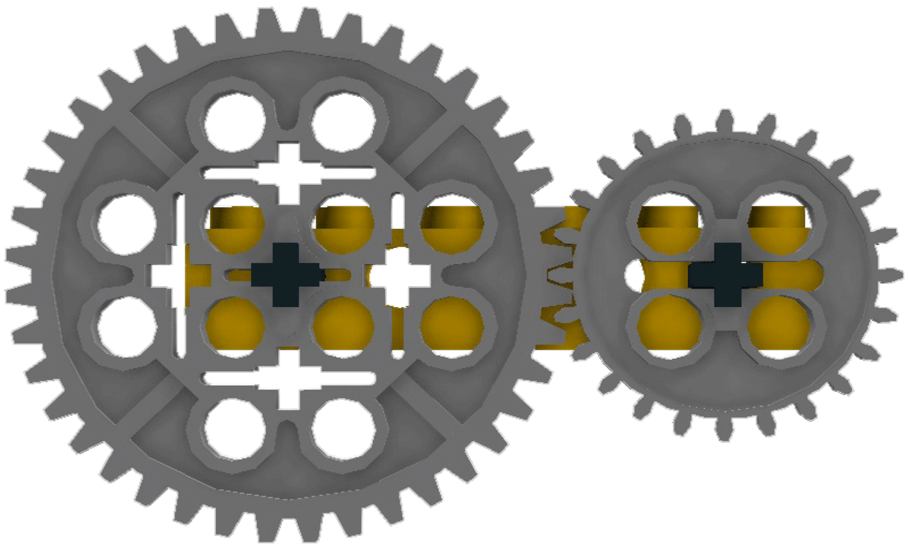
Frazioni e approssimazioni

Francesca Tovena

12 febbraio 2021

- Il materiale presentato riprende varie idee e osservazioni nate in collaborazione con Laura Lamberti

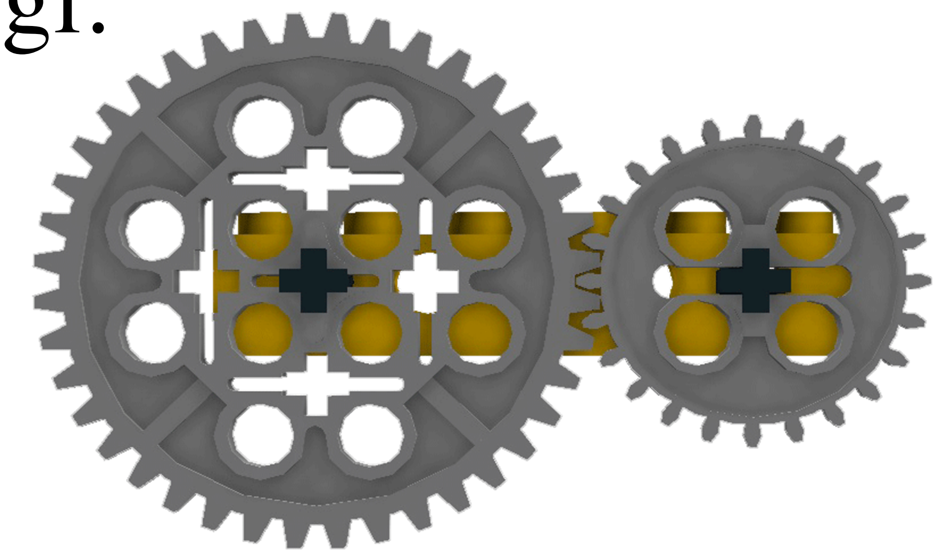
La trasmissione del moto rotatorio può essere realizzata tramite l'accoppiamento di ruote dentate. I denti permettono la trasmissione del moto sostanzialmente senza strisciamento.



Ruote dentate della collezione Lego

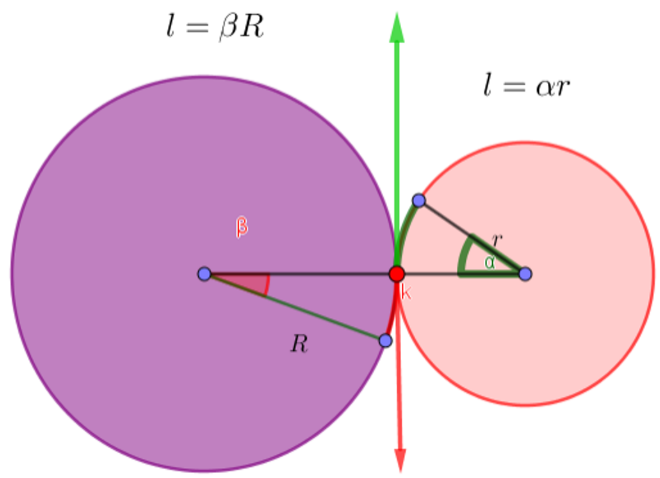
La ruota solidale con l'asse motore è chiamata **pignone**

In generale, il pignone è di piccole dimensioni e ha un numero di denti basso; la sua velocità di rotazione è quella dell'asse motore e tale velocità viene trasmessa a un’altra ruota dentata i cui denti siano accoppiati con i denti del pignone: la distanza tra i centri delle due ruote è pari alla somma delle lunghezze dei raggi.



Nel punto di contatto, la velocità tangenziale è la stessa nelle due ruote, ma il verso di rotazione della seconda ruota è opposto. Se le due ruote hanno lo stesso numero di denti, si mantiene la velocità angolare.

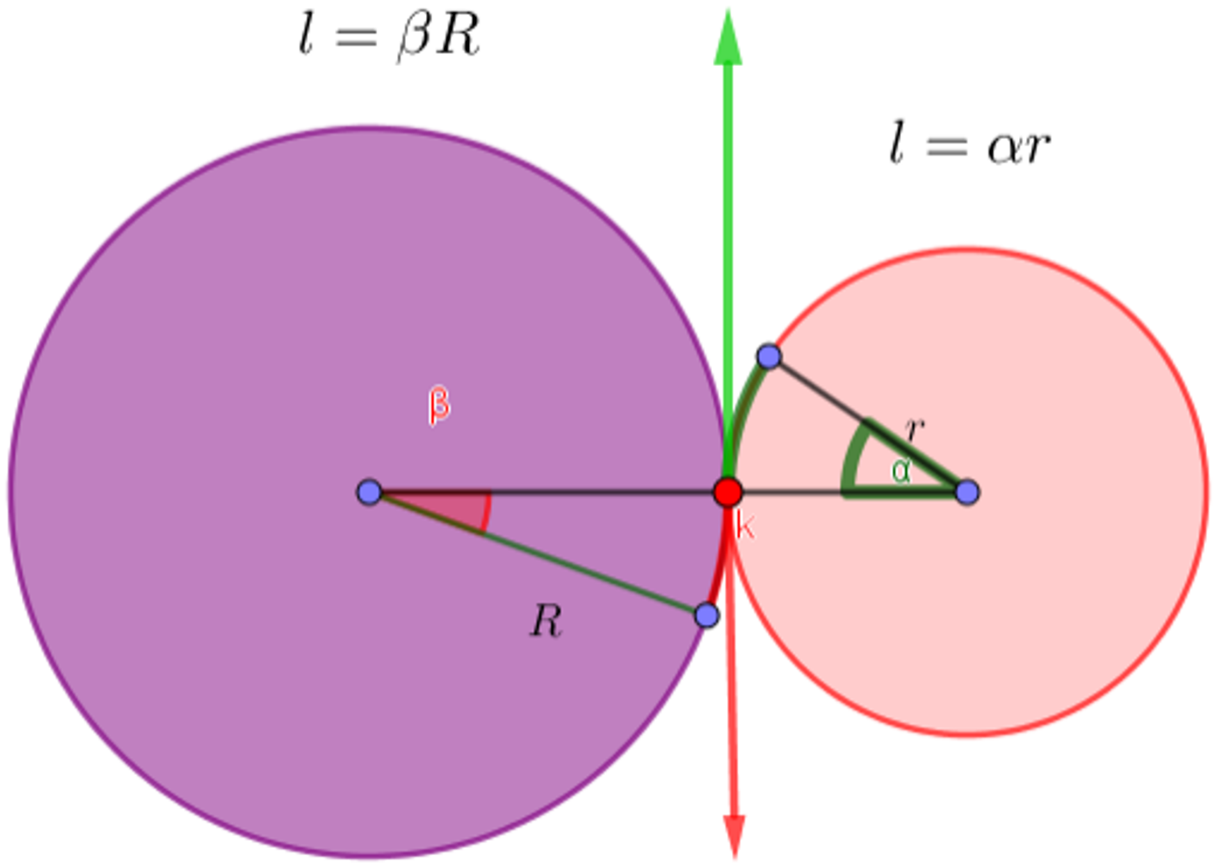
Per fare in modo che la seconda ruota abbia velocità di rotazione differente, occorre che essa abbia un numero di denti diverso.



N il numero dei denti, R raggio della ruota a sinistra,
n numero dei denti, r raggio del pignone a destra

$$\alpha/\beta = R/r = 2\pi R/\, 2\pi r = N\,d/\, n\,d = N/n$$

$$W = (n/N)\, w$$



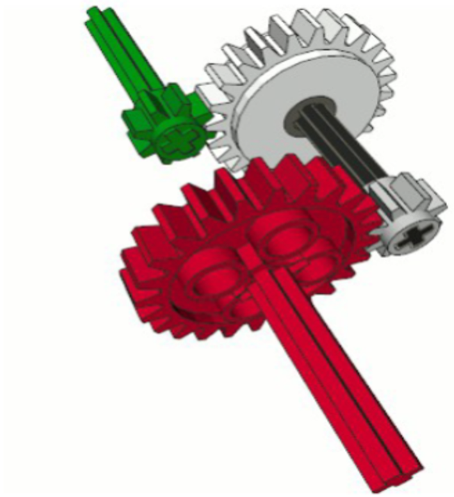
In un orologio, se il pignone ha 8 denti e fa un giro completo ogni minuto, può essere utilizzato per la lancetta dei secondi.
La lancetta dei minuti, invece, deve fare un giro ogni ora.
Poiché il pignone fa 60 giri ogni ora, il rapporto tra la velocità angolare della ruota dei minuti e quella del pignone è 1/60; ma allora la ruota dei minuti deve avere

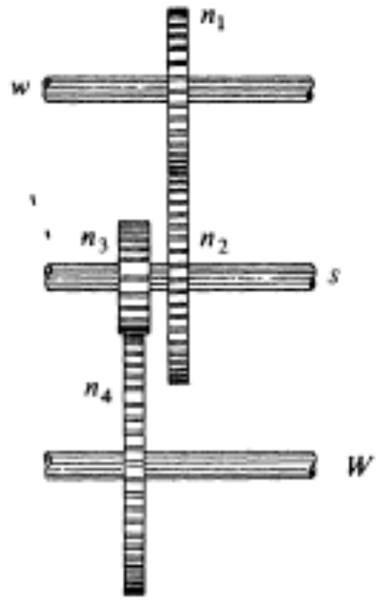
$$60 \cdot 8 \text{ denti: troppi!}$$

Usiamo un meccanismo come in figura con due ruote solidali in grigio: esse hanno la stessa velocità ma la più grande ha n_3 denti e quella più piccola n_2.

