

# SEQUENZE ALEATORIE

Gruppo di Lavoro  
«Guido ed Emma Castelnuovo»

Proff. Enrico Rogora

Roberta Dalla Volta - Anna Perrotta

11/12/2020

# Sequenze aleatorie

- Attività sperimentata da insegnanti di scuola primaria e secondaria nel laboratorio «governare l'incertezza» – Accademia dei Lincei, a.s. 2018/19
- Si è tratto spunto dal Volume: «Teaching Probability», J. Gage e D. Spiegelhalter
- Successivamente in seconda/terza liceo matematico (8 ore circa)
- Nessun prerequisito da parte degli alunni

# Obiettivi

- Sviluppare una solida «base intuitiva» relativa ai fenomeni aleatori che permetta agli studenti di evitare errori dovuti ad una loro scorretta interpretazione;
- Cominciare ad indagare le differenze tra successioni casuali reali, simulate e immaginate;
- Esplorare alcune caratteristiche delle stringhe aleatorie che a prima vista possono sembrare poco intuitive o addirittura «inaspettate»
- Riflettere sulla domanda: «E' possibile distinguere sequenze finite generate da un fenomeno aleatorio come il lancio ripetuto di una moneta non truccata da altre immaginate, simulate con un calcolatore o generate da uno schema deterministico?»

# Prima attività

Immagina di lanciare 20 volte una moneta non truccata e di riportare nella tabella seguente i risultati ottenuti (T=testa e C=croce)


Lancia una moneta 20 volte e riporta la successione di teste (T) e croci (C) che osservi


**Proviamo a simulare una serie di 20 lanci di moneta. Invece che avere T e C avremo come risultato 0 o 1 rispettivamente.**



# Un esempio

1.

T	C	C	T	T	C	T	C	C	T	T	C	C	T	C	C	T	T	T
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

2.

T	C	T	C	T	C	T	T	T	C	T	C	T	T	C	C	C	C	C	C
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

3.

T	C	C	C	T	T	T	C	C	T	T	T	T	C	T	T	C	T	C	C
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---



# Seconda attività

## Gli studenti hanno risposto.....

- Essendo tutte e 3 sequenze casuali non riesco a trovare elementi che permettono di distinguerle
- Immaginate: Senza un criterio ben definito, del tutto casuali, infatti, sono tutti diversi tra loro. Lancio della moneta: più "schematico" sembrerebbe quasi seguire un criterio di probabilità (forse) .Calcolatrice: segue una sequenza precisa ad esempio 2 "c", 3 "t", 1 "c"
- Non riesco ad individuare elementi che distinguono i tre esperimenti, l'unica differenza è che con la calcolatrice c'è più alternarsi tra le facce della moneta.
- Nelle sequenze immaginate si possono notare più frequentemente sequenze da 3 perché spesso le inseriamo cercando di rendere la sequenza il più casuale possibile. Nelle sequenze fatte alla calcolatrice si può notare che c'è una relazione del 50% tra testa e croce. Nelle tabelle fatte effettivamente con il lancio della moneta è molto difficile riconoscere una sequenza perché a volte si alternano T e C mentre altre volte si trovano gruppi di più T o C di fila.
- Nella sequenza immaginata, le lettere T e C si ripetono molte volte vicine fra loro ( es. CCCTCCTTTTC). Nella sequenza con la calcolatrice la cosa è più casuale, anche se qui molte volte si ripetono vicine fra loro le lettere ( es. CCTTCCTCTTCT). Nella sequenza con la moneta il risultato mi sembra puramente casuale, con poche ripetizioni di doppie ( es. CTCTCTCCTCCCTCTT).
- Io non ho trovato elementi che consentono di distinguerle.

# Terza attività

Vengono fornite agli studenti tre tabelle nelle quali sono state trascritte delle sequenze ottenute:

- a) lanciando 20 volte una moneta non truccata,
- b) immaginando di lanciare 20 volte una moneta non truccata e
- c) utilizzando la calcolatrice.

(le tabelle non vengono proposte nell'ordine in cui sono state elencate le tipologie di esperimento.)

Si chiede loro se riescono ad associare ad ogni tabella il tipo di esperimento da cui è ottenuta e perché?

