

Informazione ed entropia

Michela Barsanti e Luca Sbano

Liceo *Vittoria Colonna*

Gruppo di Lavoro *Guido ed Emma Castelnuovo*

Roma 11-12-2020

Ricapitolando...verso l'entropia

- Dalla riflessione sul *gioco del 63* si è giunti alla definizione d'**informazione**.
- L'idea d'informazione e di informazione media (entropia) ha un analogo in un sistemi fisici più comuni
- Storicamente l'entropia è una tipica grandezza fisica e, da un punto di vista moderno, è collegata ad una riflessione sul concetto di *stato* (*micro-stati* e *macro-stati*) di un sistema.

Ricapitolando...verso l'entropia

- Dalla riflessione sul *gioco del 63* si è giunti alla definizione d'**informazione**.
- L'idea d'informazione e di informazione media (entropia) ha un analogo in un sistemi fisici più comuni
- Storicamente l'entropia è una tipica grandezza fisica e, da un punto di vista moderno, è collegata ad una riflessione sul concetto di *stato* (*micro-stati* e *macro-stati*) di un sistema.

Ricapitolando...verso l'entropia

- Dalla riflessione sul *gioco del 63* si è giunti alla definizione d'**informazione**.
- L'idea d'informazione e di informazione media (entropia) ha un analogo in un sistemi fisici più comuni
- Storicamente l'entropia è una tipica grandezza fisica e, da un punto di vista moderno, è collegata ad una riflessione sul concetto di *stato* (*micro-stati* e *macro-stati*) di un sistema.

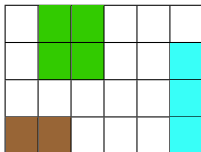
Ricapitolando...verso l'entropia

- Dalla riflessione sul *gioco del 63* si è giunti alla definizione d'**informazione**.
- L'idea d'informazione e di informazione media (entropia) ha un analogo in un sistemi fisici più comuni
- Storicamente l'entropia è una tipica grandezza fisica e, da un punto di vista moderno, è collegata ad una riflessione sul concetto di *stato* (*micro-stati* e *macro-stati*) di un sistema.

Nota metodologica

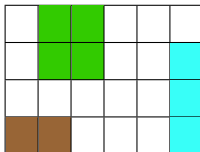
- Nel seminario saranno proposte alcune domande che sono state al centro della discussione in classe, a cui gli studenti hanno cercato autonomamente di formulare una risposta.
- Introduciamo un *gioco* ed alcune considerazioni teoriche per risolverlo.

Quanto è in disordine la mia stanza?



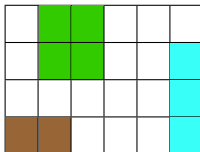
- La tua stanza è suddivisa in riquadri e può essere schematizzata con un rettangolo di 24 quadretti. I quadretti colorati sono i mobili di cui parleremo in seguito.
- Avrai a disposizione degli oggetti da disporre in modo *ordinato* e *disordinato* nei mobili.
- Possiamo valutare numericamente l'*ordine* e il *disordine* della stanza?

Quanto è in disordine la mia stanza?



- La tua stanza è suddivisa in riquadri e può essere schematizzata con un rettangolo di 24 quadretti. I quadretti colorati sono i mobili di cui parleremo in seguito.
- Avrai a disposizione degli oggetti da disporre in modo *ordinato* e *disordinato* nei mobili.
- Possiamo valutare numericamente l'*ordine* e il *disordine* della stanza?

Quanto è in disordine la mia stanza?



- La tua stanza è suddivisa in riquadri e può essere schematizzata con un rettangolo di 24 quadretti. I quadretti colorati sono i mobili di cui parleremo in seguito.
- Avrai a disposizione degli oggetti da disporre in modo *ordinato* e *disordinato* nei mobili.
- Possiamo valutare numericamente l'*ordine* e il *disordine* della stanza?

Ordine e disordine in un sistema

Per ragionare su ordine e disordine è necessario riflettere sulla nozione di **stato** di un sistema.

Lo stato di un sistema in fisica

- Come definiamo lo stato di un sistema in fisica?
- In meccanica classica lo stato è definito da posizione $\vec{x}$ e velocità (più precisamente la quantità di moto $\vec{p}$) per ogni particella ad un tempo t .
- Infatti il secondo principio della dinamica determina il moto a partire dalla posizione e della velocità iniziali.
- L'insieme delle coppie ordinate $(\vec{x}, \vec{p})$ possibili è detto spazio delle fasi.

Lo stato di un sistema in fisica

- Come definiamo lo stato di un sistema in fisica?
- In meccanica classica lo stato è definito da posizione $\vec{x}$ e velocità (più precisamente la quantità di moto $\vec{p}$) per ogni particella ad un tempo t .
- Infatti il secondo principio della dinamica determina il moto a partire dalla posizione e della velocità iniziali.
- L'insieme delle coppie ordinate $(\vec{x}, \vec{p})$ possibili è detto spazio delle fasi.

Lo stato di un sistema in fisica

- Come definiamo lo stato di un sistema in fisica?
- In meccanica classica lo stato è definito da posizione $\vec{x}$ e velocità (più precisamente la quantità di moto $\vec{p}$) per ogni particella ad un tempo t .
- Infatti il secondo principio della dinamica determina il moto a partire dalla posizione e della velocità iniziali.
- L'insieme delle coppie ordinate $(\vec{x}, \vec{p})$ possibili è detto spazio delle fasi.

Lo stato di un sistema in fisica

- Come definiamo lo stato di un sistema in fisica?
- In meccanica classica lo stato è definito da posizione $\vec{x}$ e velocità (più precisamente la quantità di moto $\vec{p}$) per ogni particella ad un tempo t .
- Infatti il secondo principio della dinamica determina il moto a partire dalla posizione e della velocità iniziali.
- L'insieme delle coppie ordinate $(\vec{x}, \vec{p})$ possibili è detto **spazio delle fasi**.

Cosa è un microstato?

- Consideriamo un sistema con molti corpi, un gas in un contenitore con pareti rigide.
- È formato da **atomi** o **molecole**
- Usualmente si misura un gas in litri o meglio in moli. Qual è l'ordine di grandezza del numero delle particelle che dovremo considerare?
- Circa $N_A \simeq 10^{24}$ particelle.
- L'insieme delle coppie ordinate $(\vec{x}, \vec{p})$ al tempo t di tutte le particelle nel contenitore è detto **microstato**.

Cosa è un microstato?

- Consideriamo un sistema con molti corpi, un gas in un contenitore con pareti rigide.
- È formato da **atomi** o **molecole**
- Usualmente si misura un gas in litri o meglio in moli. Qual è l'ordine di grandezza del numero delle particelle che dovremo considerare?
- Circa $N_A \simeq 10^{24}$ particelle.
- L'insieme delle coppie ordinate $(\vec{x}, \vec{p})$ al tempo t di tutte le particelle nel contenitore è detto **microstato**.

Cosa è un microstato?

- Consideriamo un sistema con molti corpi, un gas in un contenitore con pareti rigide.
- È formato da **atomi** o **molecole**
- Usualmente si misura un gas in litri o meglio in moli. Qual è l'ordine di grandezza del numero delle particelle che dovremo considerare?
- Circa $N_A \simeq 10^{24}$ particelle.
- L'insieme delle coppie ordinate $(\vec{x}, \vec{p})$ al tempo t di tutte le particelle nel contenitore è detto **microstato**.

Cosa è un microstato?

- Consideriamo un sistema con molti corpi, un gas in un contenitore con pareti rigide.
- È formato da **atomi** o **molecole**
- Usualmente si misura un gas in litri o meglio in moli. Qual è l'ordine di grandezza del numero delle particelle che dovremo considerare?
- Circa $N_A \simeq 10^{24}$ particelle.
- L'insieme delle coppie ordinate $(\vec{x}, \vec{p})$ al tempo t di tutte le particelle nel contenitore è detto **microstato**.

Cosa è un microstato?

- Consideriamo un sistema con molti corpi, un gas in un contenitore con pareti rigide.
- È formato da **atomi** o **molecole**
- Usualmente si misura un gas in litri o meglio in moli. Qual è l'ordine di grandezza del numero delle particelle che dovremo considerare?
- Circa $N_A \simeq 10^{24}$ particelle.
- L'insieme delle coppie ordinate $(\vec{x}, \vec{p})$ al tempo t di tutte le particelle nel contenitore è detto **microstato**.

Cosa è un microstato?

- Consideriamo un sistema con molti corpi, un gas in un contenitore con pareti rigide.
- È formato da **atomi** o **molecole**
- Usualmente si misura un gas in litri o meglio in moli. Qual è l'ordine di grandezza del numero delle particelle che dovremo considerare?
- Circa $N_A \simeq 10^{24}$ particelle.
- L'insieme delle coppie ordinate $(\vec{x}, \vec{p})$ al tempo t di tutte le particelle nel contenitore è detto **microstato**.

Cosa è un macrostato?

- Ora supponiamo di assegnare un'energia E al gas, quali conseguenze ci saranno per le singole particelle? Puoi immaginare esempi concreti che ti guidino nella riflessione?
- Ciascuna particella riceverà una parte dell'energia e si metterà in moto ed urterà contro le pareti del contenitore.
- Potremmo modificare lo stato di una mole di gas se modificassimo lo stato di singola particella?
- In effetti l'esperienza mostra che ciò è impossibile. Per questo si introduce l'idea di macrostato: uno stato definito da grandezze costruite calcolando medie sui microstati: temperatura, pressione e volume.

Cosa è un macrostato?

- Ora supponiamo di assegnare un'energia E al gas, quali conseguenze ci saranno per le singole particelle? Puoi immaginare esempi concreti che ti guidino nella riflessione?
- Ciascuna particella riceverà una parte dell'energia e si metterà in moto ed urterà contro le pareti del contenitore.
- Potremmo modificare lo stato di una mole di gas se modificassimo lo stato di singola particella?
- In effetti l'esperienza mostra che ciò è impossibile. Per questo si introduce l'idea di macrostato: uno stato definito da grandezze costruite calcolando medie sui microstati: temperatura, pressione e volume.

Cosa è un macrostato?

- Ora supponiamo di assegnare un'energia E al gas, quali conseguenze ci saranno per le singole particelle? Puoi immaginare esempi concreti che ti guidino nella riflessione?
- Ciascuna particella riceverà una parte dell'energia e si metterà in moto ed urterà contro le pareti del contenitore.
- Potremmo modificare lo stato di una mole di gas se modificassimo lo stato di singola particella?
- In effetti l'esperienza mostra che ciò è impossibile. Per questo si introduce l'idea di macrostato: uno stato definito da grandezze costruite calcolando medie sui microstati: temperatura, pressione e volume.

Cosa è un macrostato?

- Ora supponiamo di assegnare un'energia E al gas, quali conseguenze ci saranno per le singole particelle? Puoi immaginare esempi concreti che ti guidino nella riflessione?
- Ciascuna particella riceverà una parte dell'energia e si metterà in moto ed urterà contro le pareti del contenitore.
- Potremmo modificare lo stato di una mole di gas se modificassimo lo stato di singola particella?
- In effetti l'esperienza mostra che ciò è impossibile. Per questo si introduce l'idea di macrostato: uno stato definito da grandezze costruite calcolando medie sui microstati: temperatura, pressione e volume.

Cosa è un macrostato?

- Ora supponiamo di assegnare un'energia E al gas, quali conseguenze ci saranno per le singole particelle? Puoi immaginare esempi concreti che ti guidino nella riflessione?
- Ciascuna particella riceverà una parte dell'energia e si metterà in moto ed urterà contro le pareti del contenitore.
- Potremmo modificare lo stato di una mole di gas se modificassimo lo stato di singola particella?
- In effetti l'esperienza mostra che ciò è impossibile. Per questo si introduce l'idea di macrostato: uno stato definito da grandezze costruite calcolando medie sui microstati: temperatura, pressione e volume.