Il pignone verde ha n_1 denti, la ruota rossa n_4

$$\boxed{\frac{w_{verde}}{w_{rossa}} = \frac{n_2}{n_3} \times \frac{n_4}{n_1}}$$

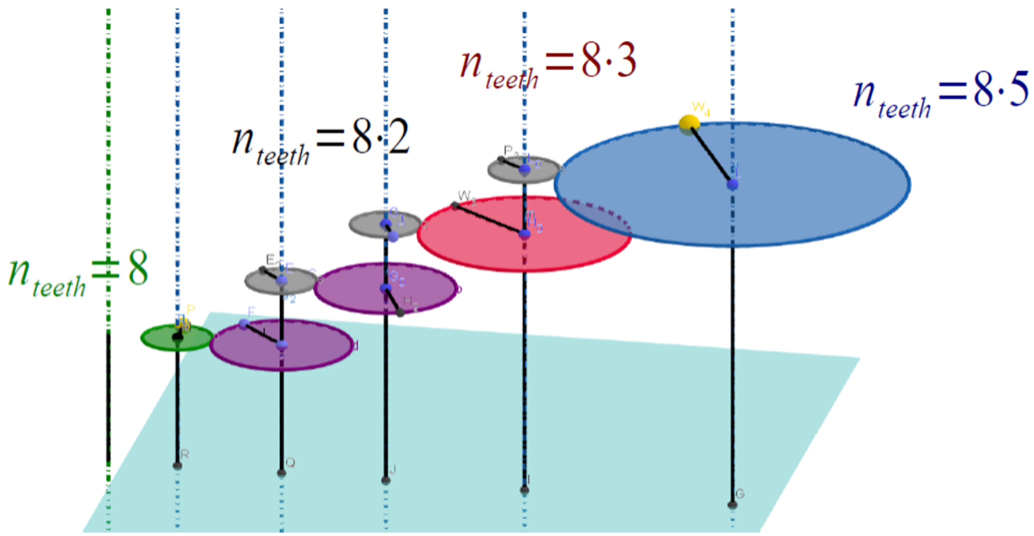




Fattorizzando (quando i numeri lo permettono) il rapporto voluto, si possono costruire una serie di coppie di ruote appaiate corrispondenti ai singoli fattori. In particolare, il rapporto 60 può essere fattorizzato come $60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$

Ma talora non è possibile fattorizzare, o si hanno a disposizione solo ruote con numero di denti prefissato.

$$\frac{1}{60} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}$$



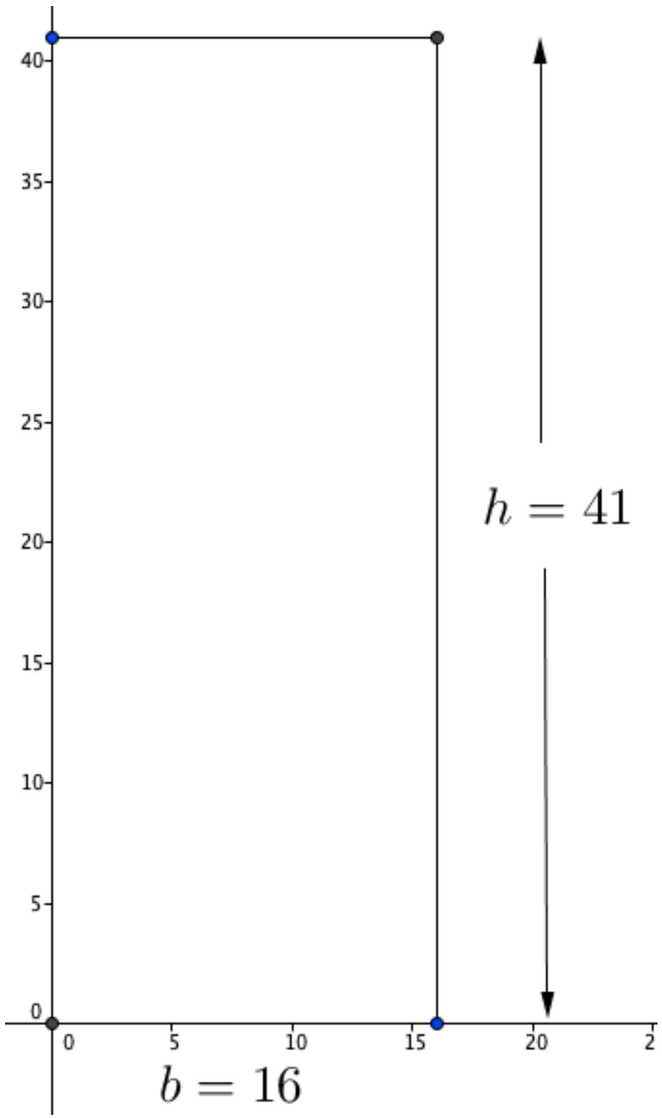
- Diventa necessario saper approssimare frazioni o numeri irrazionali tramite frazioni con denominatore opportuno.

- Per fare un passo avanti nelle tecniche di studio e approssimazione delle frazioni, prendiamo in considerazione un problema correlato

Rettangoli e quadrati

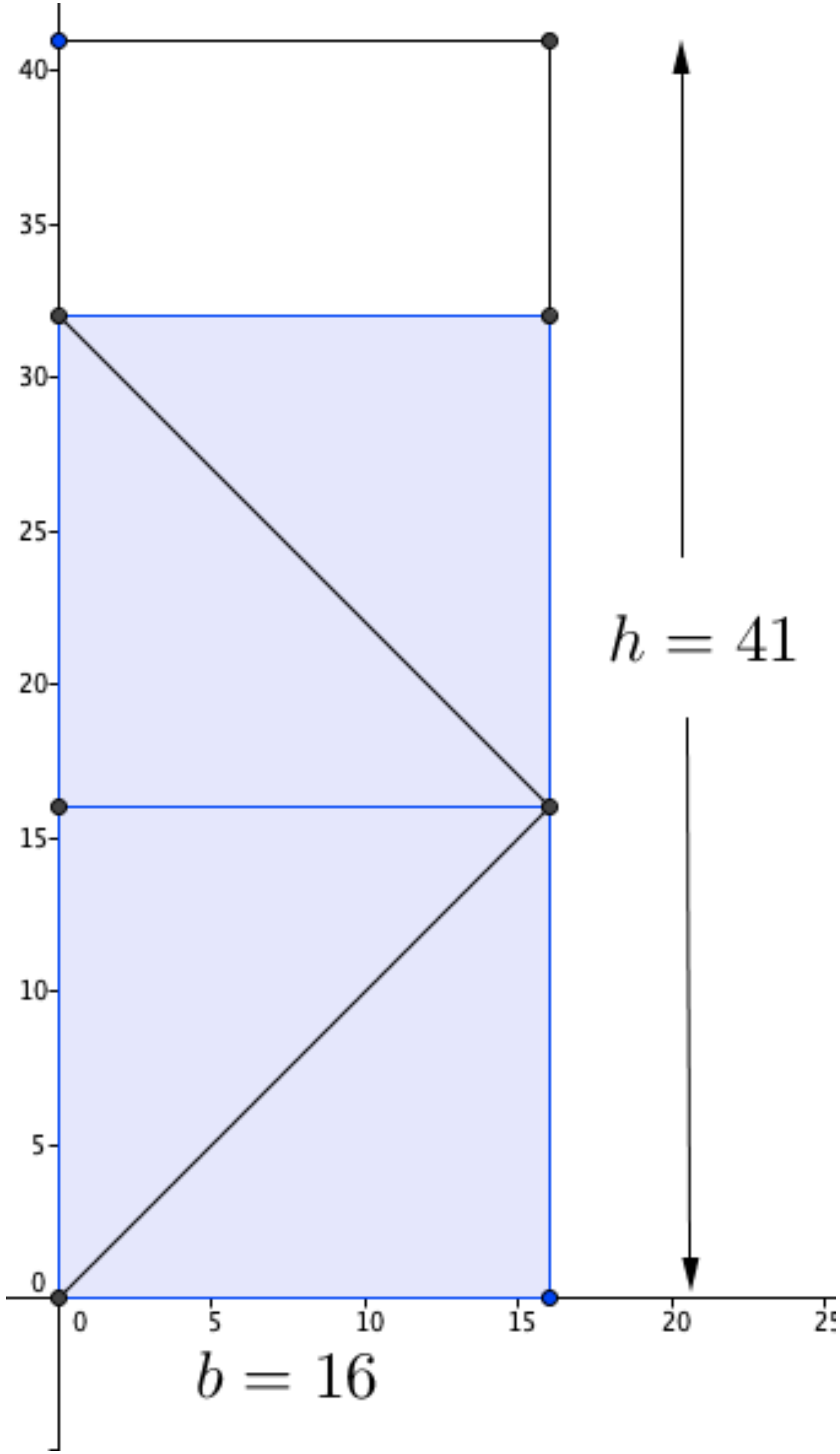
- Considieriamo due numeri naturali h e $b > 0$ e formiamo un rettangolo con lati di lunghezza h e b come in figura

- Ad esempio, $h = 41$ e $b = 16$



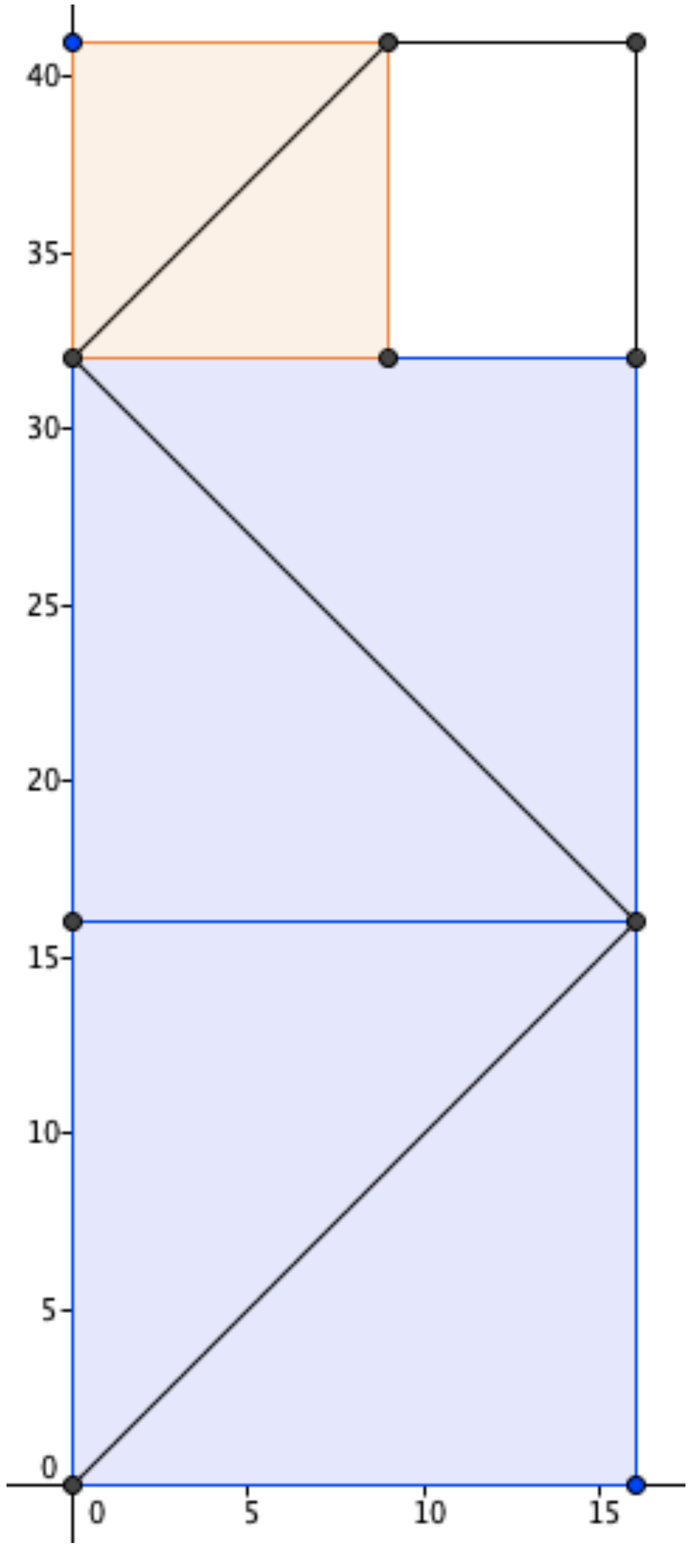
Rettangoli e quadrati

- Disegno all'interno del rettangolo il massimo numero di quadrati aventi per lato il lato verticale h.
- All'interno dei quadrati traccio una diagonale, formando una linea spezzata