# Terza attività

## Gli studenti hanno risposto.....

- Secondo me la prima è la calcolatrice perché segue un ordine più logico e lineare e sembra quella più ordinata tra le altre
- nella prima è la calcolatrice poiché la sequenza è abbastanza lineare e poco casuale, alla fine le lettere tornano quasi uguali. la seconda è reale poiché le lettere si ripetono molte volte di seguito e cambiano poche volte. la terza è immaginata poiché non ha un senso logico la sequenza, e le lettere si ripetono in modo casuale e senza un motivo.
- la prima è la calcolatrice perché sembra troppo precisa. la seconda è inventata dato che sembra seguire un criterio e l'ultima non segue nessuna logica.
- Tabella 1: lancio, ci sono grandi gruppi di C o T sparsi per la tabella. Tabella 2: calcolatrice, sembra la più schematica di tutte. Tabella 3: immaginato, non segue alcun «criterio»
- La tabella 1 è immaginata perché come aspetto visivo sembrerebbe quella con più alternanza. La tabella 2 calcolatrice poiché sembra seguire una sequenza. Tabella 3 è il lancio della moneta non truccata poiché se fosse stata immaginata, non ci sarebbero state 3 "C" attaccate o otto "T", questo perché quando il nostro cervello immagina una cosa casuale alterna le due lettere per farlo sembrare tale e non potrebbe essere la calcolatrice per lo stesso motivo le lettere sarebbero più alternate.
- tabella 3: lancio della moneta perché ad esempio in una serie c'erano 8 C di fila e dubito che qualcuno o anche la calcolatrice possano aver fatto una serie del genere. Tabella 2: immaginata perché ci sono un sacco di serie da 3 e quindi penso che sia immaginata
- No perché sono tutte sequenze casuali

# Quarta attività

Esperimento  
immaginato



**Colonna a:** numero di teste in ogni  
singola serie di lanci

**Colonna b:** la media fra le teste di ogni  
esperimento

**Colonna c:** SI se in ogni serie di lanci sono  
presenti 5 T consecutive, NO altrimenti

**Colonna d:** SI se in ogni serie di lanci  
sono presenti 5 C consecutive, NO  
altrimenti

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	N. Teste	Media	TTTTT	CCCCC
T	T	T	C	C	T	T	T	C	C	C	T	T	C	T	C	C	T	C	T	11	10,1	NO	NO
T	T	T	C	T	C	C	T	T	C	C	C	C	T	C	T	T	C	T	T	11		NO	NO
T	T	C	C	C	T	T	T	T	C	C	C	C	T	C	T	C	C	T	C	9		NO	NO
T	C	C	T	C	T	T	C	C	T	C	T	C	C	C	T	C	T	C	T	9		NO	NO
T	T	C	C	T	T	C	T	T	T	T	C	C	C	T	C	C	C	C	C	9		NO	SI
T	T	T	T	C	C	T	T	T	C	C	T	T	C	C	T	T	T	T	C	13		NO	NO
T	T	C	C	C	T	C	T	T	C	T	T	C	C	C	T	C	T	C	T	10		NO	NO
C	T	T	C	T	C	C	C	T	C	T	C	T	C	C	T	T	T	T	C	10		NO	NO
C	C	T	T	T	C	C	T	C	T	C	C	T	T	C	C	C	T	C	T	9		NO	NO
T	C	C	T	T	C	C	C	T	T	C	T	C	C	T	T	C	C	T	T	10		NO	NO
T	T	C	C	C	T	T	C	T	C	C	C	T	T	C	C	T	T	C	T	10		NO	NO
C	C	T	C	T	C	T	T	T	C	T	C	C	T	C	C	C	T	C	T	9		NO	NO
C	T	T	T	C	T	T	C	C	C	T	T	C	C	C	T	T	C	C	C	9		NO	NO
T	T	C	T	C	C	C	T	T	C	T	T	T	T	C	C	T	C	C	T	11		NO	NO
T	T	T	C	C	T	C	T	T	T	T	T	C	C	C	C	T	T	C	T	12		SI	NO

# Quarta attività

Esperimento reale

**Colonna a:** numero di teste in ogni singola serie di lanci

**Colonna b:** la media fra le teste di ogni esperimento

**Colonna c:** SI se in ogni serie di lanci sono presenti 5 T consecutive, NO altrimenti

**Colonna d:** SI se in ogni serie di lanci sono presenti 5 C consecutive, NO altrimenti

Che osservazioni puoi fare ora in merito ai tre tipi di esperimenti sulla base delle ulteriori informazioni che hai aggiunto? Confermano le tue ipotesi?

T T T C C C T T C T T C T C C C C C T T	10	9,9	NO	SI
T C C C T C T C T T C C C T T C C T C T	9		NO	NO
T C T C C T T C T T T C C C C C C T C	8		NO	SI
T T C C T T T T T T T T C C T T T C C C	13		SI	NO
T C C T C T C T T T C C T C C T C T T T	11		NO	NO
T T C C C C C T C C C C C C T C C T C	5		NO	SI
T T C T C T T T C C T C C C C T T C T C	10		NO	NO
T C T C T C C T T C C T T T C C T T T C	11		NO	NO
C C T T T T C T T T T C T T T T C T T C	14		NO	NO
T T C C C C T T T C C C T C C T T T C C	9		NO	NO
C T T C C T C C C C C T T C T T C T C T	9		NO	SI
C C C T C T C C T T T T C T C T T T T T	12		SI	NO
C C C C T C C C T T T T T T C T T T T C	11		SI	NO
C T T T T C C C C C C C C C C T T T T	8		NO	SI
C C T T C T T C C C T C C T T T C C T C	9		NO	NO
C T T C T C T T C T C C T T T C T C C C	10		NO	NO
C C T C T T C C T C C T T C T C C T C T	9		NO	NO

# Quarta attività

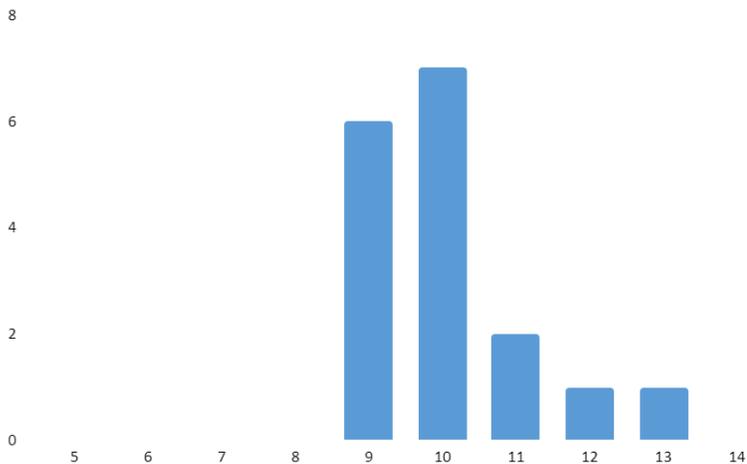
## osservazioni degli alunni

- Nelle prime due tabelle la presenza complessiva delle teste è pressoché uguale, cosa che si può notare dalla media effettuata, nella terza tabella invece il numero di teste è inferiore.
- Ho notato che le "T" sono sempre in un numero compreso tra 8 e 14 e che tutte e 3 le tabelle hanno medie molto simili.
- Nella tabella fatta con il lancio della moneta ci sono molte più serie da 5 di T o C mentre nella tabella della calcolatrice, ce ne stanno poche. Nella tabella fatta con l'immaginazione invece, ne sono presenti ancora di meno
- Si confermano le mie ipotesi, infatti la prima tabella è la calcolatrice, questo perché la disposizione è lineare, inoltre in alcuni casi esce più volte "T" o "C" almeno cinque volte di fila. La seconda che invece è immaginata, presenta poche volte 5 "T" o "C" consecutive, questo le dà una disposizione più casuale. La terza invece è stata effettuata con il lancio delle monete, infatti non ci sono molte situazioni in cui si presentano 5 o più "T" o "C" vicine, quindi non ha un "senso" logico.
- Secondo me le sequenze sono in tutti e tre i casi completamente casuali perciò non riesco a trovare informazioni

