Piano Lauree Scientifiche

Liceo Matematico

Combinatoria di grafi colorati
Dal gioco ai numeri di Ramsey

(Enrico Rogora
Sapienza)

Maria Puzio
Elena Savinelli
I.I.S. «G. De Sanctis»

20/11/2020

Il principio dei cassetti (di Dirichlet)

Prima di introdurre il gioco di Ramsey, è opportuno richiamare il

Principio “di Dirichlet ”:

Se n+1 oggetti sono messi in n cassetti, almeno un cassetto deve contenere almeno due oggetti.

Se $k \times n+1$ oggetti sono messi in n cassetti, almeno un cassetto deve contenere almeno k+1 oggetti.

CONSEGUENZE

Se poniamo: oggetti = #capelli e cassetti = #persone, possiamo affermare che

«A Roma ci sono almeno due persone (non calve) con lo stesso numero di capelli».


GORDON

Oltre a numeri, lettere e simboli, il linguaggio matematico spesso si serve anche dei colori.
Esempio di questa attitudine policroma è un teorema relativo alla teoria dei grafi.
Un grafo è un semplice oggetto geometrico, composto da linee (o lati), ognuna unita all'altra da un punto (o vertice).

Ramsey immaginò di avere a disposizione due colori, ad esempio il rosso e il blu, e due numeri, ad esempio 3 e 4, e di dover poi costruire un grafo colorando i lati di rosso e di blu.
Si chiese allora quale fosse il numero minimo di vertici che un grafo dovesse avere in modo da contenere un sotto grafo di 3 lati tutti rossi oppure un sottografo di 4 lati tutti blu.

Per indicare questo numero di vertici si usa la notazione R(3,4).

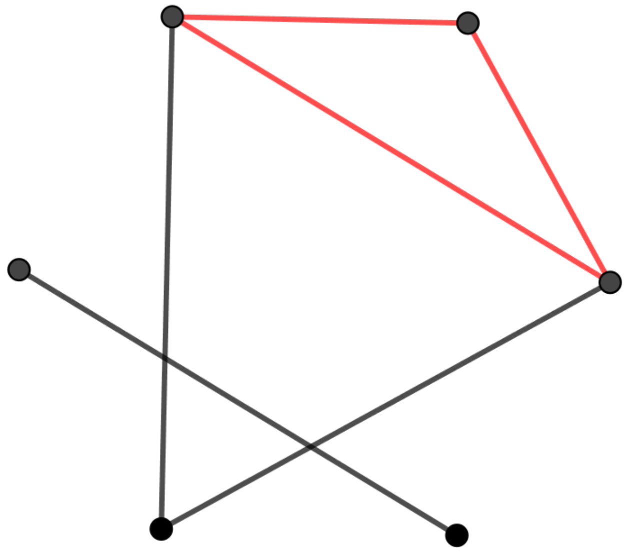
Il gioco di Ramsey

Si gioca su un foglio in cui è disegnato un certo numero di punti (vertici):

- Il giocatore “A” comincia congiungendo due vertici con un tratto **rosso**.
- Il giocatore “B” risponde congiungendo due vertici (non già congiunti precedentemente) con un tratto **blu**.
- Si ripetono le mosse, sempre mantenendo la condizione che due vertici possono essere congiunti al più da un tratto.
- Il gioco termina quando uno dei due giocatori riesce a disegnare un **triangolo monocromatico**, ovvero un triangolo in cui tutti gli spigoli sono dello stesso colore, oppure fino a che tutte le coppie di vertici sono congiunte da uno (e un solo) tratto.
- Gli spigoli possono intersecarsi ma le intersezioni non producono nuovi vertici.

Esempio

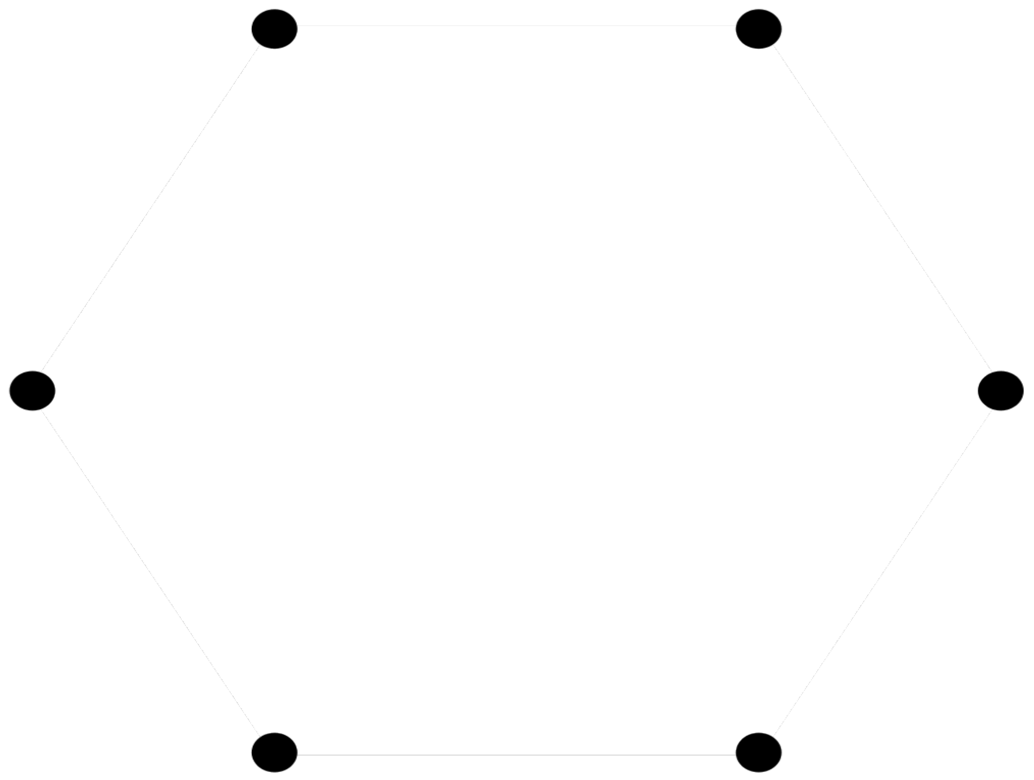
Vince il rosso. Il triangolo nero non ha i vertici tra i sei iniziali, rappresentati con un pallino.



Ramsey 6

Giochiamo con 6 vertici.

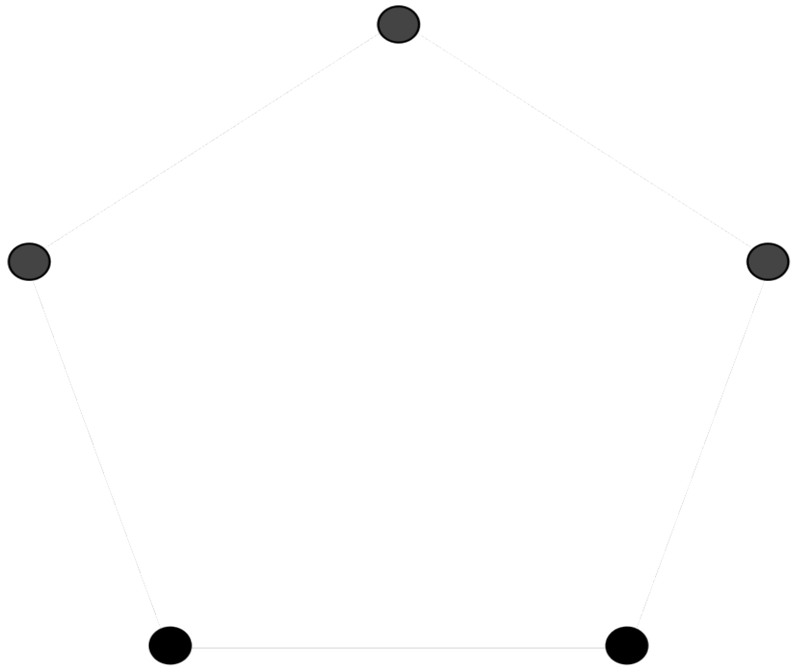
In quali coppie c'è stato un vincitore? In quante coppie non ha vinto nessuno?

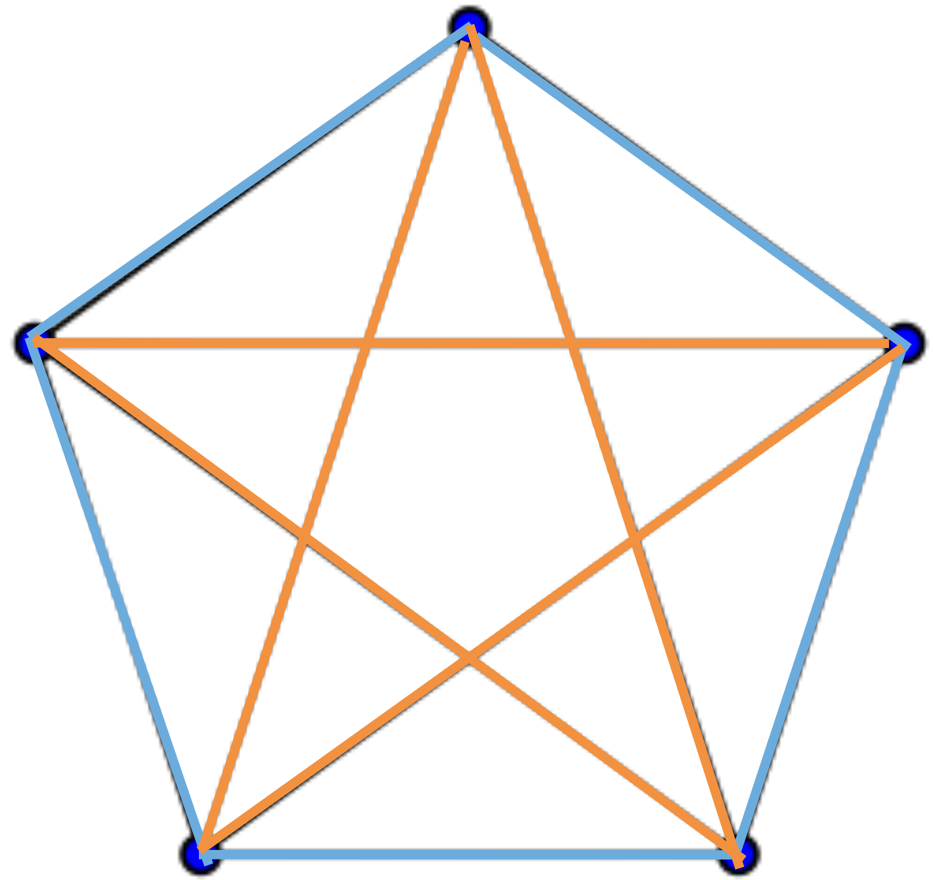


Ramsey 5

Giochiamo con 5 vertici.

Vogliamo trovare una configurazione senza vincitori.

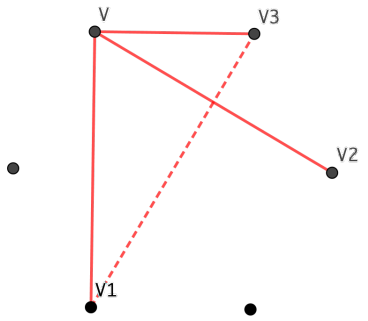


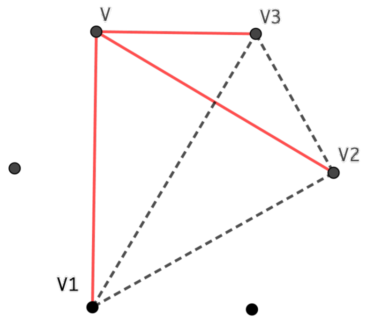


Giocando con 6 vertici c'è sempre un vincitore

Immagina per assurdo che non ci sia un vincitore. Abbiamo una colorazione con due colori del grafo completo su 6 vertici. Scegli un vertice V. Da questo partono almeno tre segmenti dello stesso colore (diciamo rosso) [V,V1] [V,V2] e [V,V3] per il principio dei cassetti.

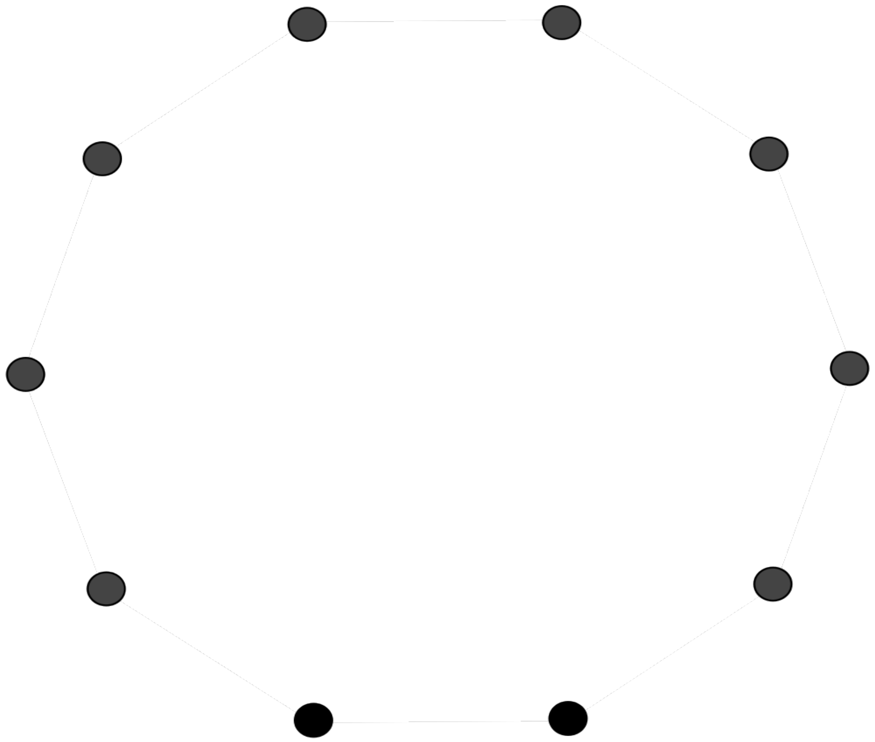
Se uno almeno dei segmenti [Vi,Vj] (i,j in 1,2,3) è rosso, abbiamo il triangolo monocromatico rosso [V,Vi,Vj]. Altrimenti abbiamo il triangolo monocromatico nero [V1,V2,V3]





Ramsey 10

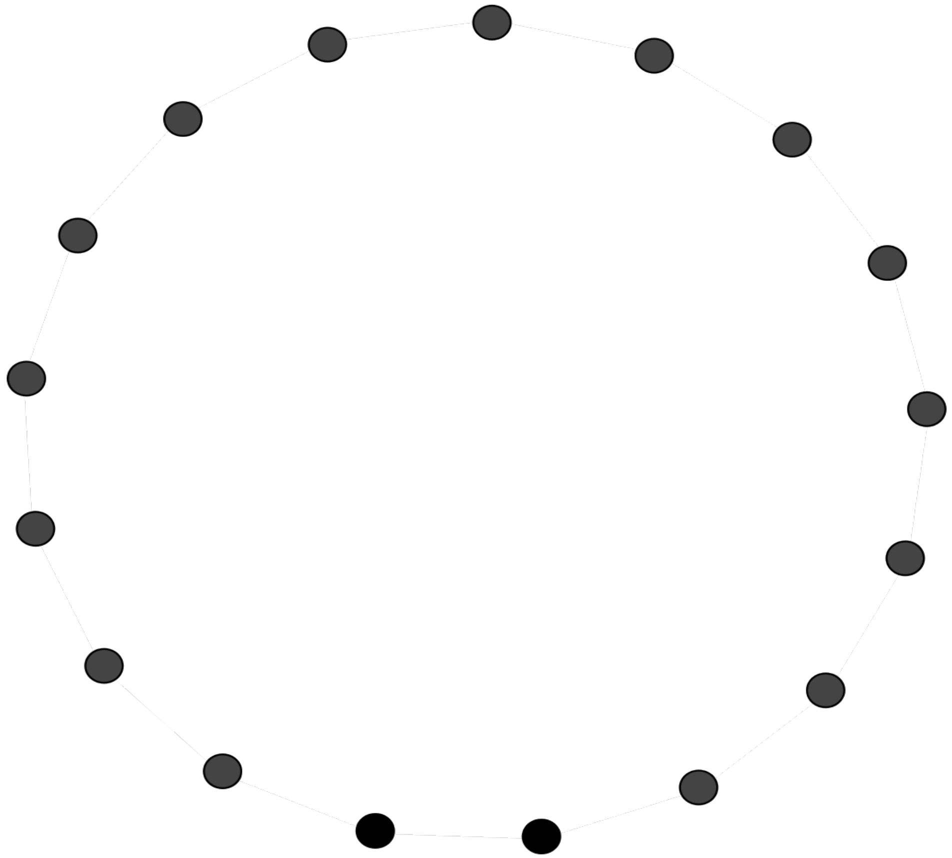
A questo punto possiamo rendere il gioco un po' più complicato cercando una figura monocromatica più complessa come un quadrangolo (cioè quattro vertici collegati da quattro spigoli tale che ogni vertice stia su due spigoli, ammettendo che gli spigoli possano intrecciarsi) o una **4-clique** (4-clicca oppure 4-cricca), cioè il grafo completo su quattro vertici (sei spigoli, ogni vertice sta su tre spigoli).



Ramsey 17

Con 17 vertici disegnare una 4-clicca monocromatica è davvero molto complicato; può essere utile però per far riflettere gli studenti sul tempo necessario per giocarlo.

- **Qual è il numero massimo degli spigoli che si possono disegnare?**
- **Assumendo di impiegare una media di 10 secondi per disegnare uno spigolo e controllare se appare una 4-clicca, quanto tempo sarebbe necessario?**
- **Quante diverse colorazioni con due colori si possono considerare sul grafo completo su 17 vertici?**



- Il numero massimo degli spigoli che si possono disegnare è
  $16+15+14+...+2+1=(16)(17)/2=\mathbf{153}$

- Assumendo di impiegare una media di 10 secondi per disegnare uno spigolo e controllare se appare una 4-clique, sarebbero necessari **1530 secondi**, cioè circa mezz’ora.