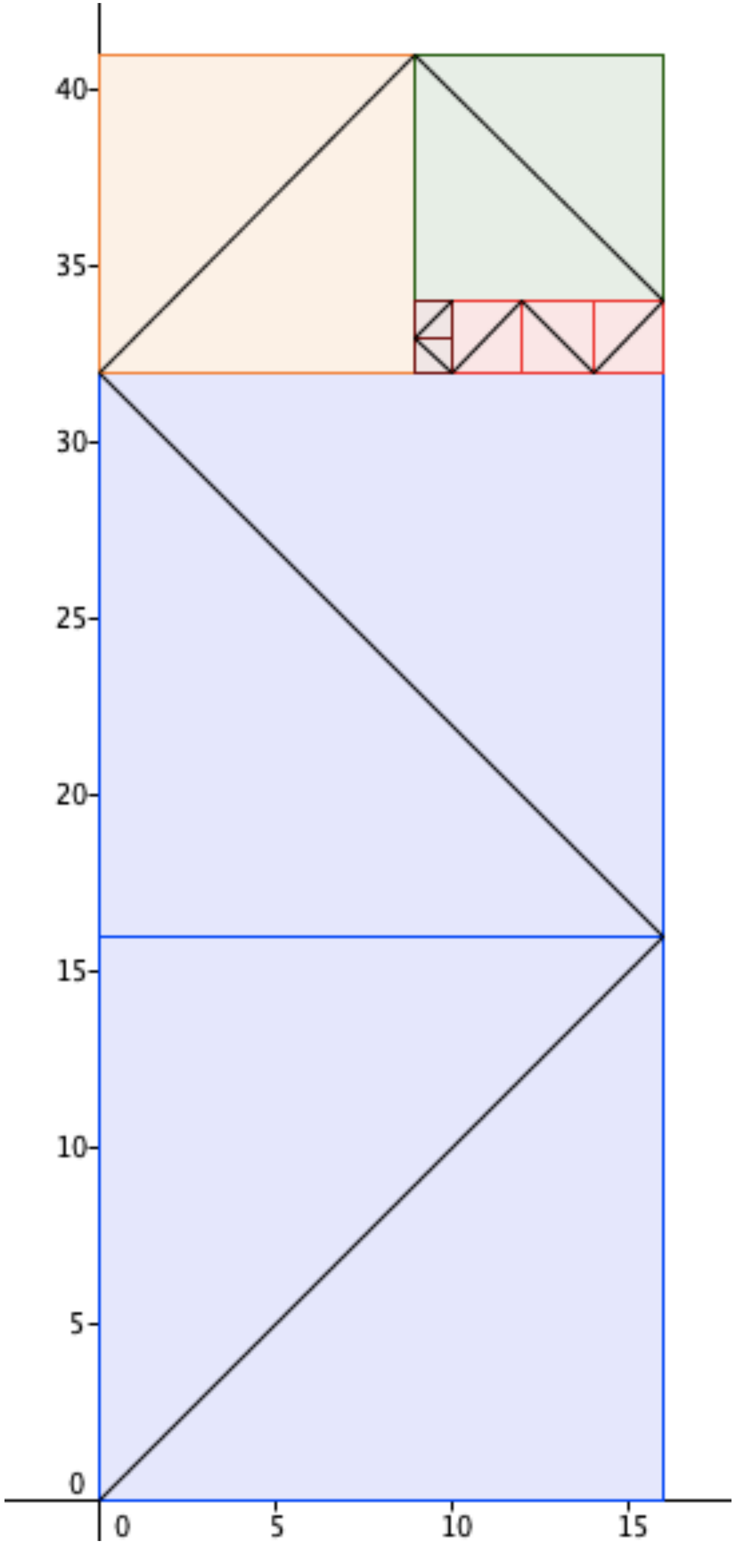
Rettangoli e quadrati

- Nella parte rimanente del rettangolo, inserisco il massimo numero di quadrati di lato massimo, continuando a disegnare la linea spezzata delle diagonali



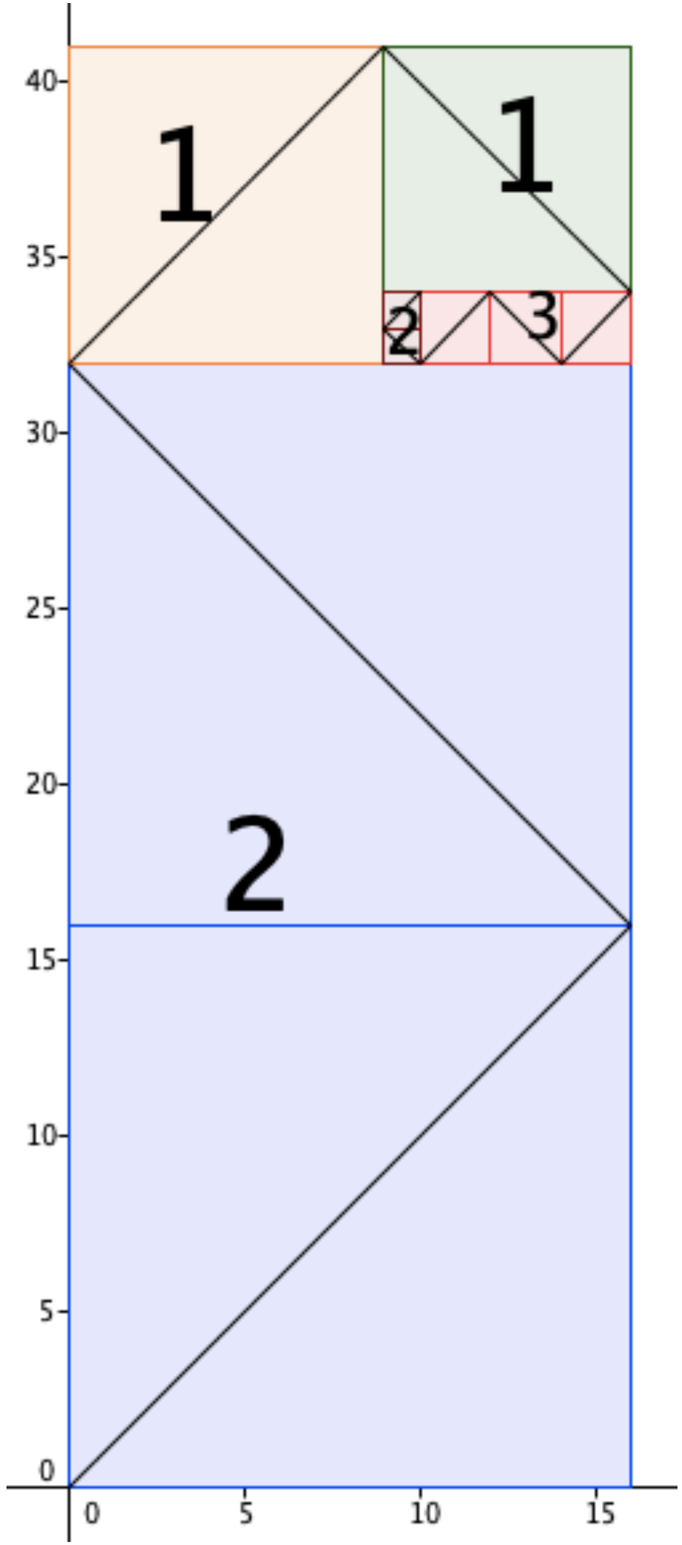
Rettangoli e quadrati

- Ripeto l'operazione fino a riempire interamente il rettangolo iniziale



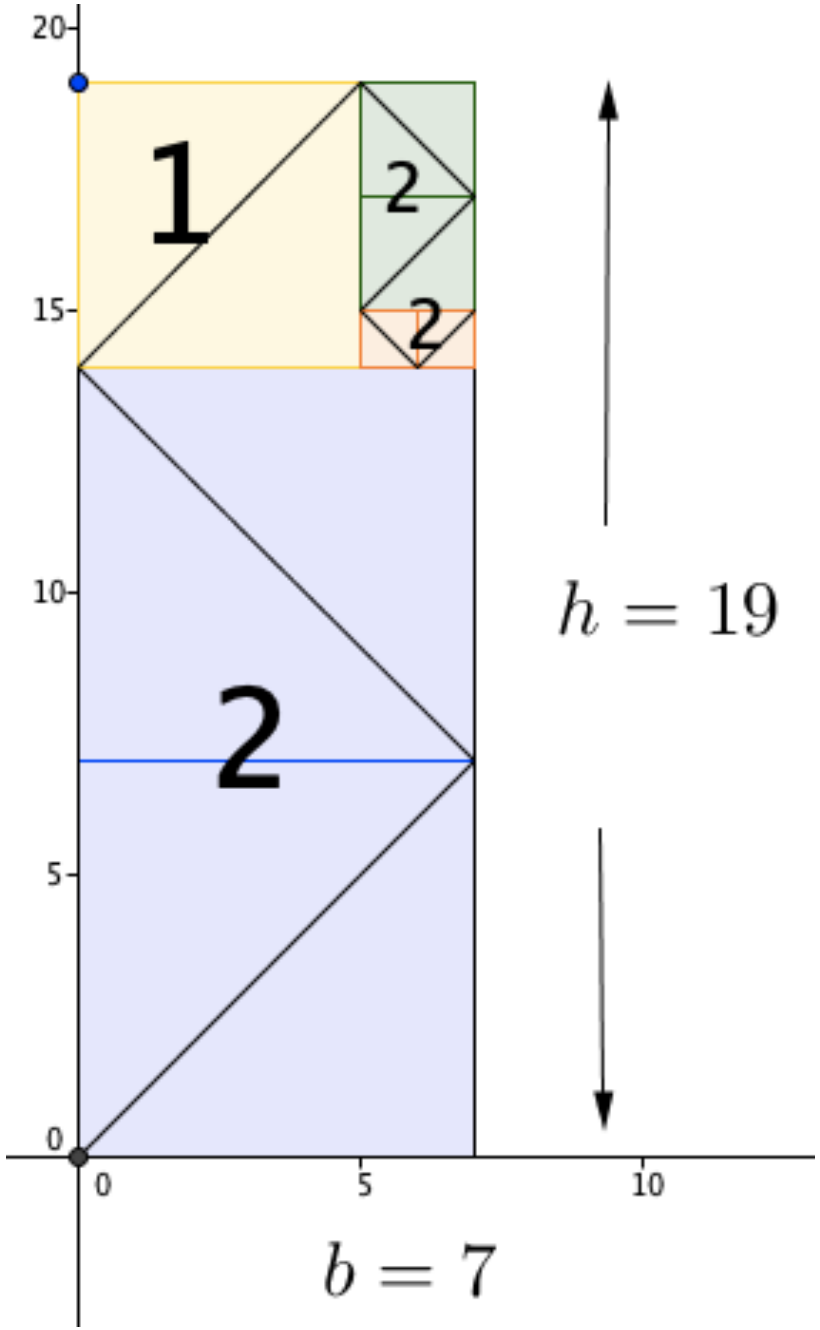
Rettangoli e quadrati

- Rispettando l'ordine di costruzione, conto quanti quadrati ho disegnato per ciascuna dimensione, e trascrivo la successione ottenuta 2 1 1 3 2
- Tale successione permette di ricostruire il rettangolo iniziale, a meno di omotetia.



