Perché le note sono 7 o, meglio, perché i semitoni sono 12

Luca Biasco

Università Roma Tre

Seminari PLS, La Sapienza, 5 marzo 2021

Bibliografia:

1) Il bel sito "Fisica Onde Musica"

http://fisicaondemusica.unimore.it

2) Il bel libro di Dave Benson *Music: A Mathematical Offering*

https://homepages.abdn.ac.uk/d.j.benson/pages/html/maths-music.html

3) www.wikipedia.it

Due intervalli sono giudicati uguali se è identico il rapporto (e non la differenza) delle frequenze dei suoni dell'intervallo

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{f_3}{f_4}$$

Tra gli intervalli particolarmente consonanti

ottava in cui il rapporto delle frequenze è pari $\frac{2}{1}$

la quinta giusta in cui il rapporto delle frequenze è pari $\frac{3}{2}$

la quarta giusta per la quale il rapporto diventa $\frac{4}{3} = \frac{2}{3}\frac{2}{1}$.

Proprio perchÃ© nella determinazione dell'ampiezza dell'intervallo gioca un ruolo fondamentale il rapporto, e non la differenza, delle frequenze dei suoni che lo costituiscono, è possibile adottare una scala logaritmica. Essa si basa sulla divisione dell'ottava in 1200 intervalli uguali, detti cent.

$$(1 \text{ cent})^{1200} = 1 \text{ ottava} = 2$$

ovvero

$$1 \text{ cent} = \sqrt[1200]{2} \approx 1,0005$$

Scala Pitagorica

1) Il meccanismo generativo della scala pitagorica è molto semplice: essa si può ottenere partendo da due soli rapporti fondamentali: 2:1, che rappresenta l'intervallo di ottava, e 3:2 che rappresenta l'intervallo di quinta giusta (ascendente e, 2:3, discendente).

2) Si sceglie una nota di riferimento, per esempio Do e si iniziano a generare intervalli di quinta ascendenti (o discendenti) moltiplicando ripetutamente la frequenza di partenza per 3/2 (o 2/3).

3) Già alla seconda moltiplicazione, tale procedura genera frequenze che "escono" dall'ottava che contiene la nota di riferimento avendo un rapporto con la frequenza di riferimento superiore a 2. Per riportare l'insieme di tali frequenze nell'ambito dell'ottava di partenza si divide la frequenza così ottenuta per 2^n dove n è il numero di ottave che si sono "percorse" dalla nota di partenza a quella di arrivo.

Ad esempio partendo dalla nota Do otteniamo

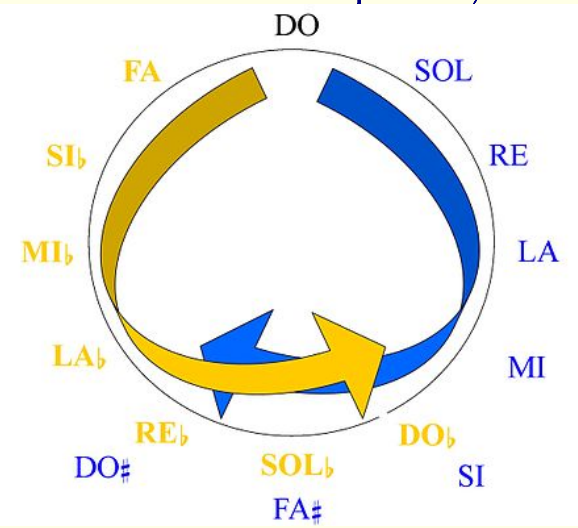
regola generativa (ascendente)	...	$\frac{3}{2}$	$\left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{3}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{3}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\left(\frac{3}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\left(\frac{3}{2}\right)^6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3$	...
rapporto tra le frequenze	1:1	3:2	9:8	27:16	81:64	243:128	729:512	...
nota	Do	Sol	Re	La	Mi	Si	Fa #	...
intervallo	...	V	II M	VI M	III M	VII M	IV+	...

regola generativa (discendente)	...	$\frac{2}{3} \cdot 2$	$\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot 2^2$	$\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot 2^2$	$\left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot 2^3$	$\left(\frac{2}{3}\right)^5 \cdot 2^3$	$\left(\frac{2}{3}\right)^6 \cdot 2^4$	...
rapporto tra le frequenze	1:1	4:3	16:9	32:27	128:81	256:243	1024:729	...
nota	Do	Fa	Si ♭	Mi ♭	La ♭	Re ♭	Sol ♭	...
intervallo	Unisono	IV	VII m	III m	VI m	II m	V-	...