- Le diverse colorazioni con due colori che si possono considerare sul grafo completo su 17 vertici sono $\mathbf{2^{153}}$

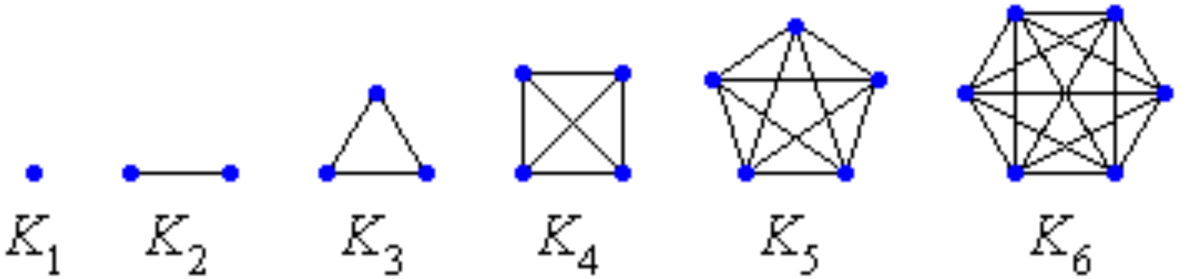
Per dare un risvolto più pratico a quanto detto, immaginiamo di dare una festa con persone che possono conoscersi o meno tra loro. Allora il rapporto di conoscenza si può intendere come il lato che unisce due persone, viste come vertici.
Se si conoscono il lato sarà blu, altrimenti sarà rosso.

Pur essendo stato possibile per Ramsey dimostrare l'esistenza di R(r,s), il calcolo del suo valore è rimasto un problema che ha tenuto impegnate le menti combinatorie per tutti i decenni a seguire.
Sono stati calcolati, ad esempio, R(3.3)=6 e R(4,4)=18.

Quindi sapendo che R(3,3)=6, se la festa avrà almeno sei invitati sicuramente ci saranno 3 persone che si conoscono.

Supponiamo di prendere n punti sul piano e di collegarli tramite segmenti, in tutti i modi possibili, vale a dire con $\frac{n(n-1)}{2}$ archi:

il grafo risultante è il grafo completo per n punti e si indica con K_n.
La figura seguente mostra i grafi completi fino a K_6.



Supponiamo di colorare gli archi di K_6 di rosso o blu: comunque lo faremo, ci sarà sempre un triangolo rosso o uno blu. Un modo equivalente di presentare la stessa conclusione è dire che tra 6 persone ce ne devono per forza essere 3 che si conoscono tutte tra loro o altrettante, nessuna delle quali conosce le altre.

Se riduciamo le persone a 5, questo non è più vero.

Il matematico inglese Frank Plumpton Ramsey (Cambridge, 22/1/1903 – Londra, 19/2/1930) dimostrò che per ogni valore di n esiste un $k = R(n)$ tale che K_k, colorato con due colori, contiene un K_n con archi tutti dello stesso colore;
se n= 3 abbiamo il triangolo degli esempi precedenti.

Il concetto chiave espresso dal teorema di Ramsey è che **ogni struttura complessa abbastanza grande, per quanto disordinata possa apparire, contiene una struttura ordinata di qualsiasi dimensione voluta.**

La versione infinita del teorema afferma che un grafo completo con un'infinità numerabile di nodi colorato con due colori contiene un sottografo completo con un'infinità numerabile di nodi, colorato con un solo colore.

Teorema di Ramsey (per i grafi colorati con due colori)

Per ogni k≥2, esiste un intero N=N(k) tale che ogni due-colorazione di un grafo con almeno N vertici contiene un sottografo monocromatico completo (clique) su k vertici.

Abbiamo verificato che:

Per N=5, esiste una bi-colorazione **priva** di triangoli monocromatici.

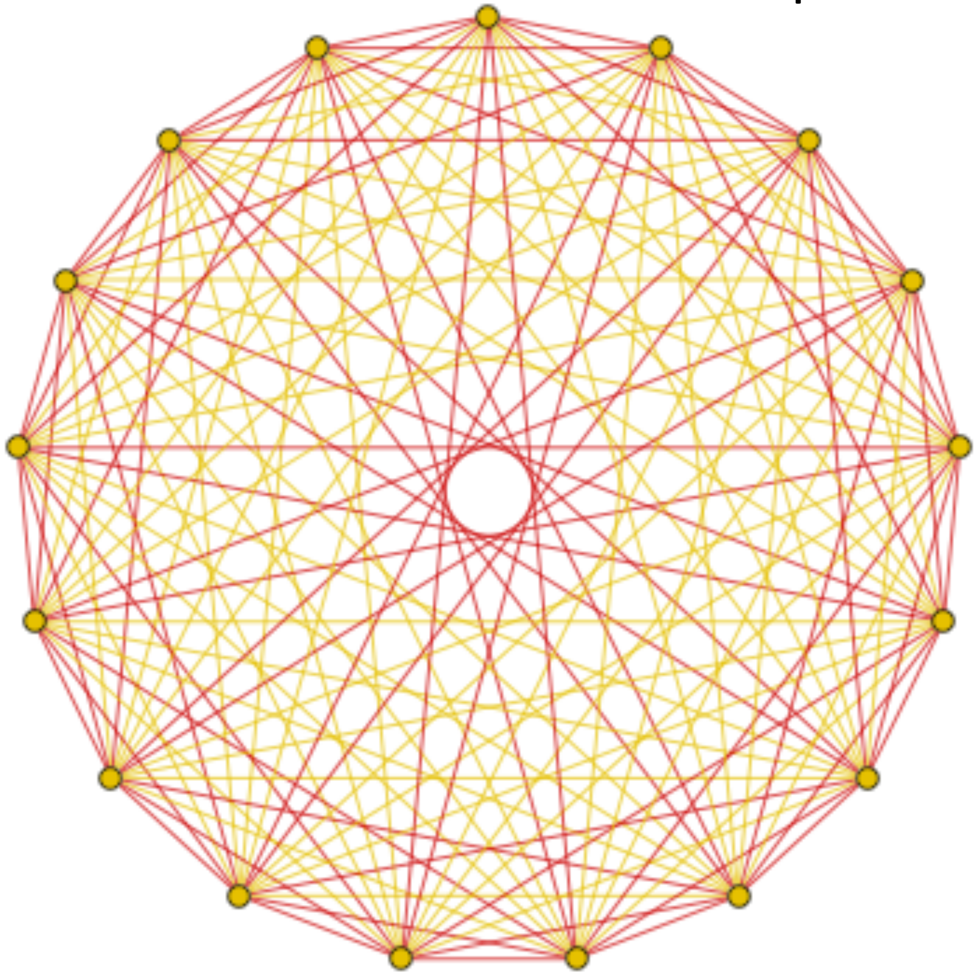
Per N=6, esiste una bi-colorazione **con un** triangolo monocromatico.

Osservazione

Esiste sempre almeno una 4-clique monocromatica su ogni grafo con 64 vertici, colorato con due colori.

Grafo giallo e rosso su 17 vertici privo di 4-clique

E’ possibile migliorare il bound precedente nel caso delle 4-clique, e dimostrare che già in ogni bi-colorazione di un grafo su 18 vertici esiste una 4-clique monocromatica.
Esiste invece un grafo su 17 vertici con due colorazioni privo di 4-clique monocromatiche.



Per quanto visto sopra, il numero di vertici minimo **R(N)** per garantire 3-clique e 4-clique monocromatiche è rispettivamente **R(3)=6, R(4)=18.**

Importanza del teorema di Ramsey

Il teorema di Ramsey è un risultato fondamentale in combinatoria.
La prima versione di questo risultato fu dimostrato da F.P. Ramsey e diede impulso alla teoria di Ramsey, che cerca la regolarità in mezzo al disordine, ovvero definisce una nozione di regolarità in una classe di strutture combinatorie e cerca di determinare condizioni per l'esistenza di strutture regolari entro strutture assegnate.
Nel caso dei grafi con due colorazioni, la regolarità cercata è un sottografo completo monocromatico (clique).

I numeri di Ramsey

Il teorema di Ramsey afferma che, fissato k, esiste un N=N(k) abbastanza grande tale che, in ogni colorazione con due colori di un grafo completo su N vertici, è possibile trovare una k-clique monocromatica.
Nella dimostrazione originale, Ramsey dimostrò il teorema con $N(k)=2^{2k-2}$. La dimostrazione verrà data nel prossimo seminario. Molto lavoro nell'ambito di questo ramo della combinatoria è stato rivolto a trovare stime migliori del numero N(k).
Per ogni k, il minimo valore che rende vera la tesi di Ramsey, prende il nome di

Numero di Ramsey di ordine k, indicato con ***R(k)***.

Cosa sappiamo dei numeri di Ramsey?

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
R(k)	1	2	6	18	43-48	102-165	205-540	282-1870	565-6588	798-23556

Gli alieni di Erdős

Quanto è difficile calcolare esattamente i numeri di Ramsey?

Al grande matematico ungherese di origine ebraica **Paul Erdős** è attribuito il seguente aneddoto:

Si immagini una forza aliena, dotata di armamenti molto più sofisticati e potenti di quelli terrestri, che invii una delegazione sulla Terra che chieda di calcolare il valore esatto di $R(5)$ entro un anno, pena la distruzione del pianeta.

Secondo Erdős ci converrebbe cooptare i più potenti calcolatori e i più bravi matematici del pianeta con la fondata speranza di venire a capo del problema.

Se invece ci avessero chiesto di calcolare $R(6)$ allora ci converrebbe impiegare ogni risorsa per cercare di combattere gli alieni.

Morale sull'importanza delle applicazioni della matematica alla teoria (e alla pratica) delle decisioni.

Ci possiamo domandare perché sia così difficile calcolare esattamente un numero di Ramsey. Non possiamo usare il calcolatore?

C’è solo un numero finito di 2-colorazioni di un grafo completo.

Non possiamo ciclare su tutte le colorazioni di un grafo, per esempio K48 e vedere se contiene una 5-clique monocromatica?

Se esiste una colorazione che non contiene una 5-clique monocromatica, allora, $R(5) = 49$.

Se invece ogni colorazione contiene una 5-clique monocromatica, allora dobbiamo testare tutte le 2-colorazioni di K47, ecc., fino a determinare il quinto numero di Ramsey.

Il problema di questa strategia, basata sulla forza bruta, è che il numero delle colorazioni da considerare è estremamente elevato.

Un K48 ha Bin(48,2)=1128 spigoli. Ogni spigolo si può colorare in due maniere e quindi dobbiamo controllare $2^{1128} \approx 3.6\times10^{339}$ colorazioni.

Al 2018, il più veloce super computer al mondo, il Cray Titan, poteva eseguire 20×10^{15} floating-point operazioni al secondo (FLOPS).

Se assumiamo (non realisticamente) che si possa verificare se una colorazione contiene una 5-clique monocromatica, con una semplice operazione in virgola mobile, sarebbero necessari più di 10^{315} anni per verificarle tutte.

Sembra assai plausibile però che la terra venga assorbita dal sole in meno di 10^{10} anni.

Conclusioni

Nonostante l'argomento sia piuttosto complesso, essendo stato proposto come un gioco ha coinvolto tutti gli alunni che, dopo una iniziale difficoltà nel recepire le regole, hanno mostrato interesse e lo hanno sperimentato volentieri, mostrando spirito di competizione e accanendosi a volte nel tentativo di battere il compagno.

Fondamentale, nella sperimentazione del gioco, è capire quando il numero di vertici diventa troppo alto rendendone così difficile l'esecuzione, così come è importante non dilungarsi troppo sulla parte teorica che agli alunni risulta effettivamente troppo difficile da comprendere.

E' risultato sicuramente interessante e anche curioso l'aneddoto di Erdős e la riflessione sul fatto che, per verificare se una colorazione contiene una 5-clique monocromatica, sarebbero necessari più di 10^{315} anni.