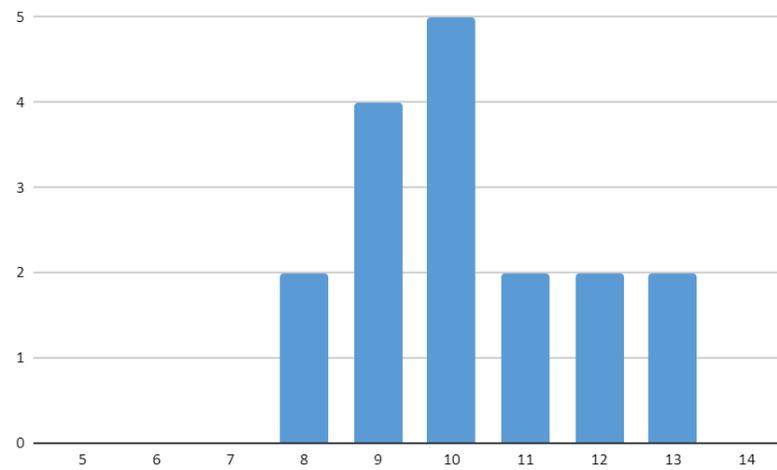
# Quinta attività

Nei **diagrammi a barre** seguenti abbiamo analizzato la distribuzione del numero di teste nel caso di esperimento immaginato, Reale e simulato con la calcolatrice.

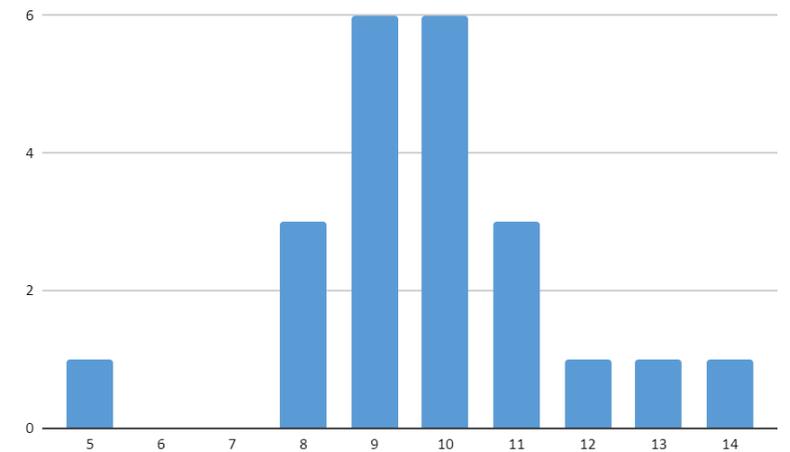
immaginaria



calcolatrice



lancio della moneta



# Esprimi qualitativamente la differenza fra i tre diagrammi a barre.

- La prima cosa che si nota è che soltanto in un grafico si trova il valore 5 ( nel lancio della moneta ) e, al contrario, in quello immaginato non risulta l' 8, a differenza di quello della calcolatrice e del lancio casuale. Per il resto i diagrammi sono abbastanza simili
- il primo (immaginato) è abbastanza “stabile” (dati raggruppati) come anche quello della calcolatrice mentre l'ultimo ha tutti valori sparpagliati)
- Ho notato che nel grafico fatto con l'immaginazione, il numero di T in ogni serie rimane per lo più normale, nel senso che i valori non scendono ne salgono mai più di tanto

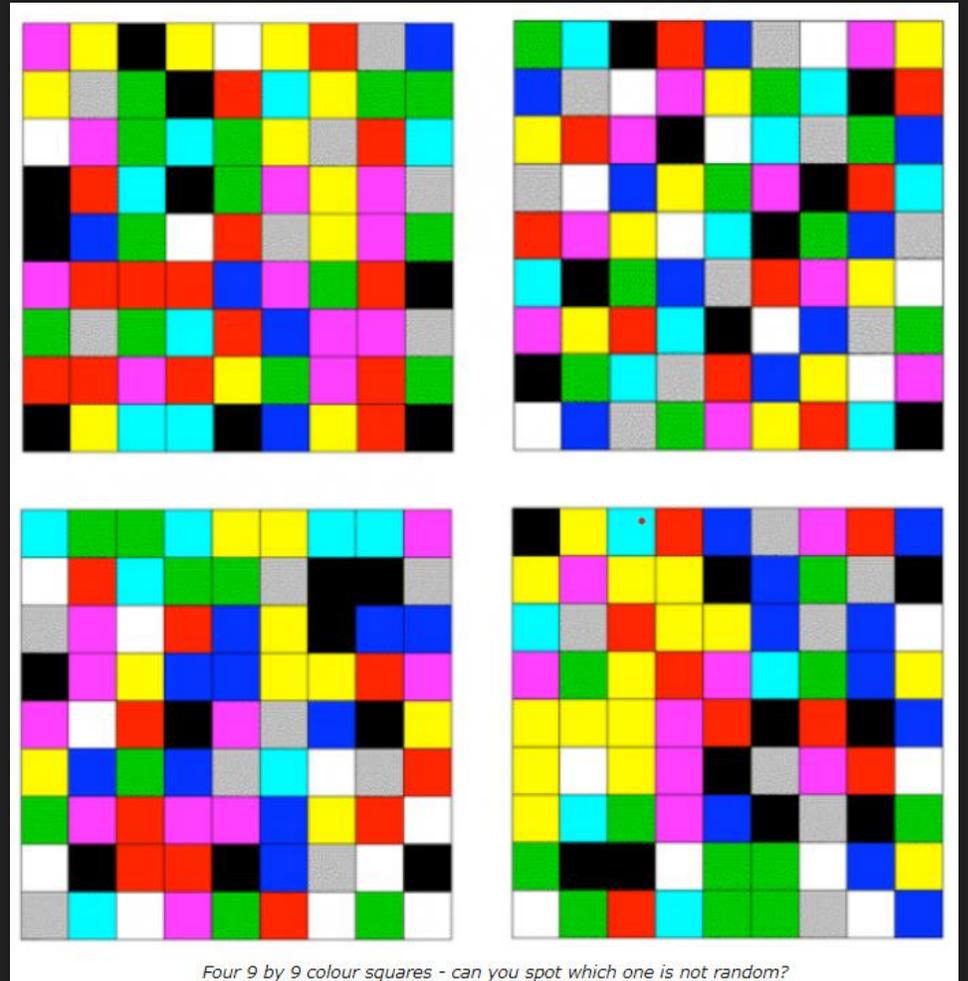
## Secondo te esiste un test per individuare le sequenze generate dal lancio della moneta? [il test dà una probabilità]. Motiva la risposta

- non penso esista un criterio per individuare tali sequenze poiché essendo un lancio casuale ad ogni tentativo i risultati cambiano.
- Ho notato che nel grafico fatto con l'immaginazione, il numero di T in ogni serie rimane per lo più normale, nel senso che i valori non scendono né salgono mai più di tanto
- Sì, la sequenza che ha i valori più irregolari è probabilmente quella generata casualmente.
- Nel lancio della moneta i dati sono del tutto casuali, ci sono più variabili, quindi non è una distribuzione che segue una logica.
- Un modo per capire quale grafico/tabella rappresenta le sequenze generate nel modo casuale potrebbe essere quello di mettere a confronto i vari dati e cercare quale fra i tre presenta più scelta di numeri. Dico ciò perché si può notare che il lancio della moneta prende in considerazione diversi numeri e le loro frequenze ( 5, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14) rispetto agli altri due grafici dove possiamo trovare un raggruppamento maggiore, incentrato sul 9 e sul 10
- Nel primo caso, ovvero quello delle calcolatrici, le frequenze hanno poca differenza fra di loro. Quindi la calcolatrice ha un tipo di distribuzione equo. Nel lancio della moneta la frequenza è del tutto casuale, ci sono più risultati quindi non ha una distribuzione che segue una logica.
- Tutti e tre i grafici presentano il picco sul 10. Il grafico della calcolatrice e quello immaginato non presentano dati all'inizio, mentre quello casuale cerca di essere omogeneo.
- Nel primo esperimento, quello con la calcolatrice, ci sono pochi dati sull'asse delle x e i dati sono più "stabili"; nel secondo, quello immaginato, ci sono meno dati sull'asse delle x; nel terzo esperimento, quello del lancio della moneta, ci sono più dati sull'asse delle x di conseguenza sono meno "alte" le barre.

# Sesta attività

## Proviamo di nuovo insieme

In tre dei quattro quadrati i colori sono stati scelti in modo casuale da una tavolozza di 9 colori, mentre nel quarto i colori sono stati scelti in modo molto attento seguendo uno schema ben preciso. Sai individuare quale dei 4 quadrati è quello costruito con una regola? Perché?



Four 9 by 9 colour squares - can you spot which one is not random?

# Gli studenti hanno risposto

- il secondo è quello non casuale perchè i colori raramente si ripetono di fila
- Per me è il secondo quadrato perché poiché il testo dice che di quadrato con composizione non casuale ce ne è solo uno il secondo è l'unico in cui i quadrati colorati ugualmente non sono collegati tranne due che sono collegati obliquamente e le sequenze dei quadrati colorati sono tutte diverse e presentano uno schema logico
- E' quello in alto a destra perchè è l'unico che non presenta due o più quadratini, dello stesso colore, vicini.
- è il secondo perché lo stesso colore non appare mai 2 volte su una colonna o su una riga.
- Secondo me quello non casuale è il secondo perché i colori si ripetono in ordine

Il quadrato ottenuto con lo schema non casuale è quello in alto a destra. Infatti in tutti gli altri ci sono dei «*clusten*» (cioè dei gruppi) di quadratini con gli stessi colori vicini. Il quadrato in alto a destra è «troppo regolare» per essere casuale.

Com'è stato ottenuto?

					7
			7		
	6				
	4		3		
		1	5		8
				2	7
				1	4
				4	
1					

Se si risolve il sudoku e si associano in maniera opportuna i colori ai numeri si otterrà esattamente il quadrato «non casuale».

# Sequenze aleatorie finite

« E' possibile distinguere i riquadri (o le sequenze finite) generati da un fenomeno aleatorio da quelli prodotti seguendo un preciso schema?»

La domanda in realtà è mal posta. Infatti, ogni sequenza finita di simboli può essere prodotta sia da un fenomeno aleatorio che da un modello di tipo deterministico. Ciò che è corretto chiedere è se, sapendo che alcune sequenze sono prodotte da fenomeni aleatori e altre no, possiamo individuare delle proprietà che aumentino la probabilità di riconoscere correttamente quelle prodotte da fenomeni aleatori (rispetto all'ipotesi che non sia possibile  $1/4, 1/4, 1/4, 1/4$ ).

In genere, si ritiene che risultati prodotti da fenomeni aleatori tendano ad essere **meno regolari** di quelli prodotti seguendo uno schema preciso. Ma che cosa si intende per regolarità? Come caratterizzare l'irregolarità?

Nell'esempio dei quadrati colorati, inizialmente saremmo stati portati a considerare "più regolari" le configurazioni in cui erano presenti più celle adiacenti dello stesso colore.

In questo senso, allora, il quadrato più irregolare, e quindi quello con maggior probabilità di essere stato prodotto da un fenomeno aleatorio, sarebbe dovuto essere il quadrato in alto a destra.

In realtà è proprio la mancanza di ripetizioni dello stesso colore in ogni riga e in ogni colonna che, sulla base delle considerazioni fatte ci ha portato ad ipotizzare che è molto improbabile che il quadrato in alto a destra sia stato prodotto da un fenomeno aleatorio perché per realizzarlo bisogna prestare molta attenzione a non ripetere lo stesso colore né sulla stessa riga né sulla stessa colonna.

Quindi, anche se non è possibile affermare con certezza che il secondo quadrato non sia il risultato di un esperimento aleatorio, tuttavia, ciò risulta molto improbabile.

# Osservazioni finali.

Nell'effettuare 20 lanci di una moneta ci aspettavamo che:

- il numero di T e di C fosse più o meno lo stesso (10/10) circa
- Che non ci fossero molte sequenze di TTTTTT o di CCCCCC
- Le sequenze prodotte dalla calcolatrice seguissero uno schema ben preciso e si avvicinassero a quelle generate dalla mente umana

Abbiamo invece osservato che:

- In alcuni casi ci sono state sequenze con molte più croci che teste (solo 5 teste)
- Il numero di sequenze consecutive di T o di C è molto più frequente di quanto ci aspettavamo.
- Le sequenze prodotte dalla calcolatrice hanno una distribuzione di frequenze vicina a quella generata dalle monete

# Osservazioni finali

- Le attività descritte hanno permesso agli alunni di riflettere sul concetto di probabilità mettendo in discussione le loro convinzioni
- Può essere interessante lavorare in modo più approfondito sulla relazione fra sequenze aleatorie generate da una macchina calcolatrice e quelle generate da una moneta ed approfondire il concetto di numero pseudocasuale