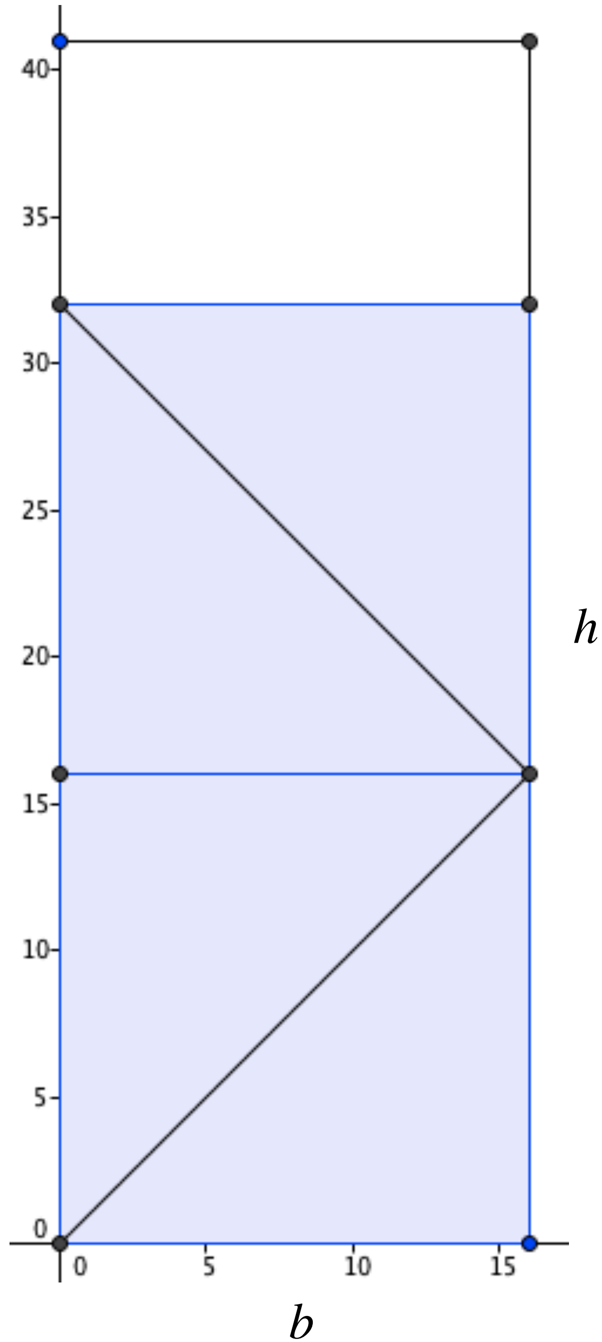
Un altro esempio

- $h = 19$, $b = 7$
- Si ottiene la successione **2 1 2 2**
- Il lavoro può essere svolto anche piegando di carta.



Come funziona?

- Conoscendo h e b, come individuare la successione dei quadrati?
- I quadrati più grandi hanno lato b
- Il loro numero è uguale al risultato a_0 della divisione $h : b$.
- Il rettangolo rimanente ha come lati b e $h - a_0 b$ e b



Università di Roma
Tor Vergata

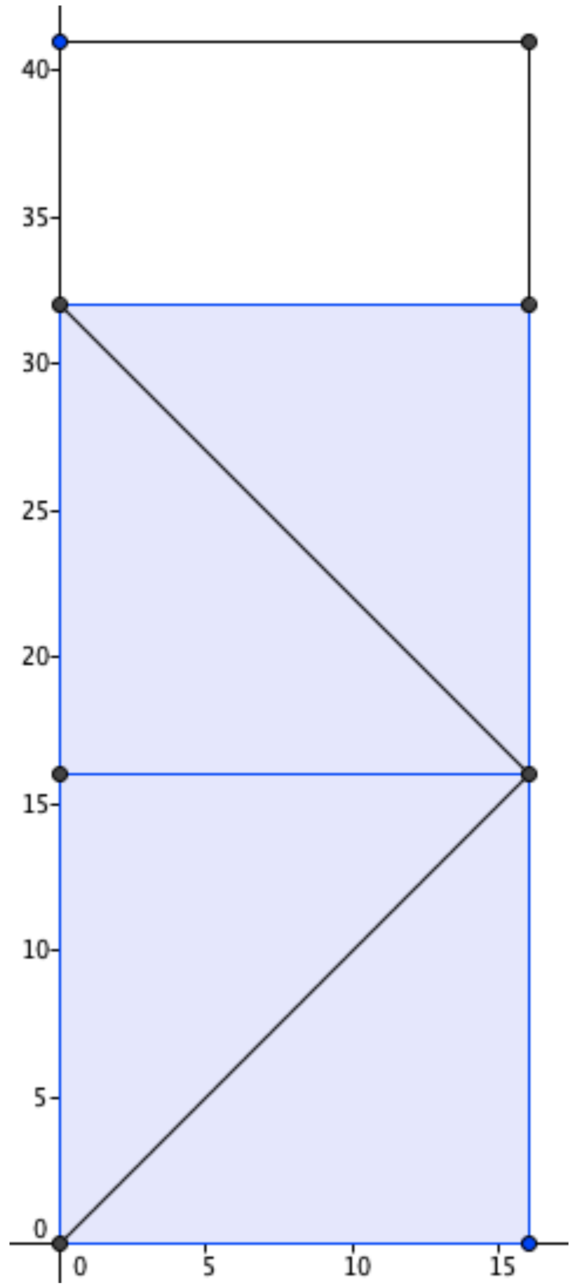
Esempio $h = 41, b = 16$

successione 2 1 1 3 2

- $h \ = \ b \, a_0 + r_0$

- $41 = \ 16 \ \cdot 2 + 9$

a_0 è il numero di quadrati di lato massimo



Esempio $h = 41, b = 16$ successione 2 1 1 3 2

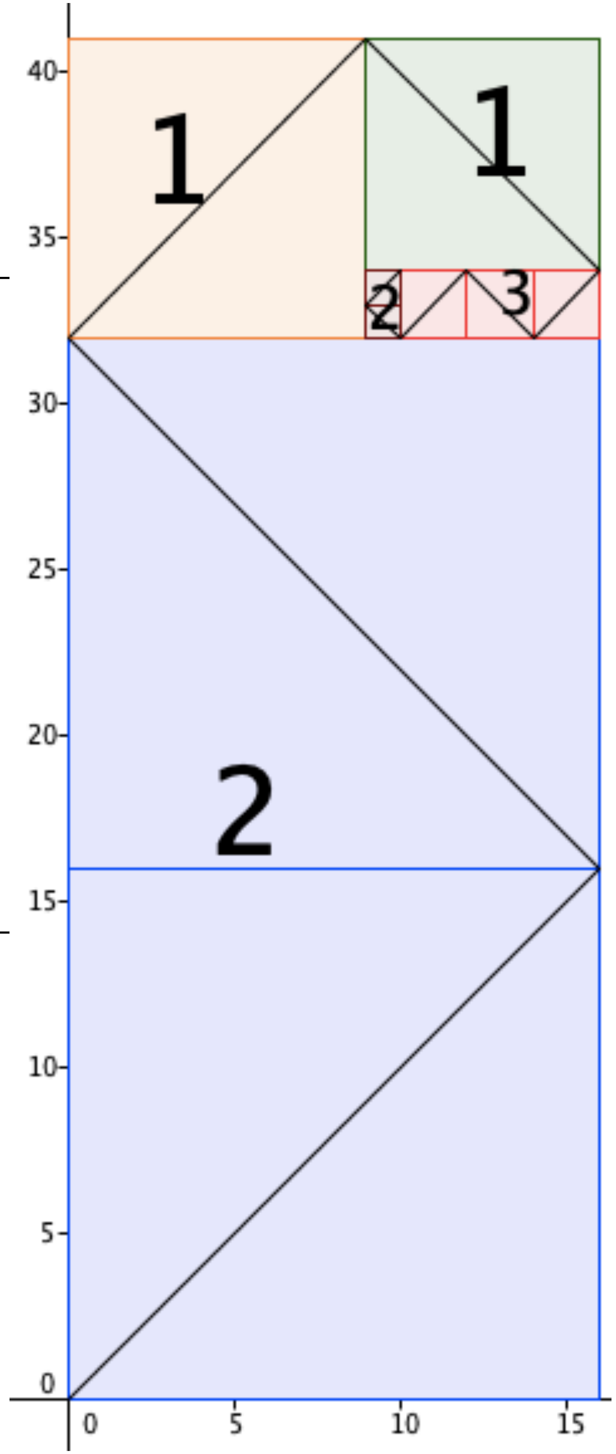
- $h = b\, a_0 + r_0$
- $41 = 16 \cdot 2 + 9$

- $b = r_0\, a_1 + r_1$
- $16 = 9 \cdot 1 + 7$

$\boldsymbol{a_1}$ è il numero di quadrati nel gruppo successivo (Lato massimo per entrare nel rettangolo rimasto dopo l'inserimento del gruppo di quadrati di lato b)

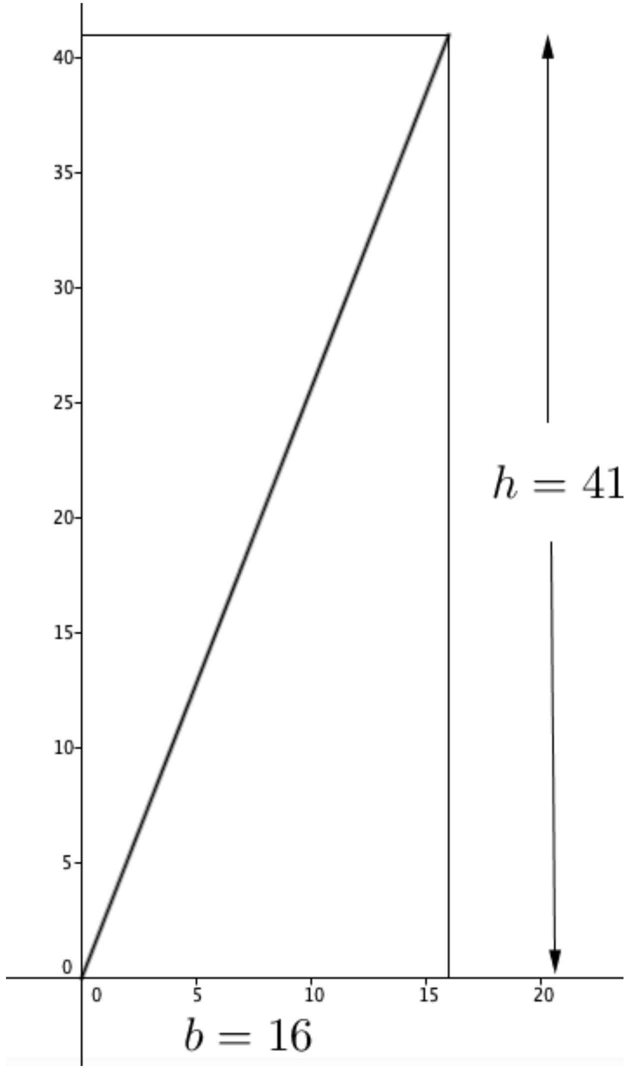
Esempio $h = 41, b = 16$
successione 2 1 1 3 2

• $h \;=\; b\, a_0 + r_0$	• $41 = \; 16 \;\cdot 2 + 9$
• $b \;= r_0\, a_1 + r_1$	• $16 = 9 \;\cdot 1 + 7$
• $r_0 = r_1\, a_2 + r_2$	• $9 = 7 \;\cdot 1 + 2$
• $r_1 = r_2\, a_3 + r_3$	• $7 = 2 \;\cdot 3 + 1$
• $r_2 = r_3\, a_4 + r_4$	• $2 = 1 \;\cdot 2 + 0$



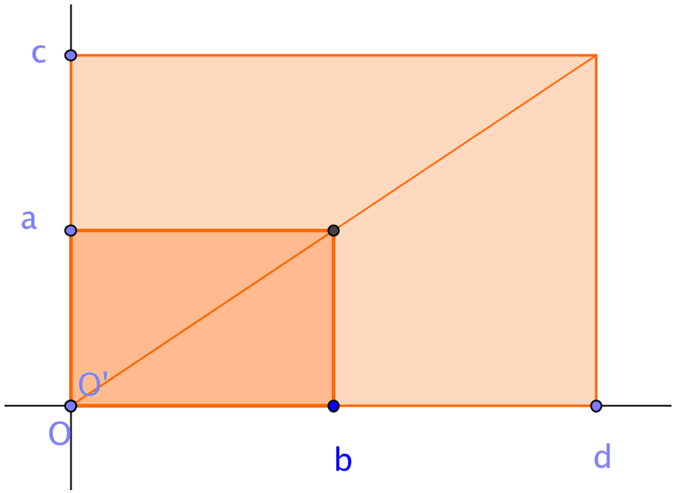
la successione **2 1 1 3 2** del numero dei quadrati coincide con la successione dei quozienti nell'algoritmo di Euclide per calcolare il MCD

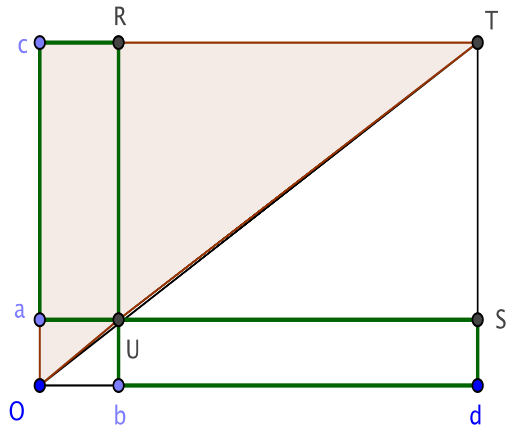
- I quadrati così costruiti rappresentano graficamente l'algoritmo di Euclide per la determinazione del Massimo Comune Divisore di *h* e *b*
- La successione 2 1 1 3 2 caratterizza il rettangolo a meno di omotetia, e dunque caratterizza la pendenza $\frac{h}{b} = \frac{41}{16}$ della diagonale

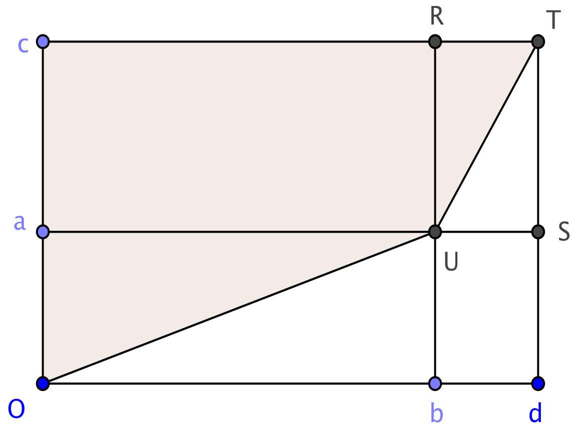


- la pendenza della diagonale

è invariante per rettangoli omotetici

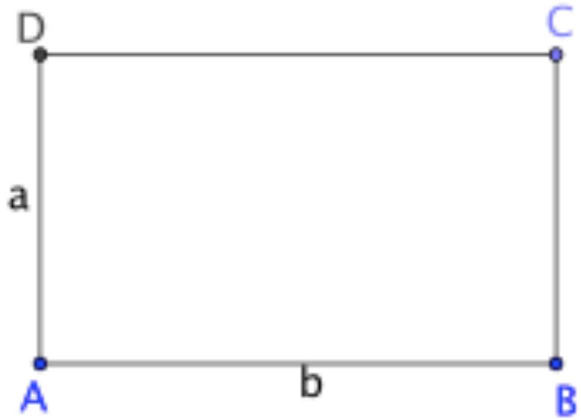




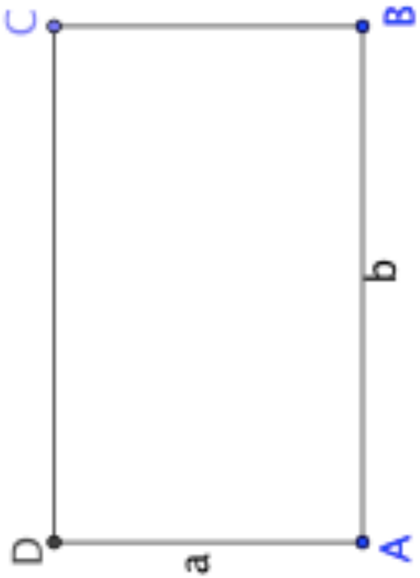


Università di Roma
Tor Vergata

- Questi due rettangoli non sono omotetici

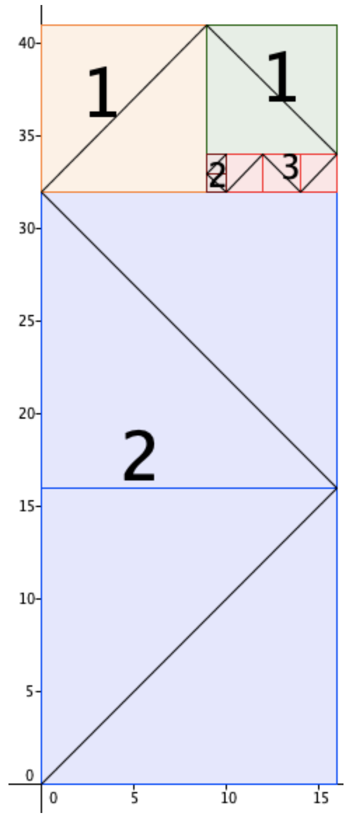


$\frac{a}{b}$ (diagonale AC)



$\frac{b}{a}$ (diagonale DB)

Esempio $h = 41, b = 16$



Dalle divisioni possiamo ricavare una relazione esplicita tra la successione 2 1 1 3 2 dei quadrati e la frazione 41/16

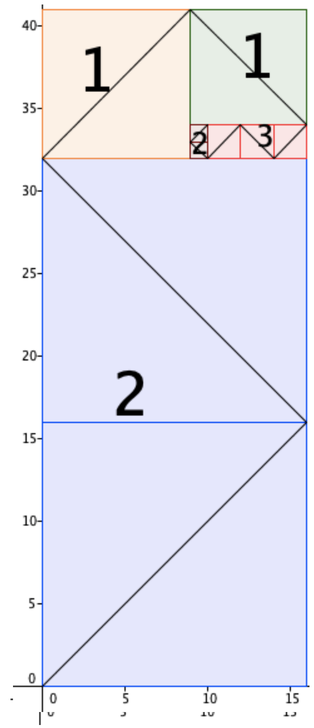
- $41 = 16 \cdot 2 + 9$
- $16 = 9 \cdot 1 + 7$
- $9 = 7 \cdot 1 + 2$
- $7 = 2 \cdot 3 + 1$
- $2 = 1 \cdot 2 + 0$

- $\frac{41}{16} = 2 + \frac{9}{16}$
- $\frac{16}{9} = 1 + \frac{7}{9}$
- $\frac{9}{7} = 1 + \frac{2}{7}$
- $\frac{7}{2} = 3 + \frac{1}{2}$
- $\frac{2}{1} = 2 + 0$

Esempio $h = 41$, $b = 16$

successione 2 1 1 3 2

Sostituiamo una alla volta le identità trovate



$$\frac{41}{16} = 2 + \frac{9}{16} = 2 + \frac{1}{\frac{16}{9}} =$$

$$= 2 + \frac{1}{1 + \frac{7}{9}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{9}{7}}} =$$

$$= 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{2}{7}}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{7}{2}}}} =$$

$$= 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2}}}} \stackrel{\text{def}}{=} [2; 1, 1, 3, 2]$$

- $\frac{41}{16} = 2 + \frac{9}{16}$
- $\frac{16}{9} = 1 + \frac{7}{9}$
- $\frac{9}{7} = 1 + \frac{2}{7}$
- $\frac{7}{2} = 3 + \frac{1}{2}$
- $\frac{2}{1} = 2 + 0$

Caso generale

- $h = b\,a_0 + r_0$
- $b = r_0\,a_1 + r_1$
- $r_0 = r_1\,a_2 + r_2$
- $r_1 = r_2\,a_3 + r_3$
- $r_2 = r_3\,a_4 + r_4$
- *.....*

- $\frac{h}{b} = a_0 + \frac{9}{16}$
- $\frac{b}{r_0} = a_1 + \frac{r_1}{r_0}$
- $\frac{r_0}{r_1} = a_2 + \frac{r_2}{r_1}$
- ....

$$\boxed{\frac{h}{b} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\dots\dots}}}} \stackrel{\text{def}}{=} [\,a_0;\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ldots]}$$

L’espressione

$$\frac{h}{b} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\dots + \cfrac{1}{\dots + \cfrac{1}{a_{N-1} + \cfrac{1}{a_N}}}}}} \stackrel{\text{def}}{=} [\, a_0;\ a_1,\ a_{\mathbf{2}},\ a_3, \dots,\ a_N]$$

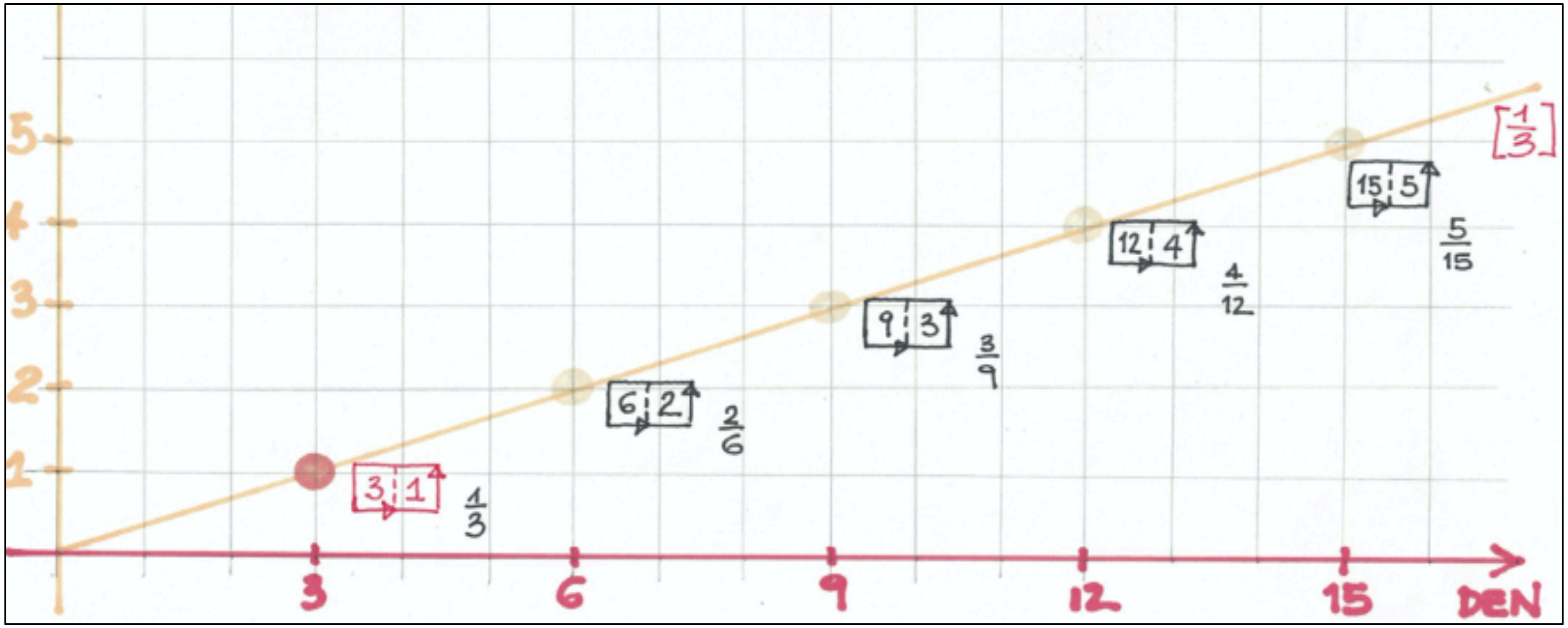
è detta una *frazione continua (limitata)*