L'entropia di Boltzman

- L.Boltzmann ai primi del 1900 mostrò che se consideriamo:
 - E energia complessiva delle particelle di un gas,
 - $\Omega(E)$ volume di tutti i possibili microstati permessi alle particelle del gas.
 - La funzione

$$S(E) = k_B \ln(\Omega(E))$$

con $k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$. $S(E)$ è equivalente alla funzione entropia introdotta da Clausius.

- Si osservi che l'entropia di Boltzmann utilizza il logaritmo naturale. Vale la pena ricordare:

$$\ln(1) = 0, \quad \ln(a b) = \ln(a) + \ln(b) \quad \text{additività } a, b \in \mathbb{R}$$

L'entropia di Boltzman

- L.Boltzmann ai primi del 1900 mostrò che se consideriamo:
 - E energia complessiva delle particelle di un gas,
 - $\Omega(E)$ volume di tutti i possibili microstati permessi alle particelle del gas.
 - La funzione

$$S(E) = k_B \ln(\Omega(E))$$

con $k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$. $S(E)$ è equivalente alla funzione entropia introdotta da Clausius.

- Si osservi che l'entropia di Boltzmann utilizza il logaritmo naturale. Vale la pena ricordare:

$$\ln(1) = 0, \quad \ln(a b) = \ln(a) + \ln(b) \quad \text{additività } a, b \in \mathbb{R}$$

L'entropia di Boltzman

- L.Boltzmann ai primi del 1900 mostrò che se consideriamo:
 - E energia complessiva delle particelle di un gas,
 - $\Omega(E)$ volume di tutti i possibili microstati permessi alle particelle del gas.
 - La funzione

$$S(E) = k_B \ln(\Omega(E))$$

con $k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$. $S(E)$ è equivalente alla funzione entropia introdotta da Clausius.

- Si osservi che l'entropia di Boltzmann utilizza il logaritmo naturale. Vale la pena ricordare:

$$\ln(1) = 0, \quad \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b) \quad \text{additività } a, b \in \mathbb{R}$$

L'entropia di L. Boltzmann



Figura 1: L. Boltzmann (1844 - 1906)

A fissata energia E tutti i microstati compatibili sono contati da una funzione $\Omega(E)$, l'entropia secondo Boltzmann è definita da:

$$S(E) = k_B \ln \Omega(E).$$

L'entropia di Boltzman

A partire dalla formula $S(E) = k_B \ln(\Omega(E))$, osserviamo:

- Se aumentiamo E come cambia il volume $\Omega(E)$ occupato dai possibili stati delle particelle?
- In generale $\Omega(E)$ cresce se E cresce, decresce se E diminuisce. Ciò avviene anche se aumenta il numero di particelle o il volume.
- Corrispondentemente cambierà l'entropia $S(E)$ e la sua variazione positiva identifica il Secondo Principio della Termodinamica.
- Boltzman dimostrò che $S(E)$ è equivalente all'entropia termodinamica ed in particolare che la temperatura del gas può essere definita come:

$$\frac{1}{T} = \frac{\Delta S(E)}{\Delta E}$$

L'entropia di Boltzman

A partire dalla formula $S(E) = k_B \ln(\Omega(E))$, osserviamo:

- Se aumentiamo E come cambia il volume $\Omega(E)$ occupato dai possibili stati delle particelle?
- In generale $\Omega(E)$ cresce se E cresce, decresce se E diminuisce. Ciò avviene anche se aumenta il numero di particelle o il volume.
- Corrispondentemente cambierà l'entropia $S(E)$ e la sua variazione positiva identifica il Secondo Principio della Termodinamica.
- Boltzman dimostrò che $S(E)$ è equivalente all'entropia termodinamica ed in particolare che la temperatura del gas può essere definita come:

$$\frac{1}{T} = \frac{\Delta S(E)}{\Delta E}$$

L'entropia di Boltzman

A partire dalla formula $S(E) = k_B \ln(\Omega(E))$, osserviamo:

- Se aumentiamo E come cambia il volume $\Omega(E)$ occupato dai possibili stati delle particelle?
- In generale $\Omega(E)$ cresce se E cresce, decresce se E diminuisce. Ciò avviene anche se aumenta il numero di particelle o il volume.
- Corrispondentemente cambierà l'entropia $S(E)$ e la sua variazione positiva identifica il Secondo Principio della Termodinamica.
- Boltzman dimostrò che $S(E)$ è equivalente all'entropia termodinamica ed in particolare che la temperatura del gas può essere definita come:

$$\frac{1}{T} = \frac{\Delta S(E)}{\Delta E}$$

L'entropia di Boltzman

A partire dalla formula $S(E) = k_B \ln(\Omega(E))$, osserviamo:

- Se aumentiamo E come cambia il volume $\Omega(E)$ occupato dai possibili stati delle particelle?
- In generale $\Omega(E)$ cresce se E cresce, decresce se E diminuisce. Ciò avviene anche se aumenta il numero di particelle o il volume.
- Corrispondentemente cambierà l'entropia $S(E)$ e la sua variazione positiva identifica il Secondo Principio della Termodinamica.
- Boltzman dimostrò che $S(E)$ è equivalente all'entropia termodinamica ed in particolare che la temperatura del gas può essere definita come:

$$\frac{1}{T} = \frac{\Delta S(E)}{\Delta E}$$

L'entropia di Boltzman

A partire dalla formula $S(E) = k_B \ln(\Omega(E))$, osserviamo:

- Se aumentiamo E come cambia il volume $\Omega(E)$ occupato dai possibili stati delle particelle?
- In generale $\Omega(E)$ cresce se E cresce, decresce se E diminuisce. Ciò avviene anche se aumenta il numero di particelle o il volume.
- Corrispondentemente cambierà l'entropia $S(E)$ e la sua variazione positiva identifica il Secondo Principio della Termodinamica.
- Boltzman dimostrò che $S(E)$ è equivalente all'entropia termodinamica ed in particolare che la temperatura del gas può essere definita come:

$$\frac{1}{T} = \frac{\Delta S(E)}{\Delta E}$$

Ordine e disordine in una stanza

- Immagina la tua stanza: certamente ci sono N oggetti che arredano la stanza e che usi giornalmente. Questi oggetti possono evidentemente essere disposti in altrettante posizioni.
- Se tu assumessi di poterli disporre a tuo assoluto piacimento...ovvero *senza un criterio*...quale sarebbe la probabilità con la quale una penna sia fra le camicie?
- Tua madre entra in camera...e...visibilmente alterata, ti intima di mettere in ordine. Qual è la differenza fra un camera **ordinata** ed una **disordinata**?
- Per esempio se la camera è **in ordine**, è più o meno probabile trovare una camicia nell'armadio o sulla scrivania?
- Qual è la differenza fra uno stato **ordinato** della tua camera ed uno **disordinato**?

Ordine e disordine in una stanza

- Immagina la tua stanza: certamente ci sono N oggetti che arredano la stanza e che usi giornalmente. Questi oggetti possono evidentemente essere disposti in altrettante posizioni.
- Se tu assumessi di poterli disporre a tuo assoluto piacimento...ovvero *senza un criterio*...quale sarebbe la probabilità con la quale una penna sia fra le camicie?
- Tua madre entra in camera...e...visibilmente alterata, ti intima di mettere in ordine. Qual è la differenza fra un camera **ordinata** ed una **disordinata**?
- Per esempio se la camera **è in ordine**, è più o meno probabile trovare una camicia nell'armadio o sulla scrivania?
- Qual è la differenza fra uno stato **ordinato** della tua camera ed uno **disordinato**?

Ordine e disordine in una stanza

- Immagina la tua stanza: certamente ci sono N oggetti che arredano la stanza e che usi giornalmente. Questi oggetti possono evidentemente essere disposti in altrettante posizioni.
- Se tu assumessi di poterli disporre a tuo assoluto piacimento...ovvero *senza un criterio*...quale sarebbe la probabilità con la quale una penna sia fra le camicie?
- Tua madre entra in camera...e...visibilmente alterata, ti intima di mettere in ordine. Qual è la differenza fra un camera **ordinata** ed una **disordinata**?
- Per esempio se la camera **è in ordine**, è più o meno probabile trovare una camicia nell'armadio o sulla scrivania?
- Qual è la differenza fra uno stato **ordinato** della tua camera ed uno **disordinato**?

Ordine e disordine in una stanza

- Immagina la tua stanza: certamente ci sono N oggetti che arredano la stanza e che usi giornalmente. Questi oggetti possono evidentemente essere disposti in altrettante posizioni.
- Se tu assumessi di poterli disporre a tuo assoluto piacimento...ovvero *senza un criterio*...quale sarebbe la probabilità con la quale una penna sia fra le camicie?
- Tua madre entra in camera...e...visibilmente alterata, ti intima di mettere in ordine. Qual è la differenza fra un camera **ordinata** ed una **disordinata**?
- Per esempio se la camera è **in ordine**, è più o meno probabile trovare una camicia nell'armadio o sulla scrivania?
- Qual è la differenza fra uno stato **ordinato** della tua camera ed uno **disordinato**?

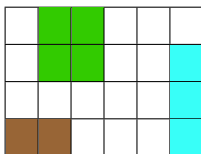
Ordine e disordine in una stanza

- Immagina la tua stanza: certamente ci sono N oggetti che arredano la stanza e che usi giornalmente. Questi oggetti possono evidentemente essere disposti in altrettante posizioni.
- Se tu assumessi di poterli disporre a tuo assoluto piacimento...ovvero *senza un criterio*...quale sarebbe la probabilità con la quale una penna sia fra le camicie?
- Tua madre entra in camera...e...visibilmente alterata, ti intima di mettere in ordine. Qual è la differenza fra un camera **ordinata** ed una **disordinata**?
- Per esempio se la camera **è in ordine**, è più o meno probabile trovare una camicia nell'armadio o sulla scrivania?
- Qual è la differenza fra uno stato **ordinato** della tua camera ed uno **disordinato**?

Ordine e disordine in una stanza

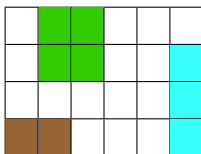
- Immagina la tua stanza: certamente ci sono N oggetti che arredano la stanza e che usi giornalmente. Questi oggetti possono evidentemente essere disposti in altrettante posizioni.
- Se tu assumessi di poterli disporre a tuo assoluto piacimento...ovvero *senza un criterio*...quale sarebbe la probabilità con la quale una penna sia fra le camicie?
- Tua madre entra in camera...e...visibilmente alterata, ti intima di mettere in ordine. Qual è la differenza fra un camera **ordinata** ed una **disordinata**?
- Per esempio se la camera **è in ordine**, è più o meno probabile trovare una camicia nell'armadio o sulla scrivania?
- Qual è la differenza fra uno stato **ordinato** della tua camera ed uno **disordinato**?

Scheda: ordine e disordine nella *mia* stanza



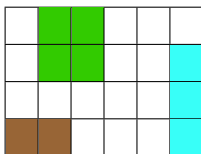
- La tua stanza è suddivisa in riquadri e può essere schematizzata con un rettangolo di 24 quadretti.
- Disegna due copie della stanza.
- I 4 quadretti verdi indicano la scrivania, i 2 quadretti marroni sono la libreria e i 3 azzurri, l'armadio.
- La tua stanza come sistema fisico può essere descritto da due stati: S_1 = ordinata e S_2 = disordinata.
- Immagina di avere una penna P , un libro L ed una camicia C .

Scheda: ordine e disordine nella *mia* stanza



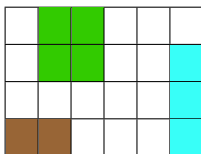
- La tua stanza è suddivisa in riquadri e può essere schematizzata con un rettangolo di 24 quadretti.
- **Disegna due copie della stanza.**
- I 4 quadretti verdi indicano la scrivania, i 2 quadretti marroni sono la libreria e i 3 azzurri, l'armadio.
- La tua stanza come sistema fisico può essere descritto da due stati: S_1 = ordinata e S_2 = disordinata.
- Immagina di avere una penna P , un libro L ed una camicia C .

Scheda: ordine e disordine nella *mia* stanza



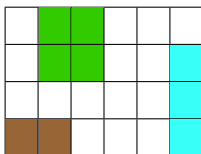
- La tua stanza è suddivisa in riquadri e può essere schematizzata con un rettangolo di 24 quadretti.
- **Disegna due copie della stanza.**
- I 4 quadretti **verdi** indicano la **scrivania**, i 2 quadretti **marroni** sono la **libreria** e i 3 **azzurri**, **l'armadio**.
- La tua stanza come sistema fisico può essere descritto da due stati: S_1 = ordinata e S_2 = disordinata.
- Immagina di avere una penna P , un libro L ed una camicia C .

Scheda: ordine e disordine nella *mia* stanza



- La tua stanza è suddivisa in riquadri e può essere schematizzata con un rettangolo di 24 quadretti.
- **Disegna due copie della stanza.**
- I 4 quadretti **verdi** indicano la **scrivania**, i 2 quadretti **marroni** sono la **libreria** e i 3 **azzurri**, l'**armadio**.
- La tua stanza come sistema fisico può essere descritto da due stati: S_1 = ordinata e S_2 = disordinata.
- Immagina di avere una penna P , un libro L ed una camicia C .

Scheda: ordine e disordine nella *mia* stanza



- La tua stanza è suddivisa in riquadri e può essere schematizzata con un rettangolo di 24 quadretti.
- Disegna due copie della stanza.
- I 4 quadretti verdi indicano la scrivania, i 2 quadretti marroni sono la libreria e i 3 azzurri, l'armadio.
- La tua stanza come sistema fisico può essere descritto da due stati: S_1 = ordinata e S_2 = disordinata.
- Immagina di avere una penna P , un libro L ed una camicia C .

Scheda: ordine e disordine nella *mia* stanza

- Usando la scheda (o disegno) disponi P , L e C in modoragionevolmente ordinato S_1 ... :-) Quante possibili posizioni puoi scegliere per *ciascun* oggetto mantenendo la stanza ordinata?
- Usando una seconda scheda (o disegno) disponi P , L e C in mododisordinato S_2 ... :-/ Quante possibili posizioni puoi scegliere per *ciascun* oggetto mantenendo la stanza disordinata?

Sei autorizzato ad essere veramente disordinato quindi potresti, per esempio, mettere la penna e la camicia nello stesso riquadro!!!

- Gli stati S_1 e S_2 della stanza sono due esempi di **stati macroscopici**.
- Una scelta per le posizioni di L , P e C forma invece uno stato **microscopico**. Gli oggetti sono fermi...per fortuna, quindi non dovremo considerare la velocità.

Scheda: ordine e disordine nella *mia* stanza

- Usando la scheda (o disegno) disponi P , L e C in modoragionevolmente ordinato S_1 ... :-) Quante possibili posizioni puoi scegliere per *ciascun* oggetto mantenendo la stanza ordinata?
- Usando una seconda scheda (o disegno) disponi P , L e C in mododisordinato S_2 ... :-/ Quante possibili posizioni puoi scegliere per *ciascun* oggetto mantenendo la stanza disordinata?

Sei autorizzato ad essere veramente disordinato quindi potresti, per esempio, mettere la penna e la camicia nello stesso riquadro!!!

- Gli stati S_1 e S_2 della stanza sono due esempi di **stati macroscopici**.
- Una scelta per le posizioni di L , P e C forma invece uno stato **microscopico**. Gli oggetti sono fermi...per fortuna, quindi non dovremo considerare la velocità.

Scheda: ordine e disordine nella *mia* stanza

- Usando la scheda (o disegno) disponi P , L e C in modoragionevolmente ordinato S_1 ... :-) Quante possibili posizioni puoi scegliere per *ciascun* oggetto mantenendo la stanza ordinata?
- Usando una seconda scheda (o disegno) disponi P , L e C in mododisordinato S_2 ... :-/ Quante possibili posizioni puoi scegliere per *ciascun* oggetto mantenendo la stanza disordinata?

Sei autorizzato ad essere veramente disordinato quindi potresti, per esempio, mettere la penna e la camicia nello stesso riquadro!!!

- Gli stati S_1 e S_2 della stanza sono due esempi di **stati macroscopici**.
- Una scelta per le posizioni di L , P e C forma invece uno stato **microscopico**. Gli oggetti sono fermi...per fortuna, quindi non dovremo considerare la velocità.

Scheda: ordine e disordine nella *mia* stanza

- Usando la scheda (o disegno) disponi P , L e C in modoragionevolmente ordinato S_1 ... :-) Quante possibili posizioni puoi scegliere per *ciascun* oggetto mantenendo la stanza ordinata?
- Usando una seconda scheda (o disegno) disponi P , L e C in mododisordinato S_2 ... :-/ Quante possibili posizioni puoi scegliere per *ciascun* oggetto mantenendo la stanza disordinata?

Sei autorizzato ad essere veramente disordinato quindi potresti, per esempio, mettere la penna e la camicia nello stesso riquadro!!!

- Gli stati S_1 e S_2 della stanza sono due esempi di **stati macroscopici**.
- Una scelta per le posizioni di L , P e C forma invece uno stato **microscopico**. Gli oggetti sono fermi...per fortuna, quindi non dovremo considerare la velocità.

Scheda: ordine e disordine nella *mia* stanza

- Usando la scheda (o disegno) disponi P , L e C in modoragionevolmente ordinato S_1 ... :-) Quante possibili posizioni puoi scegliere per *ciascun* oggetto mantenendo la stanza ordinata?
- Usando una seconda scheda (o disegno) disponi P , L e C in mododisordinato S_2 ... :-/ Quante possibili posizioni puoi scegliere per *ciascun* oggetto mantenendo la stanza disordinata?

Sei autorizzato ad essere veramente disordinato quindi potresti, per esempio, mettere la penna e la camicia nello stesso riquadro!!!

- Gli stati S_1 e S_2 della stanza sono due esempi di **stati macroscopici**.
- Una scelta per le posizioni di L , P e C forma invece uno stato **microscopico**. Gli oggetti sono fermi...per fortuna, quindi non dovremo considerare la velocità.

Uso dell'entropia di Boltzmann

- L'entropia secondo Boltzmann si calcola:
$$S(E) = k_B \ln(\Omega(E)).$$
- $\Omega(E)$ identifica tutti i possibili stati microscopici dei corpi coinvolti, nel caso di P , L e C . I tre oggetti sono fermi hanno dunque energia cinetica nulla, quindi la funzione $\Omega(E)$ dipende esclusivamente dalle loro posizioni e quindi dalle aeree (quadretti) che possono occupare:
 - $\Gamma_i(P)$: possibili quadretti occupati dalla penna nello stato S_i .
 - $\Gamma_i(L)$: possibili quadretti occupati dal libro nello stato S_i .
 - $\Gamma_i(C)$: possibili quadretti occupati dalla camicia nello stato S_i .
 - Γ : area totale disponibile.

Uso dell'entropia di Boltzmann

- L'entropia secondo Boltzmann si calcola:
$$S(E) = k_B \ln(\Omega(E)).$$
- $\Omega(E)$ identifica tutti i possibili stati microscopici dei corpi coinvolti, nel caso di P , L e C . I tre oggetti sono fermi hanno dunque energia cinetica nulla, quindi la funzione $\Omega(E)$ dipende esclusivamente dalle loro posizioni e quindi dalle aeree (quadretti) che possono occupare:
 - $\Gamma_i(P)$: possibili quadretti occupati dalla penna nello stato S_i .
 - $\Gamma_i(L)$: possibili quadretti occupati dal libro nello stato S_i .
 - $\Gamma_i(C)$: possibili quadretti occupati dalla camicia nello stato S_i .
 - Γ : area totale disponibile.

Uso dell'entropia di Boltzmann

- L'entropia secondo Boltzmann si calcola:
$$S(E) = k_B \ln(\Omega(E)).$$
- $\Omega(E)$ identifica tutti i possibili stati microscopici dei corpi coinvolti, nel caso di P , L e C . I tre oggetti sono fermi hanno dunque energia cinetica nulla, quindi la funzione $\Omega(E)$ dipende esclusivamente dalle loro posizioni e quindi dalle aeree (quadretti) che possono occupare:
 - $\Gamma_i(P)$: possibili quadretti occupati dalla penna nello stato S_i .
 - $\Gamma_i(L)$: possibili quadretti occupati dal libro nello stato S_i .
 - $\Gamma_i(C)$: possibili quadretti occupati dalla camicia nello stato S_i .
 - Γ : area totale disponibile.

Uso dell'entropia di Boltzmann

- Per contare il numero di possibili stati nello stato $i = 1, 2$ sarà

$$\Gamma_i(P) \Gamma_i(L) \Gamma_i(C)$$

- Come si interpretano i rapporti:

$$\Gamma_i(P)/\Gamma, \quad \Gamma_i(L)/\Gamma, \quad \Gamma_i(C)/\Gamma ?$$

- Si tratta delle probabilità di trovare rispettivamente P , L e C in certo luogo della stanza.
- Osserviamo il calcolo esplicito dell'entropia secondo Boltzmann:

$$\begin{aligned} S_i(P, L, C) &= k_B \ln(\Omega_i) = k_B \ln(\Gamma_i(P) \Gamma_i(L) \Gamma_i(C) / \Gamma^3) = \\ &= k_B [\ln(\Gamma_i(P)) + \ln(\Gamma_i(L)) + \ln(\Gamma_i(C)) - 3 \ln(\Gamma)] \end{aligned}$$

Uso dell'entropia di Boltzmann

- Per contare il numero di possibili stati nello stato $i = 1, 2$ sarà

$$\Gamma_i(P) \Gamma_i(L) \Gamma_i(C)$$

- Come si interpretano i rapporti:

$$\Gamma_i(P)/\Gamma, \quad \Gamma_i(L)/\Gamma, \quad \Gamma_i(C)/\Gamma ?$$

- Si tratta delle probabilità di trovare rispettivamente P , L e C in certo luogo della stanza.
- Osserviamo il calcolo esplicito dell'entropia secondo Boltzmann:

$$\begin{aligned} S_i(P, L, C) &= k_B \ln(\Omega_i) = k_B \ln(\Gamma_i(P) \Gamma_i(L) \Gamma_i(C) / \Gamma^3) = \\ &= k_B [\ln(\Gamma_i(P)) + \ln(\Gamma_i(L)) + \ln(\Gamma_i(C)) - 3 \ln(\Gamma)] \end{aligned}$$

Uso dell'entropia di Boltzmann

- Per contare il numero di possibili stati nello stato $i = 1, 2$ sarà

$$\Gamma_i(P) \Gamma_i(L) \Gamma_i(C)$$

- Come si interpretano i rapporti:

$$\Gamma_i(P)/\Gamma, \quad \Gamma_i(L)/\Gamma, \quad \Gamma_i(C)/\Gamma ?$$

- Si tratta delle probabilità di trovare rispettivamente P , L e C in certo luogo della stanza.
- Osserviamo il calcolo esplicito dell'entropia secondo Boltzmann:

$$\begin{aligned} S_i(P, L, C) &= k_B \ln(\Omega_i) = k_B \ln(\Gamma_i(P) \Gamma_i(L) \Gamma_i(C) / \Gamma^3) = \\ &= k_B [\ln(\Gamma_i(P)) + \ln(\Gamma_i(L)) + \ln(\Gamma_i(C)) - 3 \ln(\Gamma)] \end{aligned}$$

Uso dell'entropia di Boltzmann

- Per contare il numero di possibili stati nello stato $i = 1, 2$ sarà

$$\Gamma_i(P) \Gamma_i(L) \Gamma_i(C)$$

- Come si interpretano i rapporti:

$$\Gamma_i(P)/\Gamma, \quad \Gamma_i(L)/\Gamma, \quad \Gamma_i(C)/\Gamma ?$$

- Si tratta delle probabilità di trovare rispettivamente P , L e C in certo luogo della stanza.
- Osserviamo il calcolo esplicito dell'entropia secondo Boltzmann:

$$\begin{aligned} S_i(P, L, C) &= k_B \ln(\Omega_i) = k_B \ln(\Gamma_i(P) \Gamma_i(L) \Gamma_i(C) / \Gamma^3) = \\ &= k_B [\ln(\Gamma_i(P)) + \ln(\Gamma_i(L)) + \ln(\Gamma_i(C)) - 3 \ln(\Gamma)] \end{aligned}$$

Uso dell'entropia di Boltzmann

- Per contare il numero di possibili stati nello stato $i = 1, 2$ sarà

$$\Gamma_i(P) \Gamma_i(L) \Gamma_i(C)$$

- Come si interpretano i rapporti:

$$\Gamma_i(P)/\Gamma, \quad \Gamma_i(L)/\Gamma, \quad \Gamma_i(C)/\Gamma ?$$

- Si tratta delle probabilità di trovare rispettivamente P , L e C in certo luogo della stanza.
- Osserviamo il calcolo esplicito dell'entropia secondo Boltzmann:

$$\begin{aligned} S_i(P, L, C) &= k_B \ln(\Omega_i) = k_B \ln(\Gamma_i(P) \Gamma_i(L) \Gamma_i(C) / \Gamma^3) = \\ &= k_B [\ln(\Gamma_i(P)) + \ln(\Gamma_i(L)) + \ln(\Gamma_i(C)) - 3 \ln(\Gamma)] \end{aligned}$$

Uso dell'entropia di Boltzmann

In termodinamica sono rilevanti solo le differenze di entropia non dipendono dalla costante Γ , infatti:

$$\begin{aligned}
 \Delta S &= S_2(P, L, C) - S_1(P, L, C) = \\
 &= k_B \ln \left(\frac{\Gamma_2(P) \Gamma_2(L) \Gamma_2(C)}{\Gamma^3} \right) - k_B \ln \left(\frac{\Gamma_1(P) \Gamma_1(L) \Gamma_1(C)}{\Gamma^3} \right) = \\
 &= k_B \ln (\Gamma_2(P) \Gamma_2(L) \Gamma_2(C)) - k_B \ln (\Gamma_1(P) \Gamma_1(L) \Gamma_1(C)).
 \end{aligned}$$

Calcolo dell'entropia di Boltzmann per S_1

Per lo stato *ordinato*:

- Per la penna $\Gamma_1(P) = 4$.
- Per il libro $\Gamma_1(L) = 2$.
- Per la camicia $\Gamma_1(C) = 3$.
- L'entropia, a meno di $-3 \ln \Gamma$ sarà:

$$S_1(P, L, C) = k_B (\ln(4) + \ln(2) + \ln(3))$$

Calcolo dell'entropia di Boltzmann per S_1

Per lo stato *ordinato*:

- Per la penna $\Gamma_1(P) = 4$.
- Per il libro $\Gamma_1(L) = 2$.
- Per la camicia $\Gamma_1(C) = 3$.
- L'entropia, a meno di $-3 \ln \Gamma$ sarà:

$$S_1(P, L, C) = k_B (\ln(4) + \ln(2) + \ln(3))$$

Calcolo dell'entropia di Boltzmann per S_2

Per lo stato *disordinato*:

- Per la penna $\Gamma_2(P) = 24 - 4 = 20$.
- Per il libro $\Gamma_2(L) = 24 - 2 = 22$.
- Per la camicia $\Gamma_2(C) = 24 - 3 = 21$.
- L'entropia, a meno di $-3 \ln \Gamma$ sarà:

$$S_2(P, L, C) = k_B (\ln(20) + \ln(22) + \ln(21)) =$$

$$= k_B (\ln(4) + \ln(2) + \ln(3) + \ln(5) + \ln(11) + \ln(7)) > S_1(P, L, C)$$

Calcolo dell'entropia di Boltzmann per S_2

Per lo stato *disordinato*:

- Per la penna $\Gamma_2(P) = 24 - 4 = 20$.
- Per il libro $\Gamma_2(L) = 24 - 2 = 22$.
- Per la camicia $\Gamma_2(C) = 24 - 3 = 21$.
- L'entropia, a meno di $-3 \ln \Gamma$ sarà:

$$\begin{aligned}
 S_2(P, L, C) &= k_B (\ln(20) + \ln(22) + \ln(21)) = \\
 &= k_B (\ln(4) + \ln(2) + \ln(3) + \ln(5) + \ln(11) + \ln(7)) > S_1(P, L, C)
 \end{aligned}$$

L'entropia della stanza disordinata è maggiore di quella ordinata... ;-)))

...e quindi il Secondo Principio della Termodinamica applicato alla tua stanza...

L'entropia della stanza disordinata è maggiore di quella ordinata... ;-)))

...e quindi il Secondo Principio della Termodinamica applicato alla tua stanza...





Entropia di sequenze finite

- Per introdurre la nozione di **entropia di una sequenza di simboli** si è proposto di approfondire l'esame delle sequenze viste in precedenza.

Sistema o *ensemble*

- Supponiamo che $\mathcal{A}$ sia un insieme di simboli (es: una collezione di numeri o lettere, un alfabeto).
- Chiameremo *sistema* o *ensemble* la tripla $\mathcal{X} = (x, \mathcal{A}, P)$ formata da x , variabile aleatoria, detta **stato**, $\mathcal{A} = \{x_1, \dots, x_N\}$ sono i possibili valori di x (**stati**) e $P = \{p_1, \dots, p_N\}$ è la distribuzione di probabilità degli stati $\mathbb{P}(x_i) = p_i$ con $\sum_{i=1}^N p_i = 1$.
- Dato $\mathcal{A}$ e $L \in \mathbb{N}$ si potrà considerare $\mathcal{A}^L$: formato dalle L -ple $\xi_L = (x_{i_1}, \dots, x_{i_L})$ o stringhe di L elementi di $\mathcal{A}$.
- $\xi_L \in \mathcal{A}^L$ è un **microstato**.
- Gli elementi di una partizione di $\mathcal{A}^L$ costituiscono una scelta di **macrostati** per $\mathcal{A}^L$.

Sistema o *ensemble*

- Supponiamo che $\mathcal{A}$ sia un insieme di simboli (es: una collezione di numeri o lettere, un alfabeto).
- Chiameremo *sistema* o *ensemble* la tripla $\mathcal{X} = (x, \mathcal{A}, P)$ formata da x , variabile aleatoria, detta **stato**, $\mathcal{A} = \{x_1, \dots, x_N\}$ sono i possibili valori di x (**stati**) e $P = \{p_1, \dots, p_N\}$ è la distribuzione di probabilità degli stati $\mathbb{P}(x_i) = p_i$ con $\sum_{i=1}^N p_i = 1$.
- Dato $\mathcal{A}$ e $L \in \mathbb{N}$ si potrà considerare $\mathcal{A}^L$: formato dalle L -ple $\xi_L = (x_{i_1}, \dots, x_{i_L})$ o stringhe di L elementi di $\mathcal{A}$.
- $\xi_L \in \mathcal{A}^L$ è un **microstato**.
- Gli elementi di una partizione di $\mathcal{A}^L$ costituiscono una scelta di **macrostati** per $\mathcal{A}^L$.

Sistema o *ensemble*

- Supponiamo che $\mathcal{A}$ sia un insieme di simboli (es: una collezione di numeri o lettere, un alfabeto).
- Chiameremo *sistema* o *ensemble* la tripla $\mathcal{X} = (x, \mathcal{A}, P)$ formata da x , variabile aleatoria, detta **stato**, $\mathcal{A} = \{x_1, \dots, x_N\}$ sono i possibili valori di x (**stati**) e $P = \{p_1, \dots, p_N\}$ è la distribuzione di probabilità degli stati $\mathbb{P}(x_i) = p_i$ con $\sum_{i=1}^N p_i = 1$.
- Dato $\mathcal{A}$ e $L \in \mathbb{N}$ si potrà considerare $\mathcal{A}^L$: formato dalle L -ple $\xi_L = (x_{i_1}, \dots, x_{i_L})$ o stringhe di L elementi di $\mathcal{A}$.
- $\xi_L \in \mathcal{A}^L$ è un **microstato**.
- Gli elementi di una partizione di $\mathcal{A}^L$ costituiscono una scelta di **macrostati** per $\mathcal{A}^L$.

Sistema o *ensemble*

- Supponiamo che $\mathcal{A}$ sia un insieme di simboli (es: una collezione di numeri o lettere, un alfabeto).
- Chiameremo *sistema* o *ensemble* la tripla $\mathcal{X} = (x, \mathcal{A}, P)$ formata da x , variabile aleatoria, detta **stato**, $\mathcal{A} = \{x_1, \dots, x_N\}$ sono i possibili valori di x (**stati**) e $P = \{p_1, \dots, p_N\}$ è la distribuzione di probabilità degli stati $\mathbb{P}(x_i) = p_i$ con $\sum_{i=1}^N p_i = 1$.
- Dato $\mathcal{A}$ e $L \in \mathbb{N}$ si potrà considerare $\mathcal{A}^L$: formato dalle L -ple $\xi_L = (x_{i_1}, \dots, x_{i_L})$ o stringhe di L elementi di $\mathcal{A}$.
- $\xi_L \in \mathcal{A}^L$ è un **microstato**.
- Gli elementi di una partizione di $\mathcal{A}^L$ costituiscono una scelta di **macrostati** per $\mathcal{A}^L$.

Sistema o *ensemble*

- Supponiamo che $\mathcal{A}$ sia un insieme di simboli (es: una collezione di numeri o lettere, un alfabeto).
- Chiameremo *sistema* o *ensemble* la tripla $\mathcal{X} = (x, \mathcal{A}, P)$ formata da x , variabile aleatoria, detta **stato**, $\mathcal{A} = \{x_1, \dots, x_N\}$ sono i possibili valori di x (**stati**) e $P = \{p_1, \dots, p_N\}$ è la distribuzione di probabilità degli stati $\mathbb{P}(x_i) = p_i$ con $\sum_{i=1}^N p_i = 1$.
- Dato $\mathcal{A}$ e $L \in \mathbb{N}$ si potrà considerare $\mathcal{A}^L$: formato dalle L -ple $\xi_L = (x_{i_1}, \dots, x_{i_L})$ o stringhe di L elementi di $\mathcal{A}$.
- $\xi_L \in \mathcal{A}^L$ è un **microstato**.
- Gli elementi di una partizione di $\mathcal{A}^L$ costituiscono una scelta di **macrostati** per $\mathcal{A}^L$.

Sistema o *ensemble*

- Supponiamo che $\mathcal{A}$ sia un insieme di simboli (es: una collezione di numeri o lettere, un alfabeto).
- Chiameremo *sistema* o *ensemble* la tripla $\mathcal{X} = (x, \mathcal{A}, P)$ formata da x , variabile aleatoria, detta **stato**, $\mathcal{A} = \{x_1, \dots, x_N\}$ sono i possibili valori di x (**stati**) e $P = \{p_1, \dots, p_N\}$ è la distribuzione di probabilità degli stati $\mathbb{P}(x_i) = p_i$ con $\sum_{i=1}^N p_i = 1$.
- Dato $\mathcal{A}$ e $L \in \mathbb{N}$ si potrà considerare $\mathcal{A}^L$: formato dalle L -ple $\xi_L = (x_{i_1}, \dots, x_{i_L})$ o stringhe di L elementi di $\mathcal{A}$.
- $\xi_L \in \mathcal{A}^L$ è un **microstato**.
- Gli elementi di una partizione di $\mathcal{A}^L$ costituiscono una scelta di **macrostati** per $\mathcal{A}^L$.