Complessivamente otteniamo

rapporto	...	1024:729	256:243	128:81	32:27	16:9	4:3	1:1	3:2	9:8	27:16	81:64	243:128	729:512	2187:2048	6561:4096	...
nota	...	Sol ♭	Re ♭	La ♭	Mi ♭	Si ♭	Fa	Do	Sol	Re	La	Mi	Si	Fa♯	Do♯	Sol♯	...
intervallo	...	V-	IIm	VIm	IIIm	VIIm	IV	Unisono	V	IIM	VIM	IIIM	VIIM	IV+	I+	V+	...

Cosa succede se continuiamo a moltiplicare la successione delle frequenze per 3/2, o 2/3? Ad un certo punto torneremo sulle stesse note come se stessimo percorrendo un circolo (i musicisti staranno certamente pensando al circolo delle quinte)?



Per esempio DO♯=RE♭? Sul pianoforte sono lo stesso tasto! E allora perché hanno un nome diverso? In effetti con questa costruzione

$$\text{frequenza del DO}\sharp = \frac{2187}{2048} \neq \frac{256}{243} = \text{frequenza del RE}\flat$$

Il cerchio non si chiude!

Se il cerchio si chiudesse dopo $n \in \mathbb{N}^+$ passi vorrebbe dire che esiste un $m \in \mathbb{N}^+$ tale che

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n = 2^m \qquad \Longrightarrow \qquad 3^n = 2^{m-n}$$

che è impossibile.
Sarebbe come dire che $\log 3 / \log 2$ è un numero razionale!

Potenzialmente il meccanismo generativo illustrato è in grado di dividere l'ottava in un numero infinito di parti, rendendo gli intervalli tra due note sempre più piccoli, addirittura al di là della soglia di discriminazione delle frequenze del nostro orecchio.

La scala diatonica pitagorica

La soluzione per la costruzione della scala consiste ovviamente nel troncare il circolo ad un certo punto. Una possibile scelta consiste nel considerare solo le 7 note centrali dell'ultima tabella (da Fa a Si). Tale scelta conduce alla scala diatonica.

nota	rapporto	frequenza (Hz)	cent
Do	1:1	261.6	0
Re	9:8	294.3	204
Mi	81:64	331.1	408
Fa	4:3	348.8	498
Sol	3:2	392.4	702
La	27:16	441.5	906
Si	243:128	496.7	1110
Do	2:1	523.2	1200

Vantaggi

1. contiene solo due tipi di intervalli: il tono pitagorico (es. Re-Mi pari a 9/8) e il semitono pitagorico, o limma, (es. Mi-Fa pari a 256/243)

2. Tutti gli intervalli di ottava e quinta contenuti nella scala (ad esempio la quinta Si-Fa$\sharp$ non è presente perché richiede una nota alterata) sono perfettamente consonanti perché coincidono con i rapporti semplici 3:2 e 2:1 della scala naturale. Ciò non deve sorprendere essendo l'intervallo di quinta il "seme" con cui è stata generata l'intera scala.

Svantaggi

1. gli intervalli di terza e sesta non sono consonanti. Inoltre essi sono espressi da rapporti ”scomodi” che coinvolgono numeri piuttosto grandi. Nella pratica musicale, anche per l’avvento della polifonia, si è andato affermando, per la sua maggiore consonanza, un intervallo di terza definito da un rapporto molto più semplice (5:4). La scelta di terze maggiormente consonanti condusse alla scala naturale.

2. come per ogni scala diatonica, il limitato numero di note offre una limitata gamma di possibilità melodiche.

Quest’ultimo svantaggio può essere superato aumentando il numero di note facenti parte della scala. Ovviamente le nuove note immesse, che arricchiscono di molto le possibilità melodiche, non devono compromettere i vantaggi della scala diatonica. Esse devono:

1. continuare a garantire la consonanza degli intervalli di ottava e di quinta;

2. rendere il più possibili uniformi i gradi consecutivi della scala;

3. essere in numero non eccessivo in modo da non avere frequenze troppo ravvicinate.

La scala cromatica pitagorica

Una possibile soluzione di compromesso si ottiene considerando le 12 note centrali (dal Mi♭ al Sol♯) elencate sopra. In altre parole si includono nella scala il Do♯, ma non Re♭, Fa♯ ma non Sol♭, Sol♯ ma non La♭, Si♭ ma non La♯, Mi♭ ma non Re♯.