- I coefficienti a_i ($a_i \in \mathbb{Z}, a_i \in \mathbb{N}\ per\ i > 0$) sono detti *quozienti parziali*

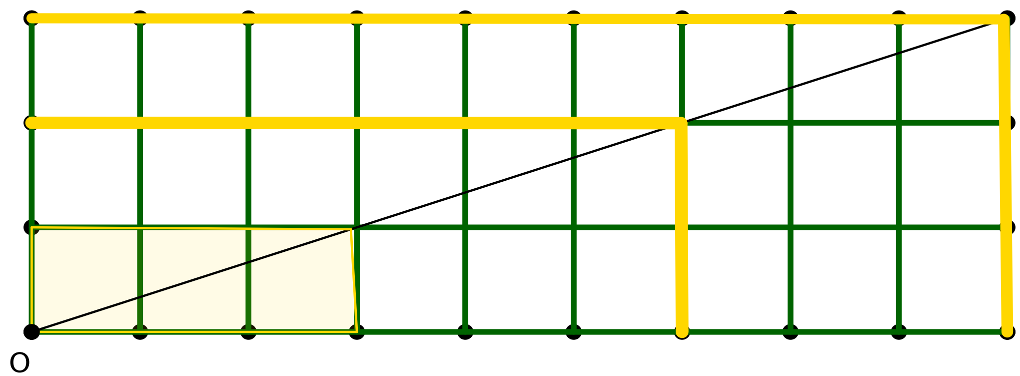
- Il procedimento termina sempre, perché i resti decrescono strettamente, ma sono sempre ≥ 0.

- Possiamo supporre (e lo faremo) che

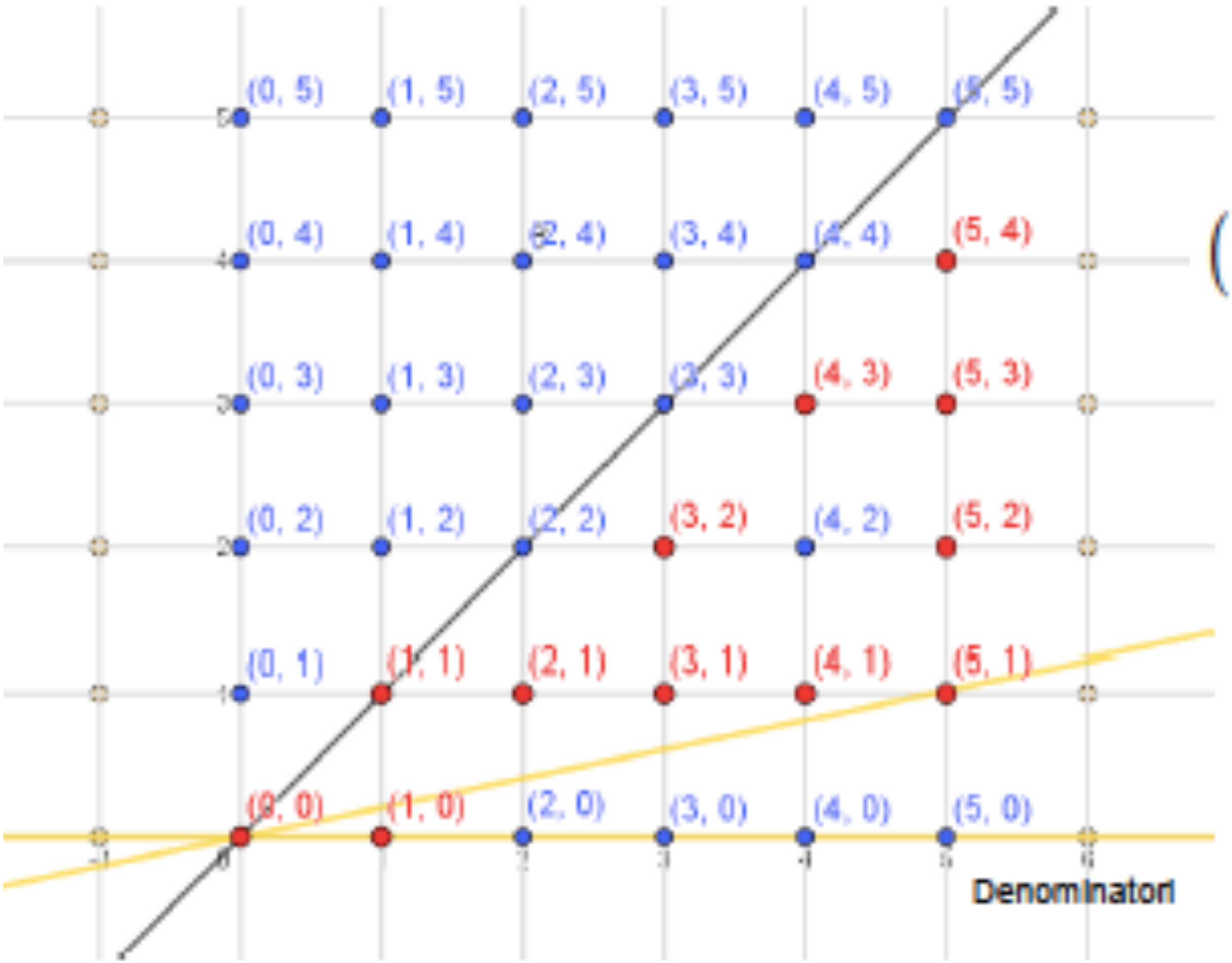
$$\mathrm{MCD}(h, b) = 1$$



Equivalenza tra frazioni
e rappresentante ridotto
ai minimi termini

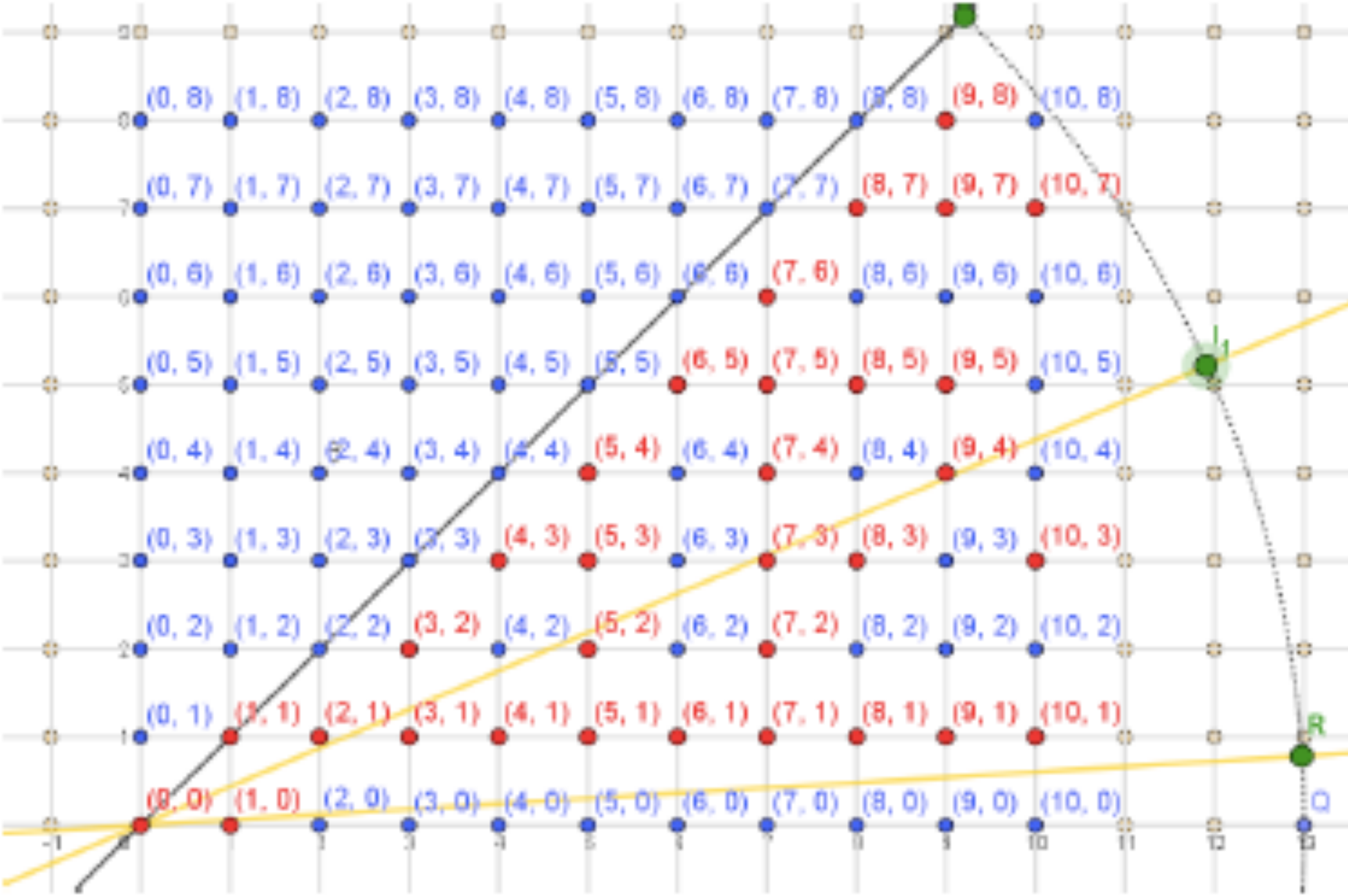


- Considerazioni sulla rappresentazione suggerita da Coxeter per la visualizzazione delle frazioni e dei numeri razionali: ordinamento tra frazioni