Esempio (0)

- Una "moneta" $\mathcal{X}$: $\mathcal{A} = \{T, C\}$, i microstati sono T e C con $\mathbb{P}(T) = \mathbb{P}(C) = 1/2$.
- Una "moneta truccata" $\mathcal{X}$: $\mathcal{A} = \{T, C\}$, i microstati sono T con C , $\mathbb{P}(T) = 2/3$, $\mathbb{P}(C) = 1/3$.
- In tutti e due i casi le stringhe di lunghezza L formate da elementi di $\mathcal{A}$ sono *microstati* di $\mathcal{A}^L$.

Esempio (0)

- Una "moneta" $\mathcal{X}$: $\mathcal{A} = \{T, C\}$, i microstati sono T e C con $\mathbb{P}(T) = \mathbb{P}(C) = 1/2$.
- Una "moneta truccata" $\mathcal{X}$: $\mathcal{A} = \{T, C\}$, i microstati sono T con C , $\mathbb{P}(T) = 2/3$, $\mathbb{P}(C) = 1/3$.
- In tutti e due i casi le stringhe di lunghezza L formate da elementi di $\mathcal{A}$ sono *microstati* di $\mathcal{A}^L$.

Esempio (0)

- Una "moneta" $\mathcal{X}$: $\mathcal{A} = \{T, C\}$, i microstati sono T e C con $\mathbb{P}(T) = \mathbb{P}(C) = 1/2$.
- Una "moneta truccata" $\mathcal{X}$: $\mathcal{A} = \{T, C\}$, i microstati sono T con C , $\mathbb{P}(T) = 2/3$, $\mathbb{P}(C) = 1/3$.
- In tutti e due i casi le stringhe di lunghezza L formate da elementi di $\mathcal{A}$ sono *microstati* di $\mathcal{A}^L$.

Esempio (0)

- Una "moneta" $\mathcal{X}$: $\mathcal{A} = \{T, C\}$, i microstati sono T e C con $\mathbb{P}(T) = \mathbb{P}(C) = 1/2$.
- Una "moneta truccata" $\mathcal{X}$: $\mathcal{A} = \{T, C\}$, i microstati sono T con C , $\mathbb{P}(T) = 2/3$, $\mathbb{P}(C) = 1/3$.
- In tutti e due i casi le stringhe di lunghezza L formate da elementi di $\mathcal{A}$ sono *microstati* di $\mathcal{A}^L$.

Esempio (1)

- $\mathcal{X}$: $\mathcal{A} = \{T, C\}$ con $\mathbb{P}(T) = \mathbb{P}(C) = 1/2$.
- Quali sono le possibili stringhe di lunghezza 2?
- $\mathcal{A}^2 = \{TT, TC, CT, CC\}$
- In quante partizioni possiamo suddividere $\mathcal{A}^2$?
- Si potrebbe scegliere $\mathcal{X}_2$:

Macrostatì	TT	TC	CT	CC
Probabilità	1/4	1/4	1/4	1/4

- Oppure si potrebbe scegliere $\mathcal{X}_{sym}$:

Macrostatì	TT	{TC,CT}	CC
Probabilità	1/3	1/3	1/3

Esempio (1)

- $\mathcal{X}$: $\mathcal{A} = \{T, C\}$ con $\mathbb{P}(T) = \mathbb{P}(C) = 1/2$.
- Quali sono le possibili stringhe di lunghezza 2?
- $\mathcal{A}^2 = \{TT, TC, CT, CC\}$
- In quante partizioni possiamo suddividere $\mathcal{A}^2$?
- Si potrebbe scegliere $\mathcal{X}_2$:

Macrostatì	TT	TC	CT	CC
Probabilità	1/4	1/4	1/4	1/4

- Oppure si potrebbe scegliere $\mathcal{X}_{sym}$:

Macrostatì	TT	{TC,CT}	CC
Probabilità	1/3	1/3	1/3

Esempio (1)

- $\mathcal{X}$: $\mathcal{A} = \{T, C\}$ con $\mathbb{P}(T) = \mathbb{P}(C) = 1/2$.
- Quali sono le possibili stringhe di lunghezza 2?
- $\mathcal{A}^2 = \{TT, TC, CT, CC\}$
- In quante partizioni possiamo suddividere $\mathcal{A}^2$?
- Si potrebbe scegliere $\mathcal{X}_2$:

Macrostatì	TT	TC	CT	CC
Probabilità	1/4	1/4	1/4	1/4

- Oppure si potrebbe scegliere $\mathcal{X}_{sym}$:

Macrostatì	TT	{TC,CT}	CC
Probabilità	1/3	1/3	1/3

Esempio (1)

- $\mathcal{X}$: $\mathcal{A} = \{T, C\}$ con $\mathbb{P}(T) = \mathbb{P}(C) = 1/2$.
- Quali sono le possibili stringhe di lunghezza 2?
- $\mathcal{A}^2 = \{TT, TC, CT, CC\}$
- In quante partizioni possiamo suddividere $\mathcal{A}^2$?
- Si potrebbe scegliere $\mathcal{X}_2$:

Macrostatì	TT	TC	CT	CC
Probabilità	1/4	1/4	1/4	1/4

- Oppure si potrebbe scegliere $\mathcal{X}_{sym}$:

Macrostatì	TT	{TC,CT}	CC
Probabilità	1/3	1/3	1/3

Esempio (1)

- $\mathcal{X}$: $\mathcal{A} = \{T, C\}$ con $\mathbb{P}(T) = \mathbb{P}(C) = 1/2$.
- Quali sono le possibili stringhe di lunghezza 2?
- $\mathcal{A}^2 = \{TT, TC, CT, CC\}$
- In quante partizioni possiamo suddividere $\mathcal{A}^2$?
- Si potrebbe scegliere $\mathcal{X}_2$:

Macrostatì	TT	TC	CT	CC
Probabilità	1/4	1/4	1/4	1/4

- Oppure si potrebbe scegliere $\mathcal{X}_{sym}$:

Macrostatì	TT	{TC,CT}	CC
Probabilità	1/3	1/3	1/3

Esempio (1)

- $\mathcal{X}$: $\mathcal{A} = \{T, C\}$ con $\mathbb{P}(T) = \mathbb{P}(C) = 1/2$.
- Quali sono le possibili stringhe di lunghezza 2?
- $\mathcal{A}^2 = \{TT, TC, CT, CC\}$
- In quante partizioni possiamo suddividere $\mathcal{A}^2$?
- Si potrebbe scegliere $\mathcal{X}_2$:

Macrostatì	TT	TC	CT	CC
Probabilità	1/4	1/4	1/4	1/4

- Oppure si potrebbe scegliere $\mathcal{X}_{sym}$:

Macrostatì	TT	{TC,CT}	CC
Probabilità	1/3	1/3	1/3

Esempio (1)

- $\mathcal{X}$: $\mathcal{A} = \{T, C\}$ con $\mathbb{P}(T) = \mathbb{P}(C) = 1/2$.
- Quali sono le possibili stringhe di lunghezza 2?
- $\mathcal{A}^2 = \{TT, TC, CT, CC\}$
- In quante partizioni possiamo suddividere $\mathcal{A}^2$?
- Si potrebbe scegliere $\mathcal{X}_2$:

Macrostatì	TT	TC	CT	CC
Probabilità	1/4	1/4	1/4	1/4

- Oppure si potrebbe scegliere $\mathcal{X}_{sym}$:

Macrostatì	TT	{TC,CT}	CC
Probabilità	1/3	1/3	1/3

Esempio (2)

- $\mathcal{A} = \{1, 0\}$, i microstati sono 1 e 0
e $\mathbb{P}(0) = \mathbb{P}(1) = 1/2$.
- Quali sono le possibili stringhe di lunghezza 3?
- $\mathcal{A}^3 = \{000, 100, 010, 001, 110, 101, 011, 111\}$
- In quante partizioni possiamo suddividere $\mathcal{A}^3$?
- Si potrebbe scegliere $\mathcal{X}_3$:

Macrostati	000	100	010	001	110	101	011	111
Probabilità	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8

- Oppure scegliere $\mathcal{X}_3(1, 11)$:

Macrostati	000	{100,010,001}	{110,011,101}	111
Probabilità	1/8	3/8	3/8	1/8

Esempio (2)

- $\mathcal{A} = \{1, 0\}$, i microstati sono 1 e 0
e $\mathbb{P}(0) = \mathbb{P}(1) = 1/2$.
- Quali sono le possibili stringhe di lunghezza 3?
- $\mathcal{A}^3 = \{000, 100, 010, 001, 110, 101, 011, 111\}$
- In quante partizioni possiamo suddividere $\mathcal{A}^3$?
- Si potrebbe scegliere $\mathcal{X}_3$:

Macrostati	000	100	010	001	110	101	011	111
Probabilità	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8

- Oppure scegliere $\mathcal{X}_3(1, 11)$:

Macrostati	000	{100,010,001}	{110,011,101}	111
Probabilità	1/8	3/8	3/8	1/8

Esempio (2)

- $\mathcal{A} = \{1, 0\}$, i microstati sono 1 e 0
e $\mathbb{P}(0) = \mathbb{P}(1) = 1/2$.
- Quali sono le possibili stringhe di lunghezza 3?
- $\mathcal{A}^3 = \{000, 100, 010, 001, 110, 101, 011, 111\}$
- In quante partizioni possiamo suddividere $\mathcal{A}^3$?
- Si potrebbe scegliere $\mathcal{X}_3$:

Macrostat	000	100	010	001	110	101	011	111
Probabilità	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8

- Oppure scegliere $\mathcal{X}_3(1, 11)$:

Macrostat	000	{100,010,001}	{110,011,101}	111
Probabilità	1/8	3/8	3/8	1/8

Esempio (2)

- $\mathcal{A} = \{1, 0\}$, i microstati sono 1 e 0
e $\mathbb{P}(0) = \mathbb{P}(1) = 1/2$.
- Quali sono le possibili stringhe di lunghezza 3?
- $\mathcal{A}^3 = \{000, 100, 010, 001, 110, 101, 011, 111\}$
- In quante partizioni possiamo suddividere $\mathcal{A}^3$?
- Si potrebbe scegliere $\mathcal{X}_3$:

Macrostati	000	100	010	001	110	101	011	111
Probabilità	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8

- Oppure scegliere $\mathcal{X}_3(1, 11)$:

Macrostati	000	{100,010,001}	{110,011,101}	111
Probabilità	1/8	3/8	3/8	1/8

Esempio (2)

- $\mathcal{A} = \{1, 0\}$, i microstati sono 1 e 0
e $\mathbb{P}(0) = \mathbb{P}(1) = 1/2$.
- Quali sono le possibili stringhe di lunghezza 3?
- $\mathcal{A}^3 = \{000, 100, 010, 001, 110, 101, 011, 111\}$
- In quante partizioni possiamo suddividere $\mathcal{A}^3$?
- Si potrebbe scegliere $\mathcal{X}_3$:

Macrostat	000	100	010	001	110	101	011	111
Probabilità	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8

- Oppure scegliere $\mathcal{X}_3(1, 11)$:

Macrostat	000	$\{100, 010, 001\}$	$\{110, 011, 101\}$	111
Probabilità	1/8	3/8	3/8	1/8

Esempio (2)

- $\mathcal{A} = \{1, 0\}$, i microstati sono 1 e 0
e $\mathbb{P}(0) = \mathbb{P}(1) = 1/2$.
- Quali sono le possibili stringhe di lunghezza 3?
- $\mathcal{A}^3 = \{000, 100, 010, 001, 110, 101, 011, 111\}$
- In quante partizioni possiamo suddividere $\mathcal{A}^3$?
- Si potrebbe scegliere $\mathcal{X}_3$:

Macrostati	000	100	010	001	110	101	011	111
Probabilità	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8

- Oppure scegliere $\mathcal{X}_3(1, 11)$:

Macrostati	000	$\{100, 010, 001\}$	$\{110, 011, 101\}$	111
Probabilità	1/8	3/8	3/8	1/8

Esempio (2)

- $\mathcal{A} = \{1, 0\}$, i microstati sono 1 e 0
e $\mathbb{P}(0) = \mathbb{P}(1) = 1/2$.
- Quali sono le possibili stringhe di lunghezza 3?
- $\mathcal{A}^3 = \{000, 100, 010, 001, 110, 101, 011, 111\}$
- In quante partizioni possiamo suddividere $\mathcal{A}^3$?
- Si potrebbe scegliere $\mathcal{X}_3$:

Macrostati	000	100	010	001	110	101	011	111
Probabilità	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8

- Oppure scegliere $\mathcal{X}_3(1, 11)$:

Macrostati	000	$\{100, 010, 001\}$	$\{110, 011, 101\}$	111
Probabilità	1/8	3/8	3/8	1/8

L'entropia di C. Shannon



Figura 2: C. Shannon (1916 - 2001)

Consideriamo una stringa s , formata da $x_i \in \mathcal{A}$ con probabilità p_i , l'informazione è $I(x_i) = \log_2(1/p_i)$ in *bit*. L'entropia di s è il valore di aspettazione dell'informazione:

$$H_S(s) = \sum_{i=1}^N p_i \log_2 \left(\frac{1}{p_i} \right) \text{ con } \sum_{i=1}^N p_i = 1.$$

Proprietà dell'entropia di Shannon

- L'entropia di Shannon permette di determinare il numero medio di *bit* contenute in una stringa e che occorrono per codificare una stringa.
- $H_S(s)$ è massima quando le probabilità p_i sono tutte uguali (*distribuzione uniforme*).
- Nel caso di una stringa s di dati di lunghezza N la probabilità del carattere x_i si può stimare con la sua frequenza:

$$p_i = \frac{n(x_i)}{N}$$

con $n(x_i) \doteq \#\{x_i \in s\}$.

Gli studenti hanno svolto l'analisi di alcuni esempi...

Proprietà dell'entropia di Shannon

- L'entropia di Shannon permette di determinare il numero medio di *bit* contenute in una stringa e che occorrono per codificare una stringa.
- $H_S(s)$ è massima quando le probabilità p_i sono tutte uguali (*distribuzione uniforme*).
- Nel caso di una stringa s di dati di lunghezza N la probabilità del carattere x_i si può stimare con la sua frequenza:

$$p_i = \frac{n(x_i)}{N}$$

con $n(x_i) \doteq \#\{x_i \in s\}$.

Gli studenti hanno svolto l'analisi di alcuni esempi...

Proprietà dell'entropia di Shannon

- L'entropia di Shannon permette di determinare il numero medio di *bit* contenute in una stringa e che occorrono per codificare una stringa.
- $H_S(s)$ è massima quando le probabilità p_i sono tutte uguali (*distribuzione uniforme*).
- Nel caso di una stringa s di dati di lunghezza N la probabilità del carattere x_i si può stimare con la sua frequenza:

$$p_i = \frac{n(x_i)}{N}$$

con $n(x_i) \doteq \#\{x_i \in s\}$.

Gli studenti hanno svolto l'analisi di alcuni esempi...

Proprietà dell'entropia di Shannon

- L'entropia di Shannon permette di determinare il numero medio di *bit* contenute in una stringa e che occorrono per codificare una stringa.
- $H_S(s)$ è massima quando le probabilità p_i sono tutte uguali (*distribuzione uniforme*).
- Nel caso di una stringa s di dati di lunghezza N la probabilità del carattere x_i si può stimare con la sua frequenza:

$$p_i = \frac{n(x_i)}{N}$$

con $n(x_i) \doteq \#\{x_i \in s\}$.

Gli studenti hanno svolto l'analisi di alcuni esempi...

Proprietà dell'entropia di Shannon

- L'entropia di Shannon permette di determinare il numero medio di *bit* contenute in una stringa e che occorrono per codificare una stringa.
- $H_S(s)$ è massima quando le probabilità p_i sono tutte uguali (*distribuzione uniforme*).
- Nel caso di una stringa s di dati di lunghezza N la probabilità del carattere x_i si può stimare con la sua frequenza:

$$p_i = \frac{n(x_i)}{N}$$

con $n(x_i) \doteq \#\{x_i \in s\}$.

Gli studenti hanno svolto l'analisi di alcuni esempi...

Calcolo dell'entropia di Shannon in $\mathcal{X}$ "moneta"

- $\mathcal{X}$: $\mathcal{A} = \{T, C\}$ con $\mathbb{P}(T) = \mathbb{P}(C) = 1/2$:

Microstati	T	C
Probabilità	1/2	1/2

- L'informazione:

$$I(T) = I(C) = \log_2(2) = 1$$

- L'entropia:

$$H_S(\mathcal{X}) = 2 \frac{1}{2} \log_2(2) = 1$$

Calcolo dell'entropia di Shannon in $\mathcal{X}_t$ "moneta truccata"

- $\mathcal{X}_t$: $\mathcal{A} = \{T, C\}$ con $\mathbb{P}(T) = 2/3$, $\mathbb{P}(C) = 1/3$

Microstati	T	C
Probabilità	2/3	1/3

- L'informazione:

$$I(T) = \log_2(3/2), \quad I(C) = \log_2(3)$$

- L'entropia:

$$H_S(\mathcal{X}_t) = \frac{2}{3} \log_2(3/2) + \frac{1}{3} \log_2(3) = \log_2(3) - \frac{2}{3}$$

- Che relazione vi è fra $H(\mathcal{X})$ e $H(\mathcal{X}_t)$?

$$H_S(\mathcal{X}) > H_S(\mathcal{X}_t)$$

Calcolo dell'entropia di Shannon in $\mathcal{X}_t$ "moneta truccata"

- $\mathcal{X}_t$: $\mathcal{A} = \{T, C\}$ con $\mathbb{P}(T) = 2/3$, $\mathbb{P}(C) = 1/3$

Microstati	T	C
Probabilità	2/3	1/3

- L'informazione:

$$I(T) = \log_2(3/2), \quad I(C) = \log_2(3)$$

- L'entropia:

$$H_S(\mathcal{X}_t) = \frac{2}{3} \log_2(3/2) + \frac{1}{3} \log_2(3) = \log_2(3) - \frac{2}{3}$$

- Che relazione vi è fra $H(\mathcal{X})$ e $H(\mathcal{X}_t)$?

$$H_S(\mathcal{X}) > H_S(\mathcal{X}_t)$$

Calcolo dell'entropia di Shannon in $\mathcal{X}_t$ "moneta truccata"

- $\mathcal{X}_t$: $\mathcal{A} = \{T, C\}$ con $\mathbb{P}(T) = 2/3$, $\mathbb{P}(C) = 1/3$

Microstati	T	C
Probabilità	2/3	1/3

- L'informazione:

$$I(T) = \log_2(3/2), \quad I(C) = \log_2(3)$$

- L'entropia:

$$H_S(\mathcal{X}_t) = \frac{2}{3} \log_2(3/2) + \frac{1}{3} \log_2(3) = \log_2(3) - \frac{2}{3}$$

- Che relazione vi è fra $H(\mathcal{X})$ e $H(\mathcal{X}_t)$?

$$H_S(\mathcal{X}) > H_S(\mathcal{X}_t)$$

Calcolo dell'entropia di Shannon in $\mathcal{X}_2$

- $\mathcal{X}_2$: $\mathcal{A} = \{T, C\}$ con $\mathbb{P}(T) = \mathbb{P}(C) = 1/2$

Macrostatì	TT	TC	CT	CC
Probabilità	1/4	1/4	1/4	1/4

- L'informazione:

$$I(TT) = I(TC) = I(CT) = I(CC) = \log_2(4) = 2$$

- L'entropia:

$$H_S(\mathcal{X}_2) = 4 \frac{1}{4} \log_2(4) = 2$$

Calcolo dell'entropia di Shannon in $\mathcal{X}_2$

- $\mathcal{X}_2$: $\mathcal{A} = \{T, C\}$ con $\mathbb{P}(T) = \mathbb{P}(C) = 1/2$

Macrostatì	TT	TC	CT	CC
Probabilità	1/4	1/4	1/4	1/4

- L'informazione:

$$I(TT) = I(TC) = I(CT) = I(CC) = \log_2(4) = 2$$

- L'entropia:

$$H_S(\mathcal{X}_2) = 4 \frac{1}{4} \log_2(4) = 2$$

Calcolo dell'entropia di Shannon in $\mathcal{X}_2$

- $\mathcal{X}_2$: $\mathcal{A} = \{T, C\}$ con $\mathbb{P}(T) = \mathbb{P}(C) = 1/2$

Macrostatì	TT	TC	CT	CC
Probabilità	1/4	1/4	1/4	1/4

- L'informazione:

$$I(TT) = I(TC) = I(CT) = I(CC) = \log_2(4) = 2$$

- L'entropia:

$$H_S(\mathcal{X}_2) = 4 \frac{1}{4} \log_2(4) = 2$$

Calcolo dell'entropia di Shannon in $\mathcal{X}_{sym}$

- $\mathcal{X}_{sym}$: $\mathcal{A} = \{T, C\}$ con $\mathbb{P}(T) = \mathbb{P}(C) = 1/2$

Macrostatì	TT	{TC,CT}	CC
Probabilità	1/4	2/4	1/4

- L'informazione:

$$I(TT) = I(CC) = \log_2(4) = 2, \quad I(\{TC, CT\}) = \log_2(2) = 1$$

- L'entropia:

$$H_S(\mathcal{X}_{sym}) = 2 \frac{1}{4} \log_2(4) + \frac{2}{4} \log_2(2) = 1.$$

- Che relazione vi è fra $H_S(\mathcal{X}_2)$ e $H_S(\mathcal{X}_{sym})$?

$$H_S(\mathcal{X}_2) > H_S(\mathcal{X}_{sym})$$

Calcolo dell'entropia di Shannon in $\mathcal{X}_{sym}$

- $\mathcal{X}_{sym}$: $\mathcal{A} = \{T, C\}$ con $\mathbb{P}(T) = \mathbb{P}(C) = 1/2$

Macrostatì	TT	{TC,CT}	CC
Probabilità	1/4	2/4	1/4

- L'informazione:

$$I(TT) = I(CC) = \log_2(4) = 2, \quad I(\{TC, CT\}) = \log_2(2) = 1$$

- L'entropia:

$$H_S(\mathcal{X}_{sym}) = 2 \frac{1}{4} \log_2(4) + \frac{2}{4} \log_2(2) = 1.$$

- Che relazione vi è fra $H_S(\mathcal{X}_2)$ e $H_S(\mathcal{X}_{sym})$?

$$H_S(\mathcal{X}_2) > H_S(\mathcal{X}_{sym})$$

Calcolo dell'entropia di Shannon in $\mathcal{X}_{sym}$

- $\mathcal{X}_{sym}$: $\mathcal{A} = \{T, C\}$ con $\mathbb{P}(T) = \mathbb{P}(C) = 1/2$

Macrostatì	TT	{TC,CT}	CC
Probabilità	1/4	2/4	1/4

- L'informazione:

$$I(TT) = I(CC) = \log_2(4) = 2, \quad I(\{TC, CT\}) = \log_2(2) = 1$$

- L'entropia:

$$H_S(\mathcal{X}_{sym}) = 2 \frac{1}{4} \log_2(4) + \frac{2}{4} \log_2(2) = 1.$$

- Che relazione vi è fra $H_S(\mathcal{X}_2)$ e $H_S(\mathcal{X}_{sym})$?

$$H_S(\mathcal{X}_2) > H_S(\mathcal{X}_{sym})$$

Calcolo dell'entropia di Shannon in $\mathcal{X}_{sym}$

- $\mathcal{X}_{sym}$: $\mathcal{A} = \{T, C\}$ con $\mathbb{P}(T) = \mathbb{P}(C) = 1/2$

Macrostatì	TT	{TC,CT}	CC
Probabilità	1/4	2/4	1/4

- L'informazione:

$$I(TT) = I(CC) = \log_2(4) = 2, \quad I(\{TC, CT\}) = \log_2(2) = 1$$

- L'entropia:

$$H_S(\mathcal{X}_{sym}) = 2 \frac{1}{4} \log_2(4) + \frac{2}{4} \log_2(2) = 1.$$

- Che relazione vi è fra $H_S(\mathcal{X}_2)$ e $H_S(\mathcal{X}_{sym})$?

$$H_S(\mathcal{X}_2) > H_S(\mathcal{X}_{sym})$$

Calcolo dell'entropia di Shannon in $\mathcal{X}_{sym}$

- $\mathcal{X}_{sym}$: $\mathcal{A} = \{T, C\}$ con $\mathbb{P}(T) = \mathbb{P}(C) = 1/2$

Macrostatì	TT	{TC,CT}	CC
Probabilità	1/4	2/4	1/4

- L'informazione:

$$I(TT) = I(CC) = \log_2(4) = 2, \quad I(\{TC, CT\}) = \log_2(2) = 1$$

- L'entropia:

$$H_S(\mathcal{X}_{sym}) = 2 \frac{1}{4} \log_2(4) + \frac{2}{4} \log_2(2) = 1.$$

- Che relazione vi è fra $H_S(\mathcal{X}_2)$ e $H_S(\mathcal{X}_{sym})$?

$$H_S(\mathcal{X}_2) > H_S(\mathcal{X}_{sym})$$

Calcolo dell'entropia di Shannon in $\mathcal{X}_3$

- $\mathcal{X}_3$; $\mathcal{A} = \{1, 0\}$ $\mathbb{P}(0) = \mathbb{P}(1) = 1/2$

Macrostatì	000	100	010	001	110	101	011	111
Probabilità	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8

- L'informazione:

$$I(x) = \log_2(8) = 3 \text{ per tutte le } x$$

- L'entropia:

$$H_S(\mathcal{X}_3) = 8 \frac{1}{8} \log_2(8) = 3.$$

Calcolo dell'entropia di Shannon in $\mathcal{X}_3$

- $\mathcal{X}_3$; $\mathcal{A} = \{1, 0\}$ $\mathbb{P}(0) = \mathbb{P}(1) = 1/2$

Macrostatì	000	100	010	001	110	101	011	111
Probabilità	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8

- L'informazione:

$$I(x) = \log_2(8) = 3 \text{ per tutte le } x$$

- L'entropia:

$$H_S(\mathcal{X}_3) = 8 \frac{1}{8} \log_2(8) = 3.$$

Calcolo dell'entropia di Shannon in $\mathcal{X}_3$

- $\mathcal{X}_3$; $\mathcal{A} = \{1, 0\}$ $\mathbb{P}(0) = \mathbb{P}(1) = 1/2$

Macrostatì	000	100	010	001	110	101	011	111
Probabilità	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8

- L'informazione:

$$I(x) = \log_2(8) = 3 \text{ per tutte le } x$$

- L'entropia:

$$H_S(\mathcal{X}_3) = 8 \frac{1}{8} \log_2(8) = 3.$$

Calcolo dell'entropia di Shannon in $\mathcal{X}_3(1, 11)$

- $\mathcal{X}_3$; $\mathcal{A} = \{1, 0\}$ $\mathbb{P}(0) = \mathbb{P}(1) = 1/2$

Macrostatì	000	{100,010,001}	{110,011,101}	111
Probabilità	1/8	3/8	3/8	1/8

- L'informazione:

$$I(000) = I(111) = \log_2(8) = 3,$$

$$I(\{100, 010, 001\}) = I(\{110, 011, 101\}) = \log_2(8/3)$$

- L'entropia:

$$H_S(\mathcal{X}_3(1, 11)) = 2\frac{1}{8} \log_2(8) + 2\frac{3}{8} \log_2(8/3) = 3 - \frac{3}{4} \log_2(3).$$

- Che relazione vi è fra $H_S(\mathcal{X}_3)$ e $H_S(\mathcal{X}_3(1, 11))$?

$$H_S(\mathcal{X}_3) > H_S(\mathcal{X}_3(1, 11))$$

Calcolo dell'entropia di Shannon in $\mathcal{X}_3(1, 11)$

- $\mathcal{X}_3$; $\mathcal{A} = \{1, 0\}$ $\mathbb{P}(0) = \mathbb{P}(1) = 1/2$

Macrostatì	000	{100,010,001}	{110,011,101}	111
Probabilità	1/8	3/8	3/8	1/8

- L'informazione:

$$I(000) = I(111) = \log_2(8) = 3,$$

$$I(\{100, 010, 001\}) = I(\{110, 011, 101\}) = \log_2(8/3)$$

- L'entropia:

$$H_S(\mathcal{X}_3(1, 11)) = 2\frac{1}{8} \log_2(8) + 2\frac{3}{8} \log_2(8/3) = 3 - \frac{3}{4} \log_2(3).$$

- Che relazione vi è fra $H_S(\mathcal{X}_3)$ e $H_S(\mathcal{X}_3(1, 11))$?

$$H_S(\mathcal{X}_3) > H_S(\mathcal{X}_3(1, 11))$$

Calcolo dell'entropia di Shannon in $\mathcal{X}_3(1, 11)$

- $\mathcal{X}_3$; $\mathcal{A} = \{1, 0\}$ $\mathbb{P}(0) = \mathbb{P}(1) = 1/2$

Macrostatì	000	{100,010,001}	{110,011,101}	111
Probabilità	1/8	3/8	3/8	1/8

- L'informazione:

$$I(000) = I(111) = \log_2(8) = 3,$$

$$I(\{100, 010, 001\}) = I(\{110, 011, 101\}) = \log_2(8/3)$$

- L'entropia:

$$H_S(\mathcal{X}_3(1, 11)) = 2 \frac{1}{8} \log_2(8) + 2 \frac{3}{8} \log_2(8/3) = 3 - \frac{3}{4} \log_2(3).$$

- Che relazione vi è fra $H_S(\mathcal{X}_3)$ e $H_S(\mathcal{X}_3(1, 11))$?

$$H_S(\mathcal{X}_3) > H_S(\mathcal{X}_3(1, 11))$$

Calcolo dell'entropia di Shannon in $\mathcal{X}_3(1, 11)$

- $\mathcal{X}_3$; $\mathcal{A} = \{1, 0\}$ $\mathbb{P}(0) = \mathbb{P}(1) = 1/2$

Macrostatì	000	{100,010,001}	{110,011,101}	111
Probabilità	1/8	3/8	3/8	1/8

- L'informazione:

$$I(000) = I(111) = \log_2(8) = 3,$$

$$I(\{100, 010, 001\}) = I(\{110, 011, 101\}) = \log_2(8/3)$$

- L'entropia:

$$H_S(\mathcal{X}_3(1, 11)) = 2\frac{1}{8} \log_2(8) + 2\frac{3}{8} \log_2(8/3) = 3 - \frac{3}{4} \log_2(3).$$

- Che relazione vi è fra $H_S(\mathcal{X}_3)$ e $H_S(\mathcal{X}_3(1, 11))$?

$$H_S(\mathcal{X}_3) > H_S(\mathcal{X}_3(1, 11))$$

Calcolo dell'entropia di Shannon in $\mathcal{X}_3(1, 11)$

- $\mathcal{X}_3$; $\mathcal{A} = \{1, 0\}$ $\mathbb{P}(0) = \mathbb{P}(1) = 1/2$

Macrostatì	000	{100,010,001}	{110,011,101}	111
Probabilità	1/8	3/8	3/8	1/8

- L'informazione:

$$I(000) = I(111) = \log_2(8) = 3,$$

$$I(\{100, 010, 001\}) = I(\{110, 011, 101\}) = \log_2(8/3)$$

- L'entropia:

$$H_S(\mathcal{X}_3(1, 11)) = 2 \frac{1}{8} \log_2(8) + 2 \frac{3}{8} \log_2(8/3) = 3 - \frac{3}{4} \log_2(3).$$

- Che relazione vi è fra $H_S(\mathcal{X}_3)$ e $H_S(\mathcal{X}_3(1, 11))$?

$$H_S(\mathcal{X}_3) > H_S(\mathcal{X}_3(1, 11))$$

Osservazioni

- Che differenza c'è fra i vari ensemble trattati?
- Come si possono interpretare le seguenti disuguaglianze:

$$H_S(\mathcal{X}_2) > H_S(\mathcal{X}_{sym})$$

$$H_S(\mathcal{X}_3) > H_S(\mathcal{X}_3(1, 11)) ?$$

L'entropia di Shannon cresce quando la distribuzione di probabilità diventa uniforme.

Osservazioni

- Che differenza c'è fra i vari ensemble trattati?
- Come si possono interpretare le seguenti disuguaglianze:

$$H_S(\mathcal{X}_2) > H_S(\mathcal{X}_{sym})$$

$$H_S(\mathcal{X}_3) > H_S(\mathcal{X}_3(1, 11)) ?$$

L'entropia di Shannon cresce quando la distribuzione di probabilità diventa uniforme.

Osservazioni

- Che differenza c'è fra i vari ensemble trattati?
- Come si possono interpretare le seguenti disuguaglianze:

$$H_S(\mathcal{X}_2) > H_S(\mathcal{X}_{sym})$$

$$H_S(\mathcal{X}_3) > H_S(\mathcal{X}_3(1, 11)) ?$$

L'entropia di Shannon cresce quando la distribuzione di probabilità diventa uniforme.

Osservazioni

- Che differenza c'è fra i vari ensemble trattati?
- Come si possono interpretare le seguenti disuguaglianze:

$$H_S(\mathcal{X}_2) > H_S(\mathcal{X}_{sym})$$

$$H_S(\mathcal{X}_3) > H_S(\mathcal{X}_3(1, 11)) ?$$

L'entropia di Shannon cresce quando la distribuzione di probabilità diventa uniforme.

Stringhe tipiche e l'entropia di Shannon

- È possibile far simulare agli studenti una stringa s di simboli anche molto lunga usando ad esempio le calcolatrici grafiche o anche un foglio elettronico, poi calcolare $I(s)$ e $H_S(s)$. Cosa potrebbero notare?
- Si potrebbe osservare che:

$$\frac{I(s)}{H_S(s)} \simeq \text{lunghezza di } s$$

- Questa esperienza però non è stata ancora fatta :-)

Stringhe tipiche e l'entropia di Shannon

- È possibile far simulare agli studenti una stringa s di simboli anche molto lunga usando ad esempio le calcolatrici grafiche o anche un foglio elettronico, poi calcolare $I(s)$ e $H_S(s)$. Cosa potrebbero notare?
- Si potrebbe osservare che:

$$\frac{I(s)}{H_S(s)} \simeq \text{lunghezza di } s$$

- Questa esperienza però non è stata ancora fatta :-)

Stringhe tipiche e l'entropia di Shannon

- È possibile far simulare agli studenti una stringa s di simboli anche molto lunga usando ad esempio le calcolatrici grafiche o anche un foglio elettronico, poi calcolare $I(s)$ e $H_S(s)$. Cosa potrebbero notare?
- Si potrebbe osservare che:

$$\frac{I(s)}{H_S(s)} \simeq \text{lunghezza di } s$$

- Questa esperienza però non è stata ancora fatta :-)

Stringhe tipiche e l'entropia di Shannon

- È possibile far simulare agli studenti una stringa s di simboli anche molto lunga usando ad esempio le calcolatrici grafiche o anche un foglio elettronico, poi calcolare $I(s)$ e $H_S(s)$. Cosa potrebbero notare?
- Si potrebbe osservare che:

$$\frac{I(s)}{H_S(s)} \simeq \text{lunghezza di } s$$

- Questa esperienza però non è stata ancora fatta :-)

Stringhe tipiche e l'entropia di Shannon

Consideriamo $\mathcal{A} = \{x_1, \dots, x_N\}$ ciascun x_i compare con una probabilità caratteristica p_i con $\sum_{i=1}^N p_i = 1$.

