Dipartimento
di Matematica

Sapienza
Università di Roma

# La metodologia della ricerca variata: un'esperienza di didattica a distanza nei licei matematici

**Annalisa Cusi, Andrea Antonelli, Enza Neri, Lucia Claudia Pascalin, Davide Stellati**

Sapienza Università di Roma, Liceo Mamiani, Liceo Galilei (Civitavecchia)

**6 Novembre 2020**

# Contenuti di questo seminario

- **La metodologia della ricerca variata: quadro teorico ed elementi metodologici per la progettazione ed implementazione di attività**
- **La sperimentazione condotta a distanza:**

a) **Presentazione dell'attività "Esplorazione di tabelle"**

b) **Riflessioni sui risultati del lavoro condotto nelle classi: focus sulle risposte degli studenti**

c) **Riflessioni sui risultati del lavoro condotto nelle classi: focus sul ruolo dell'insegnante**

- **Conclusioni**

# Contenuti di questo seminario

- **La metodologia della ricerca variata: quadro teorico ed elementi metodologici per la progettazione ed implementazione di attività**
- La sperimentazione condotta a distanza:

a) Presentazione dell'attività "Esplorazione di tabelle"

b) Riflessioni sui risultati del lavoro condotto nelle classi: focus sulle risposte degli studenti

c) Riflessioni sui risultati del lavoro condotto nelle classi: focus sul ruolo dell'insegnante

- Conclusioni

# La metodologia MVI: com'è nata questa idea?

## Progetto di collaborazione e formazione docenti che ha coinvolto diversi ricercatori a livello internazionale

- Ferdinando Arzarello, Università di Torino
- Annalisa Cusi, Sapienza Università di Roma
- Eleonora Faggiano, Università di Bari
- Ornella Robutti, Università di Torino
- Osama Swidan, Ben-Gurion University of the Negev (Israel)
- Theodosia Prodromou, University of New England (Australia)

# La metodologia MVI: il quadro teorico

## PREMESSE: UN CAMBIAMENTO DI PROSPETTIVA

**Chevallard (2015): NUOVI PARADIGMI**

# La metodologia MVI: il quadro teorico

## PREMESSE: UN CAMBIAMENTO DI PROSPETTIVA

**Chevallard (2015): NUOVI PARADIGMI**

da "**VISITING MONUMENTS**"

"*...each of those* ***pieces of knowledge*** *is* ***approached as a monument that stands on its own****, that students are expected to admire and enjoy,* ***even when they know next to nothing about its raisons d'être****, now or in the past.*"

# La metodologia MVI: il quadro teorico

## PREMESSE: UN CAMBIAMENTO DI PROSPETTIVA

**Chevallard (2015): NUOVI PARADIGMI**

da "**VISITING MONUMENTS**"

a "**QUESTIONING THE WORLD**"

*"... the paradigm of questioning the world calls for a very different attitude ...which inclines one to* ***behave as if knowledge was essentially still to discover and still to conquer—or to rediscover and conquer anew****. ...knowing is "****knowing forwards****".*

# La metodologia MVI: il quadro teorico

## PREMESSE: UN CAMBIAMENTO DI PROSPETTIVA

**Chevallard (2015): NUOVI PARADIGMI**

da "**VISITING MONUMENTS**"

a "**QUESTIONING THE WORLD**"

**APPROCCIO SPERIMENTALE ALL'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA** (Artigue & Blomhøj, 2013; Arzarello et al, 2011)

# La metodologia MVI: il quadro teorico

## PREMESSE: UN CAMBIAMENTO DI PROSPETTIVA

**Chevallard (2015): NUOVI PARADIGMI**

da "**VISITING MONUMENTS**"

a "**QUESTIONING THE WORLD**"

**APPROCCIO SPERIMENTALE ALL'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA** (Artigue & Blomhøj, 2013; Arzarello et al, 2011)

**La scienza e la matematica** forniscono potenti intuizioni del mondo: ci permettono di costruire conoscenza e, insieme, di apprezzare le meraviglie del mondo naturale. **In entrambe, una modalità dominante di costruzione della conoscenza è attraverso la ricerca**.

Fibonacci Project

# La metodologia MVI: il quadro teorico

## PREMESSE: UN CAMBIAMENTO DI PROSPETTIVA

### I QUATTRO LIVELLI DI INQUIRY NELL'AMBITO DELLA DIDATTICA DELLE SCIENZE

**(Bell, Smetana e Binns, 2005)**

| | Domanda | Procedura | Soluzioni |
|---|---|---|---|
| 1. INQUIRY CONFERMATIVO GLI STUDENTI CONFERMANO UN PRINCIPIO ATTRAVERSO UN'ATTIVITÀ IN CUI I RISULTATI SONO GIÀ NOTI IN ANTICIPO | X | X | X |
| 2. INQUIRY STRUTTURATO GLI STUDENTI INVESTIGANO UNA DOMANDA PRESENTATA DALL'INSEGNANTE ATTRAVERSO UNA PROCEDURA ASSEGNATA | X | X | |
| 3. INQUIRY GUIDATO GLI STUDENTI INVESTIGANO UNA DOMANDA PRESENTATA DALL'INSEGNANTE USANDO PROCEDURE PROGETTATE SELEZIONATE DAGLI STUDENTI STESSI | X | | |
| 4. INQUIRY APERTO GLI STUDENTI INVESTIGANO DOMANDE FORMULATE DA LORO STESSI ATTRAVERSO PROCEDURE CHE PROGETTANO O SELEZIONANO | | | |

# La metodologia MVