele alle rette date nei due semipiani formati dalle rette date, a distanza pari al raggio della circonferenza più piccola (che è quella che viene ridotta a un punto).

In conclusione, date nel piano alcune rette e alcune circonferenze, operare una dilatazione parallela significa:

• individuare la circonferenza di raggio più piccolo (o una di quelle di raggio più piccolo), diciamolo ρ, riducendola ad un punto diminuendo il raggio da ρ a 0;
• aumentare e diminuire i raggi delle altre circonferenze di una quantità uguale a ρ;
• traslare parallelamente a se stesse, sui due lati possibili, le rette date di una quantità uguale a ρ.

Il sistema di rette e circonferenze è allora ridotto ad un nuovo sistema costituito da un punto, da rette e da circonferenze. Questa idea permette di ricondurre i casi del problema di Apollonio in cui non sono presenti punti, a casi in cui è presente almeno un punto, e che si possono trattare con inversione circolare.

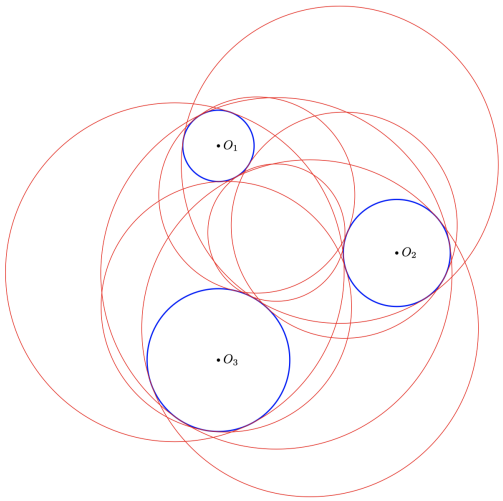
Occorre però fare attenzione al fatto che la costruzione indicata può anche produrre alcune circonferenze che non sono soluzioni del problema.

Il caso (c, c, c)

Questo si può considerare il principale Problema di Apollonio.

Abbiamo già visto come la dilatazione parallela possa applicarsi a questo caso. Il massimo numero di soluzioni è 8, anche se può sembrare che la costruzione indicata possa produrre fino a 16 circonferenze soluzione del problema: infatti si vede (con l'inversione circolare) che il problema (p, c, c), cui questo si riduce con la dilatazione parallela, ammette al massimo 4 soluzioni, ed occorre applicarlo 4 volte (aumentando o diminuendo i raggi delle due circonferenze non di raggio minimo) per risolvere il problema (c, c, c).

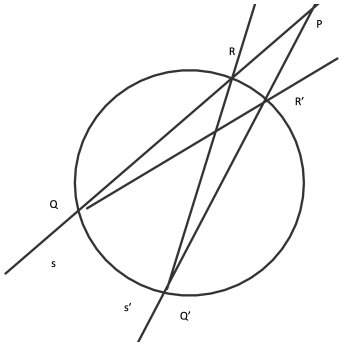
Qui di seguito una figura in cui appaiono tutte e otto le soluzioni del problema.



Non volendo usare la dilatazione parallela, ma solo l'inversione circolare, c'è un metodo interessante che funziona per (c, c, c) almeno nel caso generale (più difficile) in cui le tre circonferenze non abbiano a due a due punti a comune e non siano a due a due concentriche. Servono però delle nozioni preliminari.

Potenza di un punto rispetto ad una circonferenza

Sia C una circonferenza e sia P un punto del piano. Tracciamo una qualunque retta s per P che intersechi C in due punti Q, R. Allora il prodotto $(PQ)(PR)$ non dipende dalla retta s. Questo si vede dalla figura che segue, tenendo conto che i triangoli PQR' e $PQ'R$ sono simili.



Se mettiamo un verso v di percorrenza sulla retta s e consideriamo le misure orientate $(PQ)_v$ e $(PR)_v$ dei segmenti PQ e PR, si vede che $(PQ)_v(PR)_v$ non dipende dalla retta orientata s. Questo numero è detto potenza di P rispetto a C ed è positivo, negativo o nullo, a seconda che P si trovi all'esterno, all'interno o sulla circonferenza.

Se C ha in un sistema di coordinate cartesiane ortogonali l'equazione

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

e se P ha coordinate (x_0, y_0) si verifica che la potenza di P rispetto a C vale

$$\boxed{x_0^2 + y_0^2 + ax_0 + by_0 + c}$$

Asse radicale

Consideriamo due circonferenze C e C' distinte. L'asse radicale di C e C' è il luogo dei punti del piano che hanno la stessa potenza rispetto a C e C'.

Se C e C' hanno equazioni rispettive

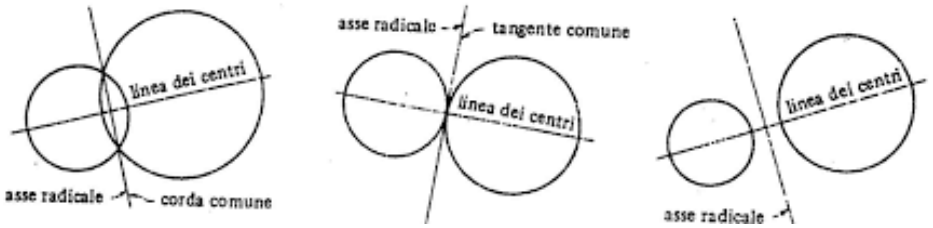
$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0, \quad x^2 + y^2 + a'x + b'y + c' = 0$$

l'asse radicale ha evidentemente equazione

$$\boxed{(a - a')x + (b - b')y + (c - c') = 0}$$

Se le due circonferenze sono concentriche, allora $a = a'$ e $b = b'$, sicchè la suddetta equazione non ha soluzioni, ossia l'asse radicale è vuoto.

Se invece le due circonferenze non sono concentriche, allora la suddetta equazione ci mostra che l'asse radicale è una retta ortogonale alla retta congiungente i centri di C e C'.



Fasci di circonferenze

Mettiamoci ora nell'ipotesi che C e C' siano distinte e non concentriche.

Consideriamo, a partire da C e C', tutti i luoghi del piano che hanno equazioni del tipo

$$\lambda(x^2 + y^2 + ax + by + c) + \mu(x^2 + y^2 + a'x + b'y + c') = 0$$

al variare di λ, μ in $\mathbb{R}$ non entrambi nulli.

Si vede subito che tutti questi luoghi sono circonferenze (eventualmente di raggio nullo) o insiemi vuoti, tranne che se $\lambda = -\mu$, caso in cui il luogo in questione è proprio l'asse radicale.

Le circonferenze date dall'equazione suddetta si dicono formare un fascio, determinato da C e C'.

Proprietà dei fasci di circonferenze

Ci sono alcune proprietà dei fasci (facili da verificare) che vanno evidenziate:
• un fascio è determinato da due sue qualunque circonferenze distinte;
• per ogni punto del piano c'è un'unica circonferenza del fascio che ci passa;
• date due circonferenze C e C' distinte non concentriche, se l'equazione di C e l'equazione dell'asse radicale di C e C' sono rispettivamente

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0, \quad cx + dy + e = 0$$

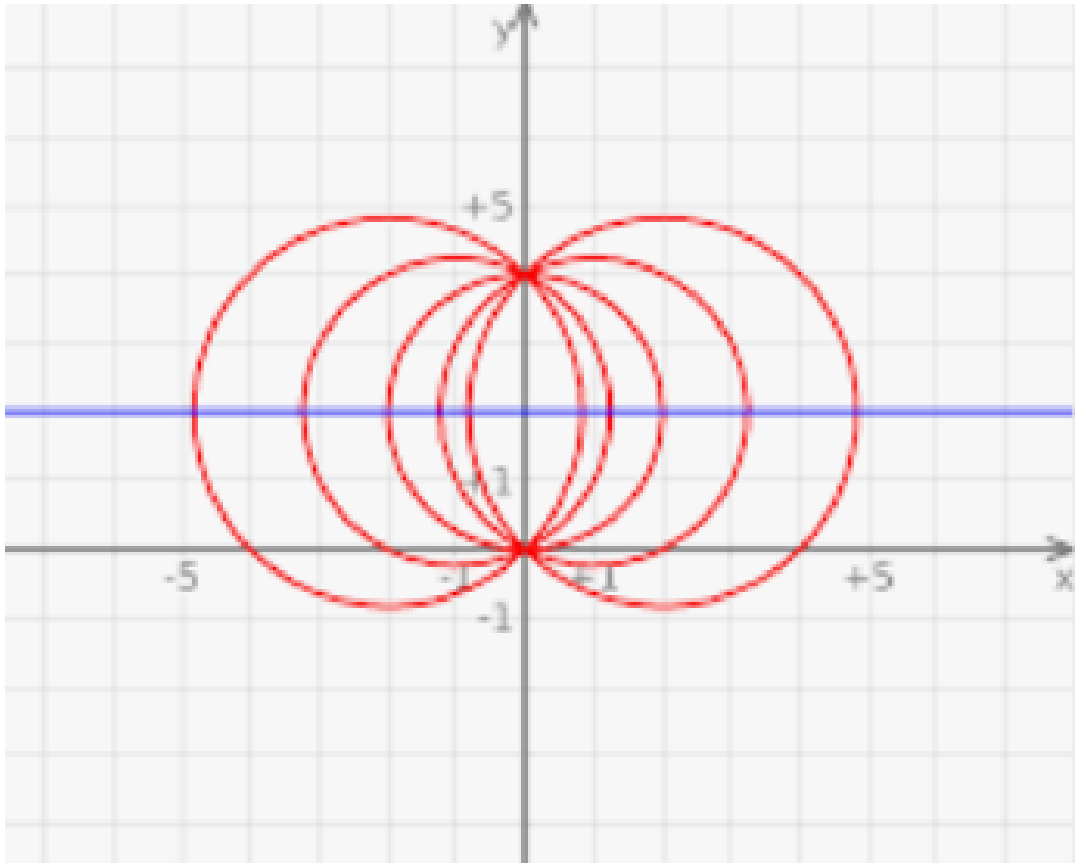
il fascio determinato da C e C' ha anche equazione del tipo

$$\lambda(x^2 + y^2 + ax + by + c) + \mu(cx + dy + e) = 0;$$

• tutte le circonferenze del fascio hanno lo stesso asse radicale, quindi i punti dell'asse radicale hanno potenza costante rispetto alle circonferenze del fascio;
• se C e C' hanno a comune due punti distinti (che sono anche i punti a comune delle due circonferenze con il loro asse radicale), tutte le circonferenze del fascio passano per tali punti che si dicono punti base semplici;
• se C e C' sono tangenti in un punto (dove la tangente comune è l'asse radicale), tutte le circonferenze del fascio sono tangenti tra loro in quel punto che si dice punto base tangenziale;
• se C e C' sono esterne (in tal caso l'asse radicale è esterno alle due circonferenze), tutte le circonferenze del fascio sono esterne;
• i centri delle circonferenze del fascio stanno tutti sulla retta che congiunge i centri di C e C' detta retta dei centri del fascio.

Un fascio di circonferenze secanti in due punti

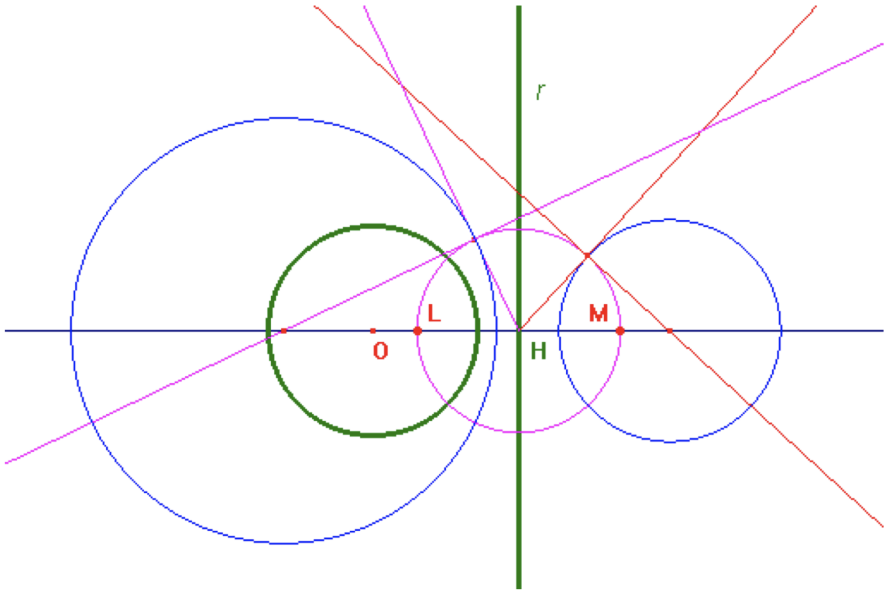
Qui di seguito abbiamo l'immagine di un fascio di circonferenze che si intersecano in due punti distinti. La retta blu è il luogo dei centri.



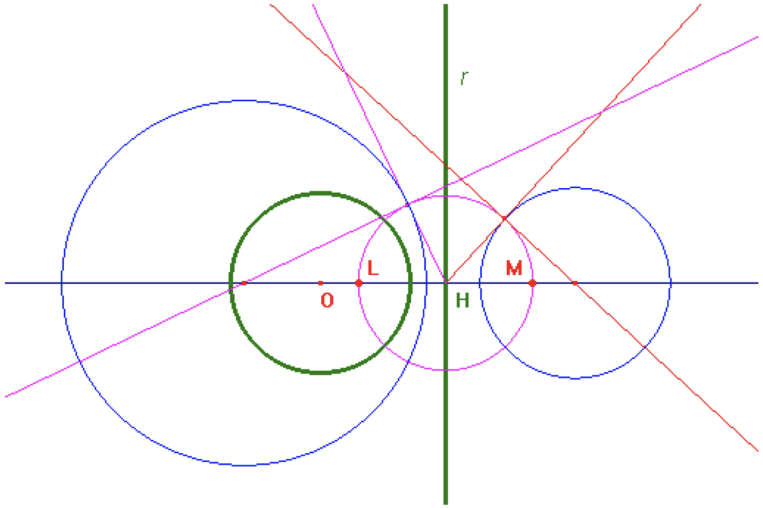
Fascio di circonferenze esterne

Ora consideriamo il caso in cui le due circonferenze C, C' (in blu in figura) siano esterne, sicchè il fascio da loro individuato non ha punti base. Il fascio è individuato anche da una delle sue circonferenze (in verde in figura) e dall'asse radicale r. Sia O il centro della circonferenza in questione e ne sia H la proiezione ortogonale sull'asse radicale r. Il punto H, in quanto appartiene all'asse radicale, ha potenza costante e positiva, chiamiamola a^2, con a positivo, rispetto alle circonferenze del fascio.

Consideriamo ora la circonferenza Γ di centro H e raggio a (in viola in figura). Essa interseca tutte le circonferenze del fascio nei punti di tangenza ad esse condotte da H. Quindi questa circonferenza è ortogonale a tutte le circonferenze del fascio. Il centro di una circonferenza γ del fascio è intersezione della retta OH con la tangente a Γ in uno dei due punti in cui Γ interseca γ.



Punti limite di un fascio di circonferenze esterne



In sostanza per costruire le circonferenze del fascio si può procedere così: data la circonferenza Γ di centro H e raggio a (in viola in figura), per ogni suo punto P si tracci la tangente a Γ, che incontrerà la retta OH in un punto che è centro di una circonferenza del fascio, univocamente determinata dal fatto di passare anche per P.

Da questo si deduce che il luogo dei centri delle circonferenze del fascio è la parte della retta OH non interna al segmento LM, dove i punti L e M sono le intersezioni di OH con Γ, cioè hanno da H distanza a. I punti L e M si dicono punti limite del fascio.

Inversione circolare nei punti limite

Non sarebbe difficile dimostrare geometricamente che se facciamo una inversione circolare di centro un punto limite L o M, il fascio in questione si trasforma in un fascio di circonferenze concentriche.

Tuttavia per fare ciò occorrono alcune nozioni di geometria complessa che non sono note in una classe di secondaria superiore. Allora si potrà procedere analiticamente fissando un sistema di assi cartesiani ortogonali in cui ad esempio L sia l'origine, il punto H abbia coordinate $(a, 0)$, sicchè Γ abbia equazione

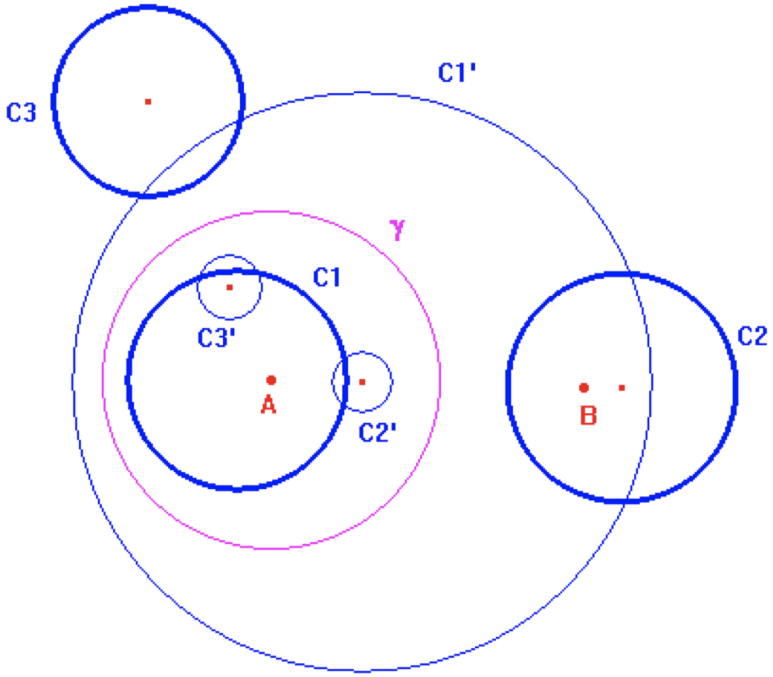
$$x^2 + y^2 - 2ax = 0.$$

Si potrà poi effettuare una inversione circolare rispetto ad una qualunque circonferenza di centro L, ad esempio rispetto alla circonferenza $x^2 + y^2 = 1$, e verificare che le circonferenze del fascio sono mandate in circonferenze che hanno tutte lo stesso centro.

Il caso (c, c, c) con inversione circolare

Torniamo ora al problema di Apollonio. Stiamo esaminando il caso in cui le tre circonferenze non abbiano a due a due punti a comune e a due a due non siano concentriche. Allora ci si può ridurre al caso (che poi esamineremo) in cui due delle circonferenze sono concentriche mediante una inversione di raggio qualunque che abbia centro uno dei due punti limite del fascio individuato da due delle tre circonferenze date.

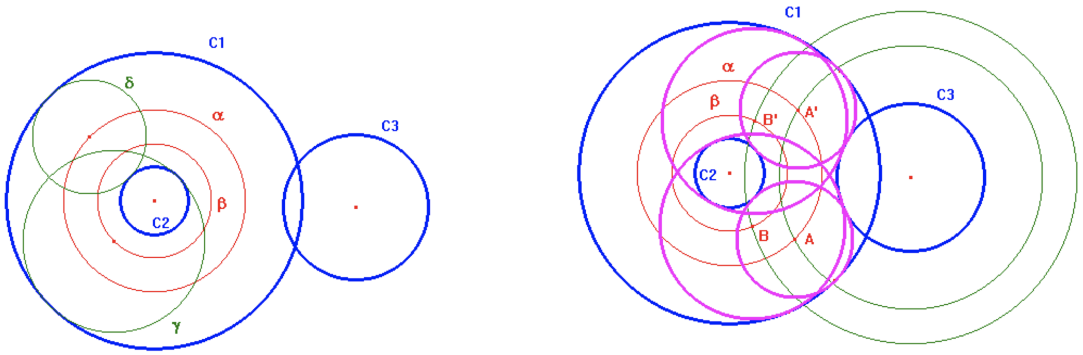
Nella figura qui sotto si vedono le tre circonferenze date, C_1, C_2, C_3, i punti limite A e B del fascio individuato dalle circonferenze C_1 e C_2, la circonferenza di inversione γ (viola in figura), e le tre circonferenze C_1', C_2', C_3' inverse delle tre circonferenze date. Si è ricondotti al caso di tre circonferenze di cui due concentriche.



Il caso (c, c, c): due circonferenze concentriche

Consideriamo infine il caso (c, c, c) in cui solo due delle tre circonferenze siano concentriche (se lo fossero tutte e tre non ci sarebbero soluzioni). La terza circonferenza incontra, come nella figura più sotto, una delle due: perché il problema abbia soluzioni la terza circonferenza deve intersecare la corona circolare limitata dalle prime due.

Nella figura a sinistra C_1, C_2, C_3 sono le tre circonferenze date, di cui C_1 e C_2 concentriche di centro O e raggi r_1, r_2, con $r_1 > r_2$, e C_3 ha raggio r_3. Le circonferenze cercate sono del tipo di γ e δ, cioè con diametro $r_1 + r_2$ e $r_1 - r_2$ e con centro sulle circonferenze α e β di centro anche esse in O e raggi rispettivamente $\frac{r_1+r_2}{2}$ e $\frac{r_1-r_2}{2}$.



Tra tutte queste circonferenze quelle tangenti anche a C_3 si trovano con una costruzione elementare, come si può vedere nella figura a sinistra. Basta costruire le circonferenze concentriche a C_3 e di raggi $r_1 + r_2 + r_3$ e $r_3 + r_1 - r_2$ e considerare le loro intersezioni A, A', B, B', con le circonferenze α e β: questi sono i centri delle circonferenze cercate.

Riassunto

Il numero massimo di soluzioni al Problema di Apollonio nei vari casi considerati è mostrato nella tabella che segue. Come vedremo, non è un caso che il numero massimo di soluzioni sia 8.

Tipo di oggetti	Numero massimo di soluzioni
Tre cerchi	*Otto soluzioni*
Due cerchi e una retta	*Otto soluzioni*
Due cerchi e un punto	*Quattro soluzioni*
Un cerchio e due rette	*Otto soluzioni*
Un cerchio, una retta e una punto	*Quattro soluzioni*
Un cerchio e due punti	*Due soluzioni*
Tre rette	*Quattro soluzioni*
Due rette e un punto	*Due soluzioni*
Una retta e due punti	*Due soluzioni*
Tre punti	*Una soluzione*

L'approccio algebrico cartesiano (I)

Il problema di Apollonio diventa semplicissimo se lo guardiamo da un punto di vista algebrico, introducendo nel piano coordinate cartesiane ortogonali.

Trattiamo, a titolo di esempio, il caso generale (c, c, c). Qui abbiamo le tre circonferenze C_1, C_2, C_3 di raggi rispettivi r_1, r_2, r_3 e di centri rispettivi O_1, O_2, O_3. Supponiamo che i centri abbiano coordinate $O_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2, 3$.

Noi cerchiamo centro $O = (x, y)$ e raggio r incogniti di circonferenze C tangenti a C_1, C_2, C_3. La condizione è che la distanza tra O e O_i sia pari a $r \pm r_i$, per $i = 1, 2, 3$, dove vale il segno più o meno a seconda che la tangenza sia esterna o interna. Questo conduce alle tre equazioni

$$(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 - (r \pm r_i)^2 = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

Sottraiamo dalla equazione relativa a $i = 1$ quella relativa a $i = 2$. I termini di secondo grado in x, y, r si elidono e otteniamo una relazione del tipo

$$ax + by + cr = d$$

dove a, b, c, d dipendono unicamente da $x_1, y_1, x_2, y_2, r_1, r_2$. Similmente, sottraendo dalla equazione relativa a $i = 1$ quella relativa a $i = 3$, otteniamo una relazione del tipo

$$a'x + b'y + c'r = d'$$

dove a', b', c', d' dipendono da $x_1, y_1, x_3, y_3, r_1, r_3$.

L'approccio algebrico cartesiano (II)

Ora possiamo risolvere il sistema

$$ax + by + cr = d, \quad a'x + b'y + c'r = d'$$

in x e y, che troveremo in funzione di r.

Sostituendo questi valori di x e y nella equazione

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 - (r \pm r_1)^2 = 0,$$

si ottiene un'equazione di secondo grado in r che si risolve con l'estrazione di una sola radice quadrata (e con operazioni razionali). Questa equazione ha dunque in generale al massimo due soluzioni reali (di cui a noi interessano quelle positive).

Sostituendo tali soluzioni nelle due equazioni a inizio pagina e risolvendo in x, y, si ricavano le relative coordinate del centro della circonferenza.

Quante sono le soluzioni?

Volendo contare da questo punto di vista quante soluzioni troviamo, notiamo che

$$(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 - (r \pm r_i)^2 = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

dà luogo ad otto sistemi di equazioni, per la scelta dei segni più e meno da dare ai raggi r_1, r_2, r_3.

Per ognuno di tali sistemi, col procedimento che abbiamo delineato, otterremo al massimo due possibili soluzioni per r e per le coordinate del centro. Quindi apparentemente otterremmo al massimo 16 soluzioni.

Tuttavia, a parte il fatto che per non tutte queste r potrebbe essere reale, osserviamo che se r è una soluzione, ovviamente anche $-r$ lo è. Quindi di soluzioni con r positivo (che è quello che cerchiamo poiché r è il raggio della circonferenza voluta) ve ne sono al più otto.

Inoltre, dal fatto che le soluzioni si trovano con operazioni razionali e con una sola estrazione di radice, troviamo conferma della circostanza che le soluzioni si possono determinare tutte col solo uso di riga e compasso.

Il metodo algebrico tuttavia non ci fornisce una costruzione geometrica diretta delle soluzioni del Problema di Apollonio.

Un po' di storia: Viète e van Roomen

Il primo a riscoprire il Problema di Apollonio in epoca moderna è stato Françoise Viète (1540–1603) che pose il problema ai matematici belgi. Gli rispose nel 1596 Adriaan van Roomen (1561–1615) che fornì una soluzione completa che tuttavia aprì tra i due una polemica di cui parlerò. La contesa probabilmente aveva anche una motivazione politico–religiosa, in quanto Viète era vicino agli ambienti ugonotti mentre van Roomen era legato ai gesuiti.

La soluzione proposta da van Roomen è molto naturale ed interessante, da vari punti di vista, incluso quello didattico.

Van Roomen determina per prima cosa il luogo dei centri delle circonferenze tangenti a due circonferenze date. La condizione di tangenza tra due circonferenze di centri rispettivamente O e C e raggi r e R è che $(OC) = r \pm R$, con i segni più o meno a seconda che la tangenza sia esterna o interna.

Quindi una circonferenza di centro C e raggio R sarà tangente a due circonferenze date c e d di centri O e O' e raggi r e r' rispettivamente, se e solo se

$$(CO) = r \pm R \quad \text{e} \quad (CO') = r' \pm R.$$

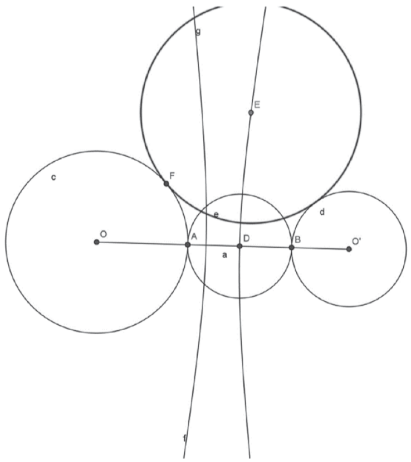
Si hanno così quattro casi, a seconda della scelta dei segni.

Esaminiamo ad esempio il caso in cui scegliamo entrambi i segni più (tangenza esterna per ambo le circonferenze). Allora avremo

$$(CO) - (CO') = r - r'$$

dove supponiamo $r > r'$. Allora il luogo dei punti C è una iperbole di fuochi i due punti O e O'. Più precisamente si tratta di un ramo di una iperbole.

La soluzione di van Roomen



Nella figura viene disegnata l'iperbole, di cui va scelto un ramo, su cui si trovano i centri delle circonferenze desiderate (qui ne sono disegnate due di centri D ed E).

Il ramo di iperbole si determina immediatamente in quanto ne sono noti i fuochi O e O' e un punto, precisamente il punto medio del segmento AB, dove A e B sono i punti della congiungente i raggi O e O' che sono tra O e O' e tagliati su tale congiungente dalle circonferenze di partenza c e d.

Se abbiamo tre circonferenze C_1, C_2, C_3, avremo un ramo di iperbole relativo alle circonferenze C_1 e C_2 and un ramo di iperbole relativo a C_1 e C_3. I due rami di iperbole si intersecano in al più due punti, che danno i centri di due delle circonferenze desiderate.

Se poi si scelgono diversamente i segni, si hanno altre tre possibilità e per ciascuna di esse due punti al più e quindi in totale abbiamo al più otto soluzioni, che possiamo costruire col metodo suddetto.

Epigoni di van Roomen

L'approccio di van Roomen ha avuto alcuni notevoli epigoni, tra cui Evangelista Torricelli (1608–1647) e Leonhard Euler (1707–1783).

Un altro importante epigono di van Roomen è stato Isaac Newton (1643–1727) nei suoi "Principia Mathematica". Anche Newton usa il metodo delle iperboli che egli però notevolmente semplifica.

Il problema si riconduce al seguente: dato un triangolo ABC, determinare un punto Z di cui siano date le differenze delle distanze dai vertici. Ciò deriva infatti dalle relazioni di tangenza della circonferenza di raggio r e centro Z alle tre circonferenze date di centri A, B, C e raggi rispettivi r_1, r_2, r_3.

Le relazioni sono ad esempio

$$(AZ) = r + r_1, \quad (BZ) = r + r_2, \quad (CZ) = r + r_3$$

da cui si ottiene

$$(AZ) - (BZ) = r_1 - r_2, \quad (BZ) - (CZ) = r_2 - r_3, \quad (AZ) - (CZ) = r_1 - r_3.$$

e Z si trova intersecando due iperboli. Tuttavia Newton procede in modo un po' diverso, determinando Z con riga e compasso come intersezione di due opportune rette che ivi si intersecano.

La ingegnosissima costruzione di Newton è anche molto utile. Essa infatti è alla base del funzionamento dei moderni GPS, che determinano la posizione di un punto dalla sua distanza da tre punti dati.

L'obiezione di Viète

Nel suo opuscolo "Apollonius Gallus" Viète contesta la soluzione di van Roomen, in quanto essa non è ottenuta mediante il solo uso di riga e compasso ma dalla intersezione di curve del secondo grado.

Viète propone un diverso approccio, che risolva il problema con riga e compasso. Viète riduce ogni problema di tipo (a, b, c) in cui appaia una circonferenza in uno più semplice in cui la circonferenza in questione sia sostituita da un punto, il suo centro.

In linea di massima, l'idea non è molto diversa da quella della dilatazione parallela, che abbiamo già vista.

La soluzione di Viète

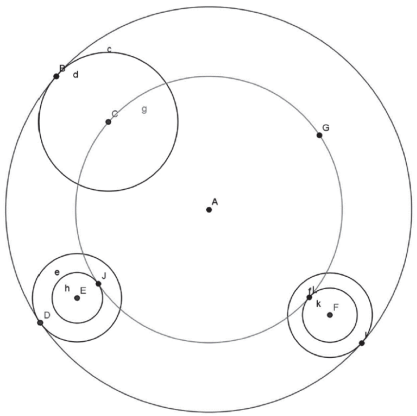
Mostriamo come Viète passi dal caso (c, c, c) a quello (p, c, c). In partenza abbiamo le tre circonferenze c, e, f di centri C, E, F e raggi r_1, r_2, r_3 rispettivamente. Il problema sarà risolto se determiniamo il centro A della circonferenza voluta, che avrà raggio r. Tale centro deve soddisfare le relazioni (ci riferiamo alla situazione in figura)

$$(AC) + r_1 = r, \quad (AE) + r_2 = r, \quad (AF) + r_3 = r,$$

da cui si trae

$$(AC) = (AE) - (r_1 - r_2) = (AF) - (r_1 - r_3).$$

Pertanto il centro A cercato è lo stesso della circonferenza g di raggio AC, quindi passante per C, tangente alle circonferenze di centri E ed F e raggi rispettivi $r_1 - r_2$ e $r_1 - r_3$. Quindi abbiamo ricondotto il problema (c, c, c) a quello (p, c, c).



Viète passa poi a ridurre similmente il caso (p, c, c) a quello (p, p, c) e quest'ultimo al caso (p, p, p), che è banale.

L'approccio di Decartes

L'approccio algebrico che abbiamo già descritto è sostanzialmente dovuto a René Descartes (1596–1650).

Decartes propone, per corrispondenza, nel 1643 il Problema di Apollonio alla principessa Elisabetta di Boemia, sua allieva, pensando, in un primo momento, che si tratti di un problema molto facile da risolvere per via algebrica.

Si rese però subito conto che si trattava invece di un problema alquanto difficile per cui, in varie epistole successive dirette alla stessa principessa, ritorna più volte sulla questione cercando di spiegarle come ottenere correttamente una soluzione.

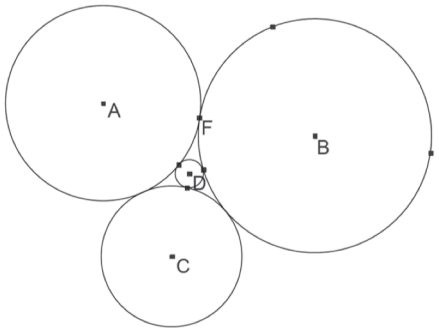
Il punto di vista di Descartes è quello di impostare bene il problema dal punto di vista algebrico, usando le coordinate, onde poter stabilire se esso si possa risolvere con riga e compasso.

Decartes è meno interessato alla determinazione esplicita della costruzione geometrica che risolva il problema.

Il teorema di Decartes

Decartes considera in particolare il caso di tre circonferenze, di raggi a, b, c e centri A, B, C rispettivamente, tangenti esternamente ciascuna alle altre due. Se x è il raggio della circonferenza, di centro D tangente esternamente alle altre tre, Decartes prova (anche se il suo argomento non è del tutto esatto) che vale la elegante formula

$$2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{x^2}\right)=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{x}\right)^2.$$



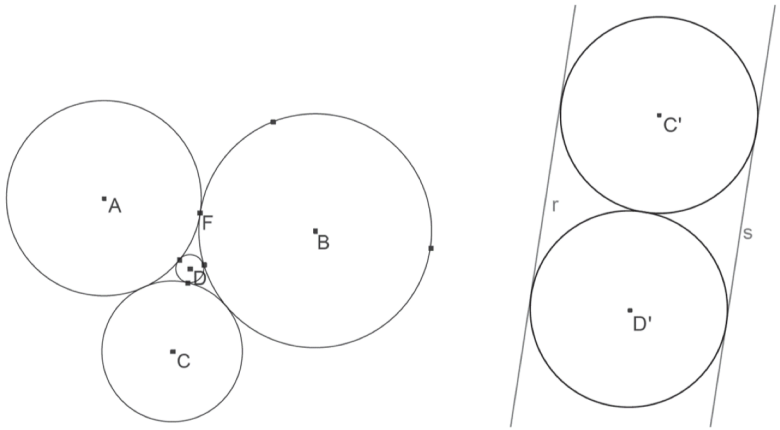
L'inverso del raggio di una circonferenza si chiama curvatura. Quindi la formula di Decartes si può leggere dicendo che se abbiamo quattro circonferenze ciascuna tangente esternamente alle altre tre, e se le loro curvature sono c_1, c_2, c_3, c_4, abbiamo la relazione

$$2(c_1^2+c_2^2+c_3^2+c_4^2)=(c_1+c_2+c_3+c_4)^2.$$

Questa formula mostra un'elegante simmetria che apparentemente non è riscontrabile nella figura che precede che mostra le quattro circonferenze mutuamente tangenti.

La configurazione di Decartes dopo un'inversione circolare

All'eleganza della formula di Decartes fa riscontro l'eleganza della configurazione una volta che si effettui una appropriata inversione circolare. Infatti, operiamo una inversione circolare di centro il punto F di tangenza di due circonferenze a e b di partenza (cfr. figura a sinistra).



Allora a e b vengono trasformate in due rette parallele r ed s, mentre la circonferenza c viene trasformata in una circonferenza, di centro C' equidistante da r e da s, tangente sia a r che a s. La quarta circonferenza tangente alle tre date, è quella di centro D' (cfr. figura a destra) ottenibile per una semplice traslazione parallela a r ed s di quella di centro C'.

La dimostrazione originaria di Decartes del suo teorema è incompleta e alquanto intricata. Ve ne è una diversa, abbastanza semplice e concettualmente naturale, pur se richiede qualche calcolo, anche questa basata sulla inversione circolare. Essa è dovuta al matematico inglese Daniel Pedoe (1910–1998).

Sulle tracce di Decartes

Il Teorema di Descartes pare caduto nell'oblio fino al 1826 quando Jacob Steiner (1796–1863), senza sapere del Teorema di Decartes, trovò lo stesso risultato e ne diede una completa dimostrazione.

Un'altra riscoperta indipendente avvenne pochi anni dopo, nel 1842, da parte di Philipp Beecroft. Successivamente il teorema cadde di nuovo nell'oblio per quasi un secolo finché nel 1936 Sir Frederick Soddy (1877–1956), premio Nobel per la chimica nel 1921 per la scoperta degli isotopi, pubblicò sulla rivista Nature una poesia dal titolo "The kiss precise" nella quale espose (senza dimostrazione) il teorema in questione, suggerendo una estensione al caso tridimensionale.

L'anno seguente Thorold Gossett (1869–1962) aggiunge un'altra strofa alla poesia estendendo il teorema in dimensione qualunque, cioè a una configurazione di Decartes di $n+2$ sfere di dimensione $n-1$ nello spazio euclideo a n dimensioni, che sono mutuamente esternamente tangenti. Il risultato è che se $c_1, \ldots, c_{n+2}$ sono le curvature delle sfere in questione, si ha la relazione

$$n\Big(\sum_{i=1}^{n+2} c_i^2\Big) = \Big(\sum_{i=1}^{n+2} c_i\Big)^2.$$

Questo è ora noto come Teorema di Soddy–Gossett. Il caso $n=3$ di questo risultato era già apparso nel 1886 in un lavoro di R. Lachlan.

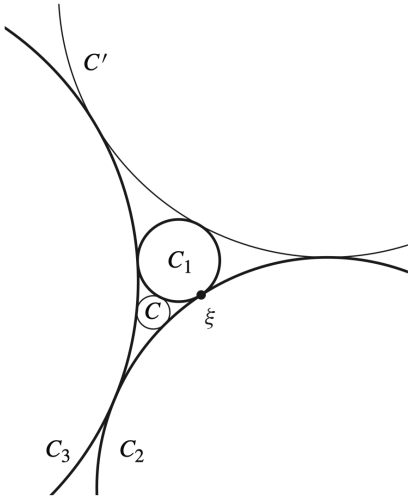
Secondo Pedoe il primo ad attribuire il risultato (bidimensionale) a Decartes è stato il matematico svizzero Alfred Aeppli (1894–1971).

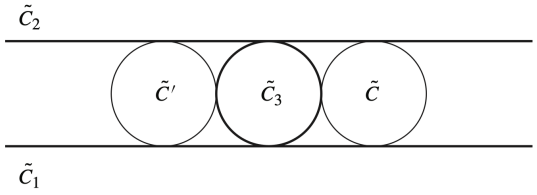
Il Fregio di Apollonio (I)

Consideriamo tre circonferenze C_1, C_2, C_3 che sono mutuamente tangenti. Un caso particolare del Problema di Apollonio è determinare le circonferenze tangenti a C_1, C_2, C_3.

Si vede subito che ve ne sono esattamente due. Questo si prova applicando una inversione circolare. Riferendoci alla figura di sotto, applichiamo una inversione circolare di centro il punto ξ di tangenza di C_1 e C_2. Allora C_1 e C_2 vengono trasformate in due rette parallele $\tilde{C}_1$ e $\tilde{C}_2$, mentre C_3 viene mutata in una circonferenza $\tilde{C}_3$ tangente alle due rette $\tilde{C}_1$ e $\tilde{C}_2$.

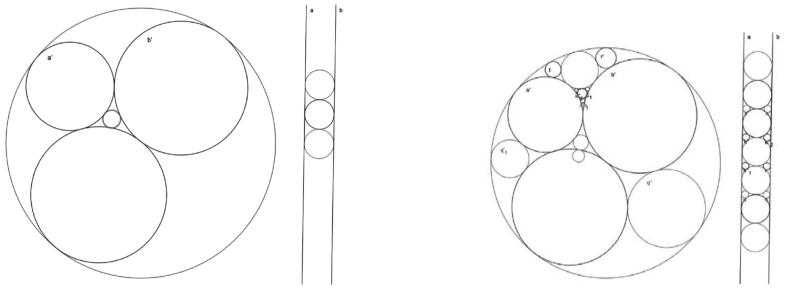
Vi sono allora esattamente due circonferenze $\tilde{C}$ e $\tilde{C}'$ che sono tangenti a $\tilde{C}_1$, $\tilde{C}_2$ e $\tilde{C}_3$, come mostrato in figura. Facendo l'inversione opposta si ottiene quanto asserito.





Il Fregio di Apollonio (II)

Il dato di tre circonferenze tra loro tangenti determina una configurazione di cinque circonferenze, di cui due tangenti alle tre date, come nella figura a sinistra che segue, in cui è indicata anche una trasformata per inversione circolare della configurazione data.



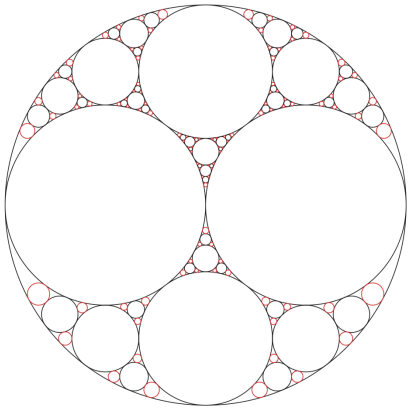
La regione esterna alle quattro circonferenze interne, ed interna alla circonferenza esterna si compone di sei regioni, limitate da tre circonferenze tra loro tangenti. In ognuna di tali regioni si potrà inscrivere una nuova circonferenza tangente alle tre date.

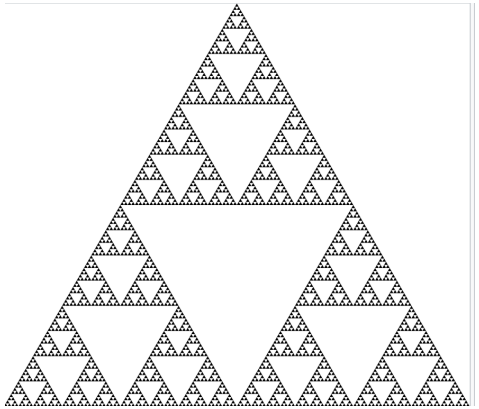
Questo procedimento si può ripetere indefinitamente, come si vede nella figura di sopra a destra, che mostra sul lato sinistro come le varie circonferenze si dispongano nella configurazione di partenza, sul lato destro la controparte di questa disposizione nella figura ottenuta per inversione circolare in un punto di tangenza tra due delle tre circonferenze di partenza esternamente tangenti.

La configurazione apparentemente disordinata che appare nella figura a sinistra risponde ad una configurazione molto simmetrica nella figura inversa a destra.

Fregio di Apollonio (III)

La configurazione finale, che prende il nome di Fregio di Apollonio (Apollonian Gasket in inglese) o Impacchettamento di Apollonio (Apollonian Packing in inglese), è impossibile da disegnare, in quanto è frutto di un processo infinito, ma è ben illustrata dalla figura seguente a sinistra





Se da tutte le circonferenze della configurazione togliamo l'interno, otteniamo un insieme frattale, il Frattale di Apollonio, che è per certi versi analogo al Triangolo di Sierpinski (figura di sopra a destra) ma di questo più complicato.

Alcune proprietà del Frattale di Apollonio non sono ancora note.

Ricordo che i frattali, intuitivamente, sono figure geometriche caratterizzate dal ripetersi all'infinito di uno stesso motivo su scala sempre più ridotta. I frattali in natura si presentano con grande frequenza. Dal punto di vista matematico essi sono stati introdotti, e per la prima volta studiati, negli anni 1970, dal matematico franco–polacco Benoit Mandelbrot (1924–2010).

Fregio di Apollonio Intero

Una proprietà notevole e sorprendente del Fregio di Apollonio, scoperta ancora da Soddy nel 1937, è la seguente. Consideriamo tre circonferenze C_1, C_2, C_3 esternamente tangenti tra loro e di curvature c_1, c_2, c_3. Siano C, C' le due circonferenze tangenti alle tre date, con curvature c_4 e c_4'. Dal Teorema di Decartes segue subito che

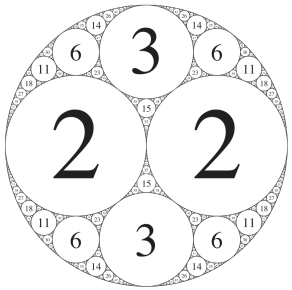
$$(*) \qquad c_4 + c_4' = 2(c_1 + c_2 + c_3), \quad c_4, c_4' = c_1 + c_2 + c_3 \pm \sqrt{c_1c_2 + c_1c_3 + c_2c_3}.$$

Supponiamo ora che c_1, c_2, c_3 siano interi e che anche $\sqrt{c_1c_2 + c_1c_3 + c_2c_3}$ sia un intero, sicchè c_4, c_4' sono pure interi.

Se partiamo dalle circonferenze C_1, C_2, C_3, C_4 di curvature c_1, c_2, c_3, c_4, troviamo una quinta circonferenza C_5 tangente, per esempio, a C_1, C_2, C_4. La curvatura c_5 di C_5 è soluzione di una equazione di secondo grado di cui una soluzione è la curvatura c_3 di C_3.

Quindi nel trovare c_5 noi non dobbiamo estrarre radici quadrate, ma adoperare l'analogo della prima equazione di (*), e pertanto c_5 risulterà anch'esso intero.

Reiterando questo ragionamento vediamo che se c_1, c_2, c_3, c_4 sono tutti interi, allora tutte le circonferenze che appaiono nel Fregio di Apollonio hanno curvatura intera. Si parla allora di Fregio di Apollonio Intero.



L'hexlet di Soddy

Problemi analoghi si possono porre in più dimensioni.

Ad esempio lo stesso Soddy ha considerato nel 1937 la configurazione costituita da una sfera che ha al suo interno due altre sfere tangenti alla prima e tangenti tra loro. Soddy pone il problema di realizzare una successione di sfere ciascuna delle quali è tangente alla precedente e alla successiva ciclicamente, e alle tre di partenza.

Soddy prova (facendone oggetto come al solito di una poesia) che esiste una successione finita, formata da esattamente sei sfere (indipendentemente dalla dimensione e disposizione delle tre sfere di partenza) che si chiude in modo esatto, ossia l'ultima sfera è tangente e non si sovrappone alla prima.

Questa configurazione fu chiamata hexlet da Soddy, che provò anche altre sue eleganti proprietà: ad esempio i centri delle sei sfere stanno su una ellissi e se $c_1, \ldots, c_6$ sono le loro curvature in successione, si ha

$$c_1 + c_4 = c_2 + c_5 = c_3 + c_6.$$

La dimostrazione di Morley

Una dimostrazione dell'esistenza dell'hexlet con l'inversione sferica fu prodotta da Frank Morley (1860–1937).

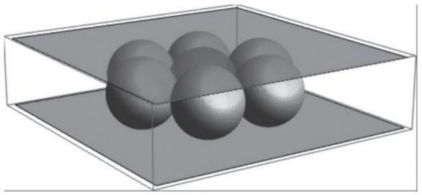
Se facciamo, una inversione di centro uno dei punti di tangenza delle tre sfere di partenza, la configurazione iniziale, qualunque essa sia, si trasforma in una coppia di piani paralleli π_1 e π_2 più una sfera S di diametro pari alla distanza tra i due piani, tangente ad entrambi.

Allora la risoluzione del problema di Soddy è fornita da una successione di sfere, delle stesse dimensioni della sfera S, tutte tangenti ad essa e ciclicamente tra loro, e tangenti a due piani π_1 e π_2.

Il problema è allora equivalente a questo: poggiamo su un piano una sfera e cerchiamo quante sfere, uguali a quella data, possiamo porre accanto ad essa, in modo che siano tutte tangenti alla sfera data e ciclicamente tra loro.

Sperimentalmente (lavorando ad esempio con delle biglie) si vedrà che il problema è risolto esattamente da sei sfere la cui successione si chiude perfettamente. Peraltro non è difficile verificare la proprietà algebricamente.

Le seguenti figure illustrano il problema di Soddy e la sua soluzione.



Conclusioni

Concludo aggiungendo che molti brillanti lavori sono stati dedicati a questi argomenti dal geometra inglese Harold Coxeter (1907–2003), che ne ha posto in evidenza inattese relazioni con lo studio di politopi in spazi di dimensione superiore.

Menziono ancora uno sviluppo teorico molto importante, dovuto alla medaglia Fields William Thurston (1946–2012), che ha indicato il nesso tra le questioni che abbiamo qui trattato con raffinati problemi di topologia algebrica e la teoria delle funzioni analitiche discrete.

Abbiamo dunque visto come un problema classico, risalente alla geometria greca, si possa affrontare in vari modi, anche elementari, che ne mettono in luce interessanti aspetti geometrici e algebrici.

Il problema di Apollonio è molto ricco di una storia degna di essere studiata, ed apre la strada anche a moderni sviluppi della matematica.

Sicuramente è degno di farne oggetto di lavoro laboratoriale in classe, coinvolgendo gli studenti nello studio di tecniche e idee che non fanno parte del curriculum usuale.