Scala cromatica pitagorica			
nota	rapporto	frequenza (Hz)	cent
Do	1:1	261.6	0
Do♯	2187:2048	279.4	114
Re	9:8	294.3	204
Mi ♭	32:27	310.1	294
Mi	81:64	331.2	408
Fa	4:3	348.8	498
Fa♯	729:512	372.5	612
Sol	3:2	392.4	702
Sol♯	6561:4096	419.1	816
La	27:16	441.5	906
Si ♭	16:9	465.1	996
Si	243:128	496.7	1110
Do	2:1	523.3	1200

Vantaggi

1. tutte le quinte nella stessa scala sono intonate (tranne una);

2. le frequenze tra due gradi consecutivi non sono troppo ravvicinate: malgrado l'aumentato numero di note, l'intervallo di minima ampiezza è ancora il limma.

Svantaggi

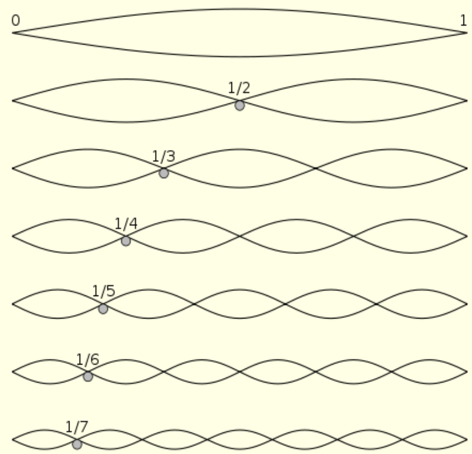
1. la quinta Sol$\sharp$-Mi$\flat$ è stonata (la quinta intonata sarebbe Sol$\sharp$-Re$\sharp$, ma il Re$\sharp$, come abbiamo detto, è stato escluso dalla scala);

2. la mancata consonanza della quinta Sol$\sharp$-Mi$\flat$ nella scala pitagorica di Do è solo un aspetto di un problema più generale: il problema del cambiamento di tonalità.
Se uno strumento è accordato secondo la scala pitagorica per suonare in una certa tonalità (ad es. DO), esso potrà essere scordato quando suonerà con la stessa scala in un'altra tonalità "lontana" dalla precedente;

3. gli intervalli di sesta e di terza continuano ad essere poco consonanti.

Gli armonici naturali

Sono una successione di suoni le cui frequenze sono multipli di una nota di base, chiamata fondamentale.
Corrispondono alle frequenze naturali delle armoniche di una corda vibrante.
Un suono prodotto da un corpo vibrante non è mai puro (ovvero senza multipli in frequenza della nota di base) ma è costituito da più suoni, che si differenziano fra loro in intensità (volume) e frequenza (tono, alto o basso).
Al suono fondamentale, quindi, se ne aggiungono altri: questi sono gli armonici, che hanno una importanza fondamentale sia nella determinazione del timbro di uno strumento che nella determinazione degli intervalli musicali.



Scala naturale

Inventata da Archita, e ripresa da Claudio Tolomeo (83-161 d.C.), trovò però applicazione pratica solo con la diffusione dell'opera di Gioseffo Zarlino (Le istitutioni harmoniche - 1558).

1. si sceglie una nota di riferimento e se ne moltiplica la frequenza per 2, 3, 4, ecc.:

2. per riportare le note così generate nell'ambito dell'ottava di partenza si divide la loro frequenza per 2^n dove n è il numero di ottave che si sono "percorse" dalla nota di

3. si eliminano poi gli eventuali "doppioni" ottenuti.

armonico n.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	...
rapporto	1:1	2:1	3:2	2:1	5:4	3:2	7:4	2:1	9:8	5:4	11:8	3:2	13:8	7:4	15:8	2:1	17:8	9:8	19:18	5:4	...
nota (appross.)	Do	Do	Sol	Do	Mi	Sol	Si ♭	Do	Re	Mi	Sol ♭	Sol	Lab	Si ♭	Si	Do	Do♯	Re	Re♯	Mi	...

Resta il problema di decidere quante note distinte includere nella scala. La tradizione impone il numero di 7 per la scala naturale diatonica, e 12 per quella cromatica.

Nota	rapporto	
	naturale	pitagorica
Do	1:1	
Re	9:8	
Mi	5:4	81:64
Fa	4:3	
Sol	3:2	
La	5:3	27:16
Si	15:8	243:128
Do	2:1	

1 Rispetto alla scala pitagorica gli intervalli di terza e di quarta sono generalmente percepiti come "più consonanti". Sono frazioni molto più "semplici".