Prendiamo s , una stringa di lunghezza L di elementi di $\mathcal{A}$:

- Quante volte potrà capitare x_i in s ?
 - Ci aspettiamo che esca x_i un numero circa uguale a Lp_i .
 - Quale sarà quindi la probabilità di avere la stringa s ?
 - La scelta delle lettere possiamo assumerla una collezione di eventi indipendenti: $P(s) = p_1^{Lp_1} p_2^{Lp_2} \dots p_N^{Lp_N}$.
 - Quanta informazione conterrà s di lunghezza L ?
 - $I(s) = \log_2(1/P(s)) = -\log_2(P(s)) = -L \sum_{i=1}^N p_i \log_2(p_i)$.
- Ossia

$$\frac{I(s)}{H_S(s)} = L.$$

Stringhe tipiche e l'entropia di Shannon

Consideriamo $\mathcal{A} = \{x_1, \dots, x_N\}$ ciascun x_i compare con una probabilità caratteristica p_i con $\sum_{i=1}^N p_i = 1$.

Prendiamo s , una stringa di lunghezza L di elementi di $\mathcal{A}$:

- Quante volte potrà capitare x_i in s ?
- Ci aspettiamo che esca x_i un numero circa uguale a Lp_i .
- Quale sarà quindi la probabilità di avere la stringa s ?
- La scelta delle lettere possiamo assumerla una collezione di eventi indipendenti: $P(s) = p_1^{Lp_1} p_2^{Lp_2} \dots p_N^{Lp_N}$.
- Quanta informazione conterrà s di lunghezza L ?
- $I(s) = \log_2(1/P(s)) = -\log_2(P(s)) = -L \sum_{i=1}^N p_i \log_2(p_i)$.
Ossia

$$\frac{I(s)}{H_S(s)} = L.$$

Stringhe tipiche e l'entropia di Shannon

Consideriamo $\mathcal{A} = \{x_1, \dots, x_N\}$ ciascun x_i compare con una probabilità caratteristica p_i con $\sum_{i=1}^N p_i = 1$.

Prendiamo s , una stringa di lunghezza L di elementi di $\mathcal{A}$:

- Quante volte potrà capitare x_i in s ?
- Ci aspettiamo che che esca x_i un numero circa uguale a Lp_i .
- Quale sarà quindi la probabilità di avere la stringa s ?
- La scelta delle lettere possiamo assumerla una collezione di eventi indipendenti: $P(s) = p_1^{Lp_1} p_2^{Lp_2} \dots p_N^{Lp_N}$.
- Quanta informazione conterrà s di lunghezza L ?
- $I(s) = \log_2(1/P(s)) = -\log_2(P(s)) = -L \sum_{i=1}^N p_i \log_2(p_i)$.
Ossia

$$\frac{I(s)}{H_S(s)} = L.$$

Stringhe tipiche e l'entropia di Shannon

Consideriamo $\mathcal{A} = \{x_1, \dots, x_N\}$ ciascun x_i compare con una probabilità caratteristica p_i con $\sum_{i=1}^N p_i = 1$.

Prendiamo s , una stringa di lunghezza L di elementi di $\mathcal{A}$:

- Quante volte potrà capitare x_i in s ?
- Ci aspettiamo che esca x_i un numero circa uguale a Lp_i .
- Quale sarà quindi la probabilità di avere la stringa s ?
- La scelta delle lettere possiamo assumerla una collezione di eventi indipendenti: $P(s) = p_1^{Lp_1} p_2^{Lp_2} \dots p_N^{Lp_N}$.
- Quanta informazione conterrà s di lunghezza L ?
- $I(s) = \log_2(1/P(s)) = -\log_2(P(s)) = -L \sum_{i=1}^N p_i \log_2(p_i)$.
Ossia

$$\frac{I(s)}{H_S(s)} = L.$$

Stringhe tipiche e l'entropia di Shannon

Consideriamo $\mathcal{A} = \{x_1, \dots, x_N\}$ ciascun x_i compare con una probabilità caratteristica p_i con $\sum_{i=1}^N p_i = 1$.

Prendiamo s , una stringa di lunghezza L di elementi di $\mathcal{A}$:

- Quante volte potrà capitare x_i in s ?
- Ci aspettiamo che x_i esca un numero circa uguale a Lp_i .
- Quale sarà quindi la probabilità di avere la stringa s ?
- La scelta delle lettere possiamo assumerla una collezione di eventi indipendenti: $P(s) = p_1^{Lp_1} p_2^{Lp_2} \dots p_N^{Lp_N}$.
- Quanta informazione conterrà s di lunghezza L ?
- $I(s) = \log_2(1/P(s)) = -\log_2(P(s)) = -L \sum_{i=1}^N p_i \log_2(p_i)$.
Ossia

$$\frac{I(s)}{H_S(s)} = L.$$

Stringhe tipiche e l'entropia di Shannon

Consideriamo $\mathcal{A} = \{x_1, \dots, x_N\}$ ciascun x_i compare con una probabilità caratteristica p_i con $\sum_{i=1}^N p_i = 1$.

Prendiamo s , una stringa di lunghezza L di elementi di $\mathcal{A}$:

- Quante volte potrà capitare x_i in s ?
- Ci aspettiamo che che esca x_i un numero circa uguale a Lp_i .
- Quale sarà quindi la probabilità di avere la stringa s ?
- La scelta delle lettere possiamo assumerla una collezione di eventi indipendenti: $P(s) = p_1^{Lp_1} p_2^{Lp_2} \dots p_N^{Lp_N}$.
- Quanta informazione conterrà s di lunghezza L ?
- $I(s) = \log_2(1/P(s)) = -\log_2(P(s)) = -L \sum_{i=1}^N p_i \log_2(p_i)$.

Ossia

$$\frac{I(s)}{H_S(s)} = L.$$

Stringhe tipiche e l'entropia di Shannon

Consideriamo $\mathcal{A} = \{x_1, \dots, x_N\}$ ciascun x_i compare con una probabilità caratteristica p_i con $\sum_{i=1}^N p_i = 1$.

Prendiamo s , una stringa di lunghezza L di elementi di $\mathcal{A}$:

- Quante volte potrà capitare x_i in s ?
- Ci aspettiamo che x_i esca un numero circa uguale a Lp_i .
- Quale sarà quindi la probabilità di avere la stringa s ?
- La scelta delle lettere possiamo assumerla una collezione di eventi indipendenti: $P(s) = p_1^{Lp_1} p_2^{Lp_2} \dots p_N^{Lp_N}$.
- Quanta informazione conterrà s di lunghezza L ?
- $I(s) = \log_2(1/P(s)) = -\log_2(P(s)) = -L \sum_{i=1}^N p_i \log_2(p_i)$.
Ossia

$$\frac{I(s)}{H_S(s)} = L.$$

Perchè parlare di sequenze, informazione ed entropia?

- Le stringhe sono sempre prodotte da un processo (naturale o artificiale), quindi possono essere utilizzate per descrivere l'evoluzione di un sistema.
- Lo studio di una stringa permette di interrogarsi i possibili stati del sistema che la produce.
- Un sistema che produce una stringa costituisce l'esempio più semplice di *sistema dinamico* che è presente in molteplici contesti.
- Sebbene non intuitive le nozioni d'informazione ed entropia, se sufficientemente esplorate attraverso esempi, possono costituire un primo contatto degli studenti con in temi più avanzati della ricerca moderna.

Perchè parlare di sequenze, informazione ed entropia?

- Le stringhe sono sempre prodotte da un processo (naturale o artificiale), quindi possono essere utilizzate per descrivere l'evoluzione di un sistema.
- Lo studio di una stringa permette di interrogarsi i possibili stati del sistema che la produce.
- Un sistema che produce una stringa costituisce l'esempio più semplice di *sistema dinamico* che è presente in molteplici contesti.
- Sebbene non intuitive le nozioni d'informazione ed entropia, se sufficientemente esplorate attraverso esempi, possono costituire un primo contatto degli studenti con in temi più avanzati della ricerca moderna.

Perchè parlare di sequenze, informazione ed entropia?

- Le stringhe sono sempre prodotte da un processo (naturale o artificiale), quindi possono essere utilizzate per descrivere l'evoluzione di un sistema.
- Lo studio di una stringa permette di interrogarsi i possibili stati del sistema che la produce.
- Un sistema che produce una stringa costituisce l'esempio più semplice di *sistema dinamico* che è presente in molteplici contesti.
- Sebbene non intuitive le nozioni d'informazione ed entropia, se sufficientemente esplorate attraverso esempi, possono costituire un primo contatto degli studenti con in temi più avanzati della ricerca moderna.

Perchè parlare di sequenze, informazione ed entropia?

- Le stringhe sono sempre prodotte da un processo (naturale o artificiale), quindi possono essere utilizzate per descrivere l'evoluzione di un sistema.
- Lo studio di una stringa permette di interrogarsi i possibili stati del sistema che la produce.
- Un sistema che produce una stringa costituisce l'esempio più semplice di *sistema dinamico* che è presente in molteplici contesti.
- Sebbene non intuitive le nozioni d'informazione ed entropia, se sufficientemente esplorate attraverso esempi, possono costituire un primo contatto degli studenti con in temi più avanzati della ricerca moderna.

Perchè parlare di sequenze, informazione ed entropia?

- Le stringhe sono sempre prodotte da un processo (naturale o artificiale), quindi possono essere utilizzate per descrivere l'evoluzione di un sistema.
- Lo studio di una stringa permette di interrogarsi i possibili stati del sistema che la produce.
- Un sistema che produce una stringa costituisce l'esempio più semplice di *sistema dinamico* che è presente in molteplici contesti.
- Sebbene non intuitive le nozioni d'informazione ed entropia, se sufficientemente esplorate attraverso esempi, possono costituire un primo contatto degli studenti con in temi più avanzati della ricerca moderna.

Reazioni degli studenti

Agli studenti è stato proposto un questionario dopo un anno

- Gli esempi provenienti dalla fisica e la definizione di entropia a la Boltzman risultano più facilmente acquisibili.
- L'entropia per le sequenze di simboli richiede un livello di astrazione maggiore, quindi risulta più difficile.

Grazie a tutti per l'attenzione!

Reazioni degli studenti

Agli studenti è stato proposto un questionario dopo un anno

- Gli esempi provenienti dalla fisica e la definizione di entropia a la Boltzman risultano più facilmente acquisibili.
- L'entropia per le sequenze di simboli richiede un livello di astrazione maggiore, quindi risulta più difficile.

Grazie a tutti per l'attenzione!

Reazioni degli studenti

Agli studenti è stato proposto un questionario dopo un anno

- Gli esempi provenienti dalla fisica e la definizione di entropia a la Boltzman risultano più facilmente acquisibili.
- L'entropia per le sequenze di simboli richiede un livello di astrazione maggiore, quindi risulta più difficile.

Grazie a tutti per l'attenzione!

Reazioni degli studenti

Agli studenti è stato proposto un questionario dopo un anno

- Gli esempi provenienti dalla fisica e la definizione di entropia a la Boltzman risultano più facilmente acquisibili.
- L'entropia per le sequenze di simboli richiede un livello di astrazione maggiore, quindi risulta più difficile.

Grazie a tutti per l'attenzione!

Bibliografia

- *Caso, probabilità e complessità* A.Vulpiani, Ediesse (2015)
- *Caos* M. Malvaldi, S. Marmi, il Mulino (2019)
- *Information Theory, Inference and Learning Algorithms*
D.Mackay, Cambridge UP (2008)