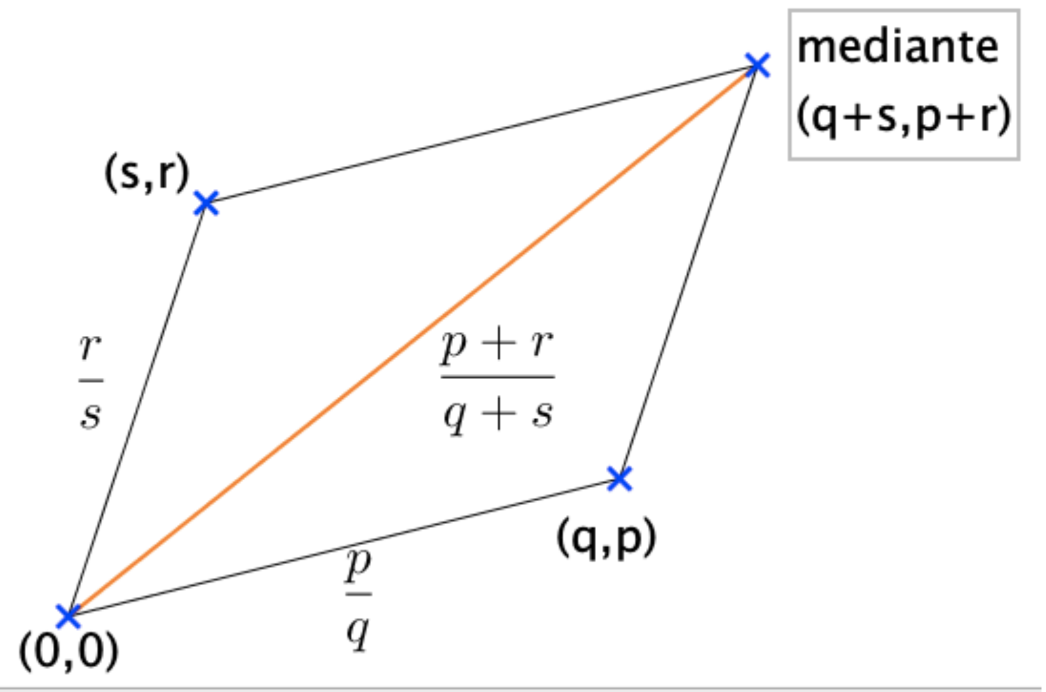
$$(5,3)=\frac{3}{5}$$

- Considerazione sulla rappresentazione delle frazioni: frazioni approssimanti



Ancora approssimazioni

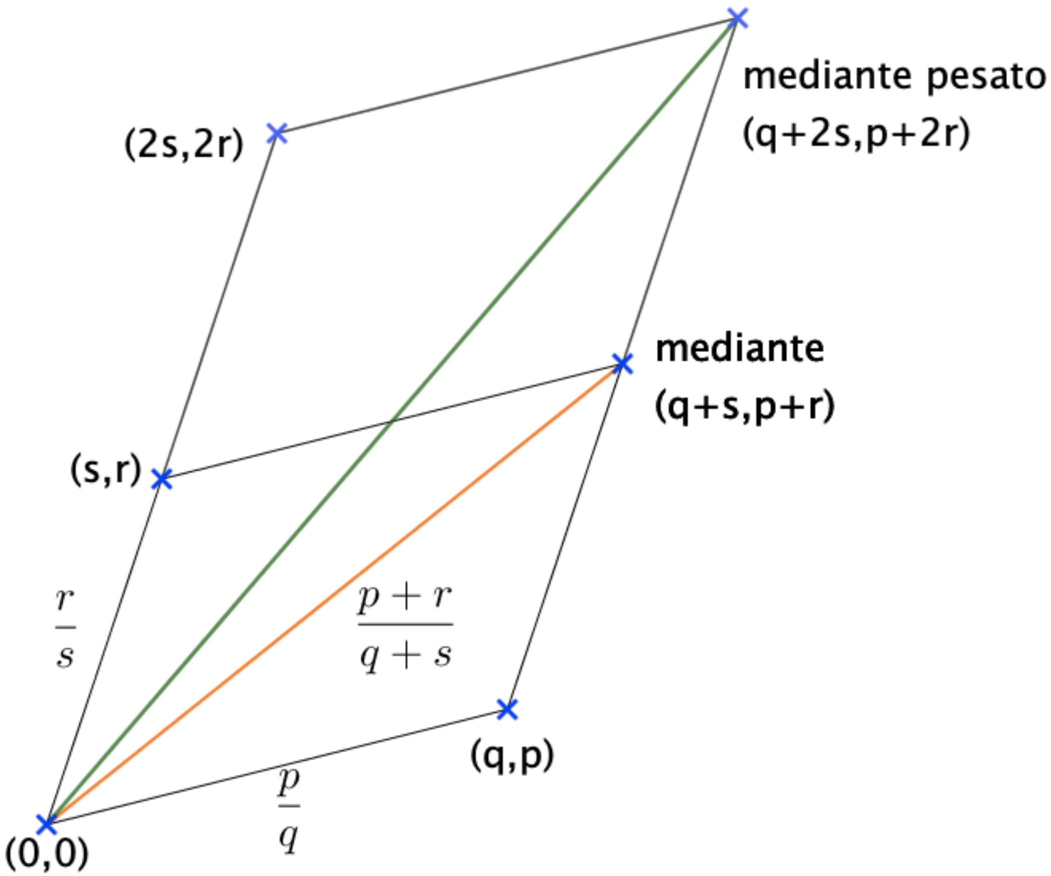
Consideriamo la rappresentazione geometrica di due frazioni p/q e r/s, con $p/q < r/s$ e consideriamo il loro mediante $\dfrac{p+r}{q+s}$, che fornisce la pendenza della diagonale



Accade sempre che

$$\frac{p}{q} < \frac{p+r}{q+s} < \frac{r}{s}$$

Tale proprietà vale anche per il mediante "pesato" di p/q e r/s, definito come il quoziente $(p+kr)/(q+kr)$, in cui si usa una frazione equivalente kr/ks a r/s.



Accade sempre che

$$\frac{p}{q} < \frac{p+kr}{q+ks} < \frac{r}{s}$$

- Queste osservazioni permettono di determinare frazioni ‘vicine’ a altre frazioni, fornendo approssimazioni

- Operando con le frazioni continue, è però possibile ricavare un differente metodo di approssimazione, che si estende anche all’approssimazione di un numero reale con numeri razionali

Unicità?

- Abbiamo visto che ogni numero razionale $\frac{h}{b}$ può essere rappresentato tramite una frazione continua finita.

$$\frac{h}{b} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\dots\dots}}}} \overset{\text{def}}{=} [\,a_0;\ a_1,\ a_2,\ a_3, \dots,\ a_N]$$

- Ci sono ambiguità nella rappresentazione?
- $[3;1] \;=\; 3 + \frac{1}{1} = 4$: potevo usare [4]
- $[3;2,1] \;=\; 3 + \cfrac{1}{2+\frac{1}{1}} = 3 + \frac{1}{3} = [3;3]$
- **La rappresentazione con ultimo convergente maggiore di 1 è unica**

Supponiamo che $a_N > 1$ e studiamo alcuni casi

- $[\ a_0] = a_0$: *il numero razionale può essere scritto in questo modo esattamente quando è un intero*
- $[3;\ 2] = 3 + \frac{1}{2}$
- $[\ a_0;\ a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1}$ e dunque a_0 *è la parte intera*
- Tra 0 e 1 troviamo $[0; a_1] = \frac{1}{a_1}$: sono le frazioni unitarie (gli inversi degli interi non nulli)
- Altrimenti $[\ a_0;\ a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1}$ descrive le somme di un intero e una frazione unitaria. Troviamo:

$$1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} > 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} > 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} > 1 + \frac{1}{5} > \ldots > 1 + \frac{1}{n}$$

Supponiamo che $a_N > 1$

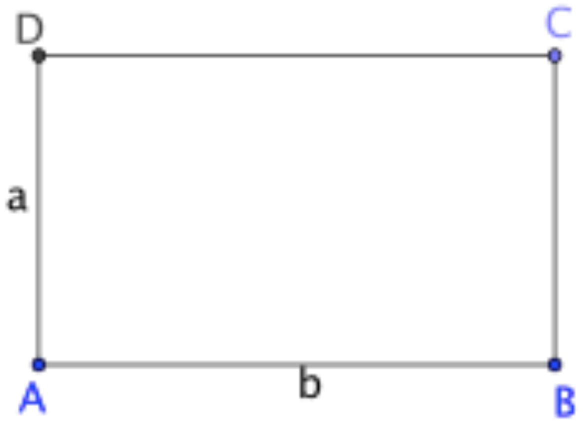
- $[\, a_0;\ a_1,\ a_2] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}}$
- Tra 0 e 1, $[0;\ a_1,\ a_2] = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}}$ è inverso di un numero trovato prima per N = 1; troviamo

$$\frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{4}{5} < \frac{5}{6} < \dots \qquad \frac{2}{5} < \frac{3}{7} < \frac{4}{9} < \frac{5}{11} < \dots$$

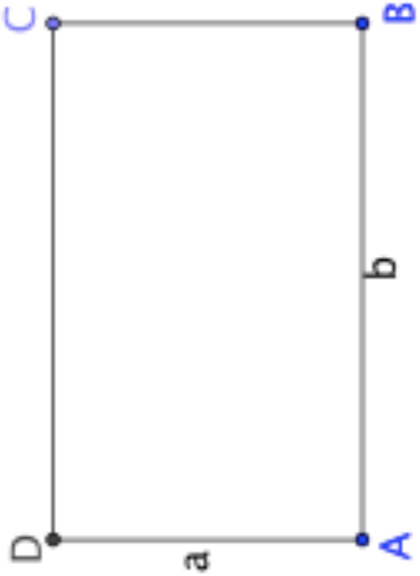
- Altrimenti, basta sommare un intero:

$$1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3} < 1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4} < 1 + \frac{4}{5} = \frac{9}{5} < 1 + \frac{5}{6} = \frac{11}{6} < \dots$$

inverso



$\frac{a}{b}$ (diagonale AC)



$\frac{b}{a}$ (diagonale DB)

- Riprendiamo l'esempio $\frac{41}{16} = [2; 1, 1, 3, 2]$

che avevamo già studiato.

- L'inverso $\frac{16}{41}$ è descritto dal rettangolo di altezza 16 e base 41.

inverso

- Per descrivere $\frac{41}{16}$ abbiamo usato le divisioni

  - $41 = 16 \cdot 2 + 9$
  - $16 = 9 \cdot 1 + 7$
  - $9 = 7 \cdot 1 + 2$
  - $7 = 2 \cdot 3 + 1$
  - $2 = 1 \cdot 2 + 0$

- Per studiare $\frac{16}{41}$ basta premettere la divisione

$$16 = 41 \cdot 0 + 16$$

inverso

- L'inverso di $\frac{41}{16} = [2; 1, 1, 3, 2]$ è quindi dato da

$\frac{16}{41} = [0; 2, 1, 1, 3, 2]$

Se $a_0 \neq 0$, l'inverso di $[a_0; a_1, a_2, a_3, ..., a_N]$

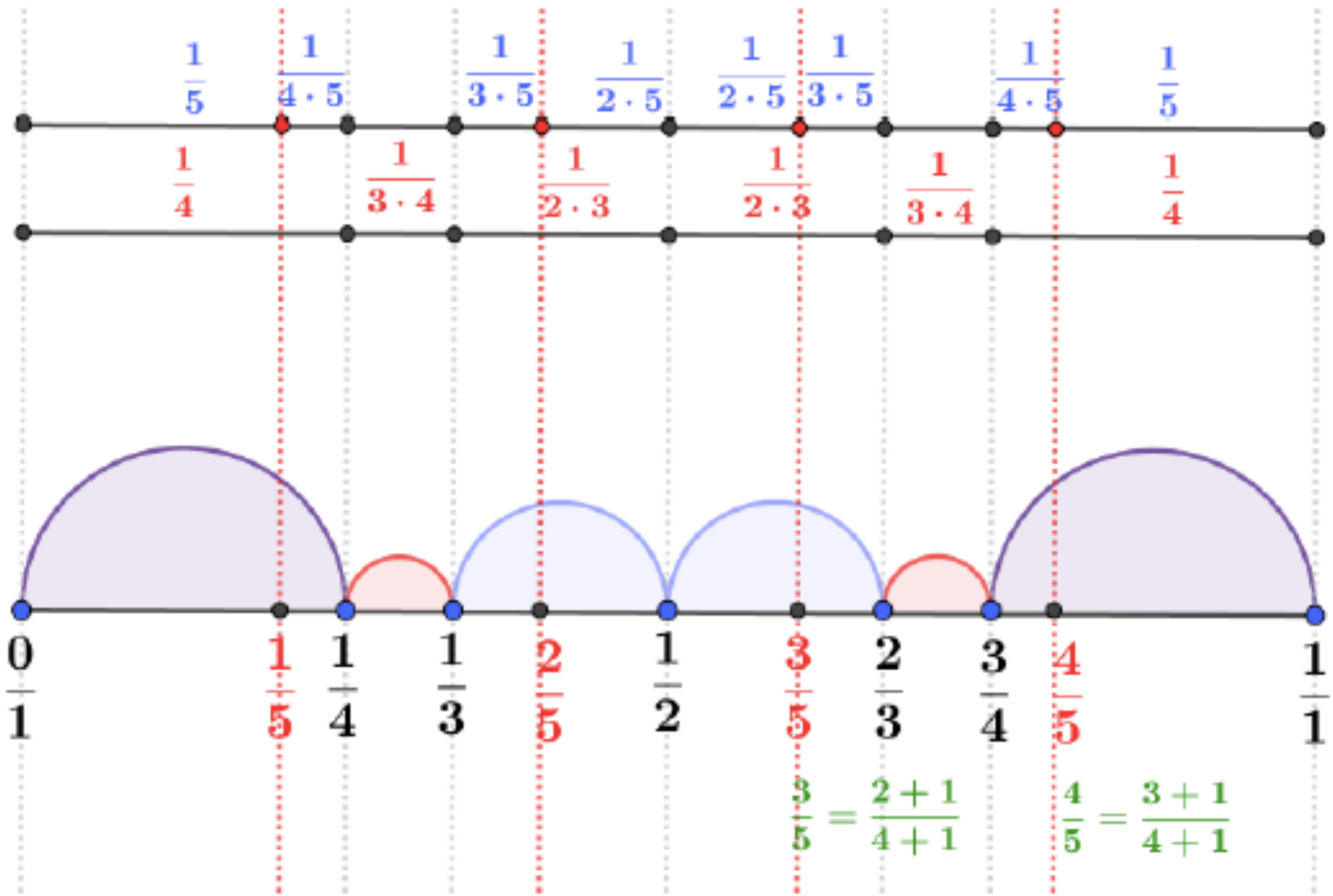
è $[0; a_0, a_1, a_2, a_3, ..., a_N]$

$$\frac{h}{b} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\cdots\cdots}}}} \stackrel{\text{def}}{=} [\, a_0;\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_N]$$

Profondità

- Quando $a_N > 1$, l'indice *N* dell'ultimo quoziente parziale a_N fornisce un indice della '*complessità*' del numero razionale $\frac{h}{b}$ dato dalla frazione continua.

- l'indice *N* è detto *profondità del numero razionale*



$\frac{1}{5}$ $\frac{1}{4\cdot 5}$ $\frac{1}{3\cdot 5}$ $\frac{1}{2\cdot 5}$ $\frac{1}{2\cdot 5}$ $\frac{1}{3\cdot 5}$ $\frac{1}{4\cdot 5}$ $\frac{1}{5}$
$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{3\cdot 4}$ $\frac{1}{2\cdot 3}$ $\frac{1}{2\cdot 3}$ $\frac{1}{3\cdot 4}$ $\frac{1}{4}$
$\frac{0}{1}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{5}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{1}{1}$
$\frac{3}{5} = \frac{2+1}{4+1}$
$\frac{4}{5} = \frac{3+1}{4+1}$

Come ricavare il valore di una frazione continua?

Riprendiamo l'esempio $\frac{41}{16} = [2; 1, 1, 3, 2]$ e confrontiamo il valore $\frac{41}{16}$ con le frazioni ottenute ignorando gli ultimi quozienti parziali

- $[2] = 2$
- $[2; 1] = 3$
- $[2; 1, 1] = 2 + 1/2 = 5/2 = 2{,}5$
- $[2; 1, 1, 3] = 2 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}} = \frac{18}{7} = 2,5714....$
- $[2; 1, 1, 3, 2] = \frac{41}{16}$ $(= 2{,}5625..)$

Come ricavare il valore di una frazione continua?

- I valori ottenuti oscillano, creando una sotto-successione crescente (corrispondenti a un numero dispari di coefficienti considerati) e una sotto-successione decrescente (corrispondenti a un numero pari di coefficienti)

$$[2] < [2;\, 1,\, 1\,] < \frac{41}{16} < [2;\, 1,\, 1,\, 3\,] = < [2;\, 1\,]$$

- Sempre tramite l'esempio $\frac{41}{16}$, ripercorriamo la procedura utilizzata per determinare la frazione continua associata

Come ricavare il valore di una frazione continua?

- $\frac{41}{16} = 2 + \frac{9}{16} = 2 + \frac{1}{\frac{16}{9}} =$

$$= 2 + \frac{1}{1 + \frac{7}{9}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{9}{7}}} =$$

$$= 2 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{2}{7}}} = 2 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{7}{2}}}} =$$

$$= 2 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{3+\frac{1}{2}}}}$$

- $\frac{41}{16} = 2 + \frac{9}{16}$
- $\frac{16}{9} = 1 + \frac{7}{9}$
- $\frac{9}{7} = 1 + \frac{2}{7}$
- $\frac{7}{2} = 3 + \frac{1}{2}$
- $\frac{2}{1} = 2 + 0$

Come ricavare il valore di una frazione continua?

Dunque, i rapporti determinati tramite le divisioni corrispondono alle frazioni continue descritte dalle cifre terminali:

- $\frac{41}{16} = [2; 1,1, 3,2]$
- $\frac{16}{9} = [1; 1, 3,2]$
- $\frac{9}{7} = [1; 3,2]$
- $\frac{7}{2} = [3; 2]$
- $\frac{2}{1} = [2]$

Come ricavare il valore di una frazione continua?

- Le osservazioni svolte sull'esempio valgono più in generale:

- $[\,a_0;\ a_1] \;=\; a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_1 \cdot a_0 + 1}{a_1}$

- $[\,a_0;\ a_1,\ a_2] \;=\; a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}}$

$$= a_0 + \frac{1}{\frac{a_2 \cdot a_1 + 1}{a_2}} \;= a_0 + \frac{a_2}{a_2 \cdot a_1 + 1} = \frac{(a_2 \cdot a_1 + 1) \cdot a_0 + a_2}{a_2 \cdot a_1 + 1}$$

- Sia data $\frac{h}{b} = [\, a_0; a_1, a_2, \ldots, a_N]$, con $a_1, a_2, \ldots, a_N > 0$. Definiamo
- $[\, a_k; a_{k+1}, a_{i+2}, \ldots, a_N]$ ***k*-mo quoziente completo** per $0 \leq k \leq n$.
- $c_k = [\, a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{p_k}{q_k}$ (ridotto)

  ***k*-mo convergente** per $0 \leq i \leq n$

- *La successione dei convergenti* $c_k = [\, a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k]$ fornisce frazioni che approssimano $\frac{h}{b}$

Per studiare e determinare il valore dei convergenti $c_k = [\ a_0; a_1, a_2, \dots, a_k] \overset{\text{def}}{=} \dfrac{p_k}{q_k}$ non è necessario svolgere i calcoli con le frazioni, ma si può operare in modo ricorsivo.

Università di Roma Tor Vergata

Per studiare e determinare il valore dei convergenti della frazione $\frac{h}{b}$ definiamo, per ricorrenza, due nuove successioni

- $\{p_k\}$ definita da $p_0 = a_0$; $p_1 = a_1 * p_0 + 1$; $p_k = a_k * p_{k-1} + p_{k-2}$

- $\{q_k\}$ definite da $q_0 = 1$; $q_1 = a_1$; $q_k = a_k * q_{k-1} + q_{k-2}$.

.

Aggiungendo i valori $p_{-1} = 1$, $p_{-2} = 0$, $q_{-1} = 0$, $q_{-2} = 1$, le relazioni possono essere scritte come

$$\begin{pmatrix} p_k & p_{k-1} \\ q_k & q_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \dots \dots \begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (\#)$$

Risulta che

$$c_k = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_k] = \frac{p_k}{q_k}$$

Università di Roma Tor Vergata

- I convergenti di [2; 2,4,8,2] si ottengono completando la tabella seguente, nella quale sono stati riportati i valori dei quozienti parziali e i valori di $p_0 = a_0$ e $q_0 = 1$(e aggiunti i valori $p_{-1} = 1$ e $q_{-1} = 0$) .

k		0	1	2	3	4
a_k		2	2	4	8	2
p_k	1	2				
q_k	0	1				
c_k						

- I valori di p_k per $k > 0$ si ottengono ricorsivamente tramite le formule

$$p_k = a_k * p_{k-1} + p_{k-2}$$

k		0	1	2	3	4
a_k		2	2	4	8	2
p_k	1	2	2×2+1= 5	4×5+2=22	8×22+5=181	2×181+22=384
q_k	0	1				
c_k						

- I valori di q_k per $k > 0$ si ottengono ricorsivamente tramite le formule

$$q_k = a_k * q_{k-1} + q_{k\text{-}2}$$

k		0	1	2	3	4
a_k		2	2	4	8	2
p_k	1	2	5	22	181	384
q_k	0	1	2×1+0=2	4×2+1=9	8×9+2=74	2×74+9=157
c_k						

conseguenze

Lemma **det** $\begin{pmatrix} p_k & q_k \\ p_{k-1} & q_{k-1} \end{pmatrix} = (-1)^{k+1}$ **(** $\boldsymbol{0 < k \leq n\text{-}1}$**)**

Dimostrazione La dimostrazione è immediata a partire dall'espressione matriciale (#).

Corollario 1 MCD($\boldsymbol{p_k}$ **,** $\boldsymbol{q_k}$ **) = 1 e i convergenti sono ridotti ai minimi termini.**

Corollario 2 $\frac{p_k}{q_k} = \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} + (-1)^{k+1} \frac{1}{q_{k-1}q_k}$ **e** $q_k \geq k$

$$\frac{p_k}{q_k} = a_0 + \frac{1}{q_0\, q_1} - \frac{1}{q_1\, q_2} + \frac{1}{q_2\, q_3} - \ldots\ldots\ldots + (-1)^{k+1} \frac{1}{q_k q_{k-1}}$$

Corollario 3 ($\boldsymbol{p_k}$ **,** $\boldsymbol{q_k}$ **) è soluzione dell'equazione diofantea**

$$q_{k-1}\, \boldsymbol{x} - p_{k-1}\, \boldsymbol{y} = (-1)^{k+1}$$

- Bibliografia/sitografia

  - Charles G. Moore, An introduction to continued fractions, THE NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS, 1964

  https://ia601306.us.archive.org/14/items/ERIC_ED035543/ERIC_ED035543.pdf
  - http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fibonacci/cfINTRO.html
  - Per la rappresentazione delle frazioni: H.S.M. Coxeter, Introduction to Geometry. New York: Wiley, (1961).
  - Per la raffigurazione dell'algoritmo di Euclide per il calcolo del MCD tramite una pavimentazione in quadrati: T. Dantzig, The Bequest of the Greeks, Londra, George Allen & Unwin LTD (1955)
  - L.Lamberti, F.Tovena, Frazioni, ingranaggi e orologi lunari, in Atti del IX Convegno Nazionale di Didattica della Fisica e della Matematica DI.FI.MA. 2019. ", Collane@unito.it, https://www.collane.unito.it/oa/items/show/57 Licenza Creative Commons, 354--361.

- Collegamenti: resistori, somme infinite, approssimazione razionale di un irrazionale, frazioni di Farey, alberi di Brocot