2 Alcune quinte tra gradi della stessa scala sono "stonate": la quinta Re-La ha un rapporto di frequenze pari a 40:27.

3 La scala diatonica naturale contiene solo tre intervalli elementari tra i suoi gradi: il tono maggiore (es. Do-Re), il tono minore (es. Re-Mi), e il semitono diatonico (es. Mi-Fa). Da questo punto di vista la scala pitagorica è ancora più semplice perché si basa su due soli intervalli base.

Temperamento equabile

Tutti i problemi delle scale pitagoriche o naturali nascono dal non aver diviso l'ottava in "parti uguali": tale fatto rende le scale non invarianti per traslazione della tonica.
Malgrado l'apparente semplicità della soluzione che condurrà al temperamento equabile (cioè il dividere la scala in semitoni della stessa ampiezza), l'approdo a tale tipo di temperamento è un processo storicamente complesso, estremamente graduale e pieno di "ripensamenti".
L'esigenza di correggere le "disuniformità" delle scale naturali e pitagoriche generò lentamente:

1) la necessità dell'uso di scale temperate in cui le correzioni (temperamenti) introdotte erano le più varie e comunque molto meno radicali dell'adozione di un temperamento equabile "tout court". Il fatto è che il vantaggio introdotto dal temperamento equabile (cioè la possibilità di cambiare tonalità che tecnicamente si chiama "modulazione") diviene un valore solo con l'affermarsi dell'armonia tonale.
La modulazione permette di sfruttare i rapporti armonici tra gli accordi per produrre nuove combinazioni, e serve al compositore per arricchire la melodia, darle diversi colori e sfumature, esaltarne certe parti ecc.

Il temperamento equabile, ma anche i temperamenti meno radicali, al momento della disputa sulla loro adozione, venivano accusato:

1) dal punto di vista dei teorici:
di allontanarsi dalla semplicità dei rapporti di frequenza pitagorici (in effetti vedremo come, nel temperamento equabile, il rapporto che esprime il semitono temperato sia addirittura un numero irrazionale!);

2) dal punto di vista dei musicisti:
i) di andare a discapito dell'armonia, alterando la consonanza naturale degli intervalli di quinta, quarta e terza;
ii) di introdurre un'eccessiva meccanicità facendo perdere le coloriture particolari proprie di ciascuna tonalità.

Si deve al genio "strutturale" di Bach l'aver compreso che le possibilità della trasposizione da una tonalità all'altra permette di arricchire la musica, impreziosendola con elementi di ordine, simmetria e trasparenza formale.

La scala prodotta secondo il temperamento equabile si ottiene, ovviamente viste le premesse, dividendo l'ottava in n parti uguali; PoichÃ© l'ottava è rappresentata dal rapporto 2:1, e le frequenze si moltiplicano (non si sommano), l'intervallo più piccolo è quello che, moltiplicato per se stesso n volte (cioè elevato alla n) dà 2. Esso corrisponde al semitono temperato:

$$1 \text{ semitono} = \sqrt[n]{2}$$

Temperamento equabile				
nota	numero MIDI	rapporto	frequenza (Hz)	cent
Do_3	60	1	261.6	0
Do♯ o Re♭	61	$\sqrt[12]{2}$	277.2	100
Re	62	$\sqrt[12]{2^2}$	293.7	200
Re♯ o Mi♭	63	$\sqrt[12]{2^3}$	311.1	300
Mi	64	$\sqrt[12]{2^4}$	329.6	400
Fa	65	$\sqrt[12]{2^5}$	349.2	500
Fa♯ o Sol♭	66	$\sqrt[12]{2^6}$	370.0	600
Sol	67	$\sqrt[12]{2^7}$	392.0	700
Sol♯ o La♭	68	$\sqrt[12]{2^8}$	415.3	800
La	69	$\sqrt[12]{2^9}$	440.0	900
La♯ o Si♭	70	$\sqrt[12]{2^{10}}$	466.2	1000
Si	71	$\sqrt[12]{2^{11}}$	493.9	1100
Do_4	72	2	523.2	1200

Vantaggi

I vantaggi sono ovviamente legati ai motivi che hanno portato alla costruzione del temperamento equabile:

l'intonazione di un brano è indipendente dalla tonalità in cui esso è eseguito, cioè dalla nota che si sceglie come base della scala, quindi un brano può venire trasposto in altra tonalità senza dover riaccordare gli strumenti; Gli strumenti ad intonazione fissa suonano ugualmente bene in tutte le tonalità; le note enarmoniche vengono a coincidere (es. DO$\sharp$ e RE$\flat$) semplificando la costruzione degli strumenti musicali. Il tasto nero del pianoforte suona sia il DO$\sharp$ che il RE$\flat$.

Svantaggi

Il vantaggio precedente può essere paradossalmente rifrasato come svantaggio: gli strumenti ad intonazione fissa suonano ugualmente male in tutte le tonalità. Infatti, mentre nella scala naturale esistono sempre intervalli perfettamente consonanti, adottando il temperamento equabile questi intervalli non esistono, qualunque sia la tonalità in cui si suona. La tabella seguente riporta le correzioni rispetto agli intervalli perfettamente consonanti.

Nella seguente tabella invece della frequenza usiamo il suo inverso: la lunghezza della corda (supposta la lunghezza del DO di riferimento pari a 1).

Sono evidenziati in rosso gli scarti inferiori al 1%

Note	scala naturale	equabile 12 semitoni	scarto	equabile 13 semitoni	scarto
RE	$8/9 = 0,88\bar{8}$	$2^{-2/12} = 0,891$	0,002	$2^{-2/13} = 0,899$	0,01
MI	$4/5 = 0,8$	$2^{-4/12} = 0,794$	0,006	$2^{-4/13} = 0,808$	0,008
FA	$3/4 = 0,75$	$2^{-5/12} = 0,749$	0,001	$2^{-5/13} = 0,766$	0,016
SOL	$2/3 = 0,66\bar{6}$	$2^{-7/12} = 0,667$	0,001	$2^{-8/13} = 0,653$	0,012
LA	$3/5 = 0,6$	$2^{-9/12} = 0,595$	0,005	$2^{-9/13} = 0,619$	0,019
SI♭	$8/15 = 0,53\bar{3}$	$2^{-11/12} = 0,530$	0,003	$2^{-12/13} = 0,528$	0,005

Un po' di probabilità

Se si scelgono n numeri a caso in $[1/2, 1]$ la probabilità che (esattamente) $k \leq n$ cadano in un sottoinsieme $S \subseteq [1/2, 1]$ di misura relativa (ovvero rispetto all'intervallo [1/2,1]) $0 \leq p \leq 1$ è pari a

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

per il teorema delle prove ripetute.

Nel nostro caso possiamo scegliere S come l'unione dei 6 intorni delle frazioni $8/9$, $4/5$, $3/4$, $2/3$, $3/5$ e $8/15$ di raggio, diciamo, $0,01$ (scelta piuttosto arbitraria...), ovvero

$$\begin{aligned} S \quad = \quad & \left[\frac{8}{9} - \frac{1}{100}, \frac{8}{9} + \frac{1}{100}\right] \bigcup \left[\frac{4}{5} - \frac{1}{100}, \frac{4}{5} + \frac{1}{100}\right] \bigcup \left[\frac{3}{4} - \frac{1}{100}, \frac{3}{4} + \frac{1}{100}\right] \bigcup \\ & \left[\frac{2}{3} - \frac{1}{100}, \frac{2}{3} + \frac{1}{100}\right] \bigcup \left[\frac{3}{5} - \frac{1}{100}, \frac{3}{5} + \frac{1}{100}\right] \bigcup \left[\frac{8}{15} - \frac{1}{100}, \frac{8}{15} + \frac{1}{100}\right]. \end{aligned}$$

Quindi

$$p = \text{misura relativa di } S \text{ in } [1/2, 1] = 2 \cdot 6 \cdot \frac{2}{100} = \frac{6}{25}$$

(bisogna moltiplicare per 2 dato che [1/2,1] ha misura 1/2).

Assumendo che la prima nota DO sia fissata uguale a 1, rimangono da sistemare le altre $k = 6$ note. Quindi se dividiamo il nostro intervallo in $n+1 \geq 7$ semitoni, rimangono n punti di cui esattamente $k = 6$ vogliamo finiscano in S.

Non solo ma di questi 6 punti finiti in S, ognuno deve essere definito in uno intervallo diverso. La probabilità che questo accada è

$$\frac{5!}{6^5} \,.$$

Quindi la probabilità totale che scegliendo una scala di $n+1 \geq 7$ semitoni esattamente 6 di questi finiscano in S ed ognuno in un intervallo distinto di S è pari a

$$P_{n+1} = \binom{n}{6} p^6 (1-p)^{n-6} \;\cdot\; \frac{5!}{6^5} \,.$$

Per esempio

$$P_{10} \approx 1\times 10^{-4} \,, \quad P_{11} \approx 2\times 10^{-4} \,, \quad P_{12} \approx 3\times 10^{-4} \,, \quad P_{13} \approx 5\times 10^{-4} \,, \quad P_{14} \approx 7\times 10^{-4} \,,$$

sono probabilità molto basse

Il fatto che ESISTA un temperamento equabile ha del miracoloso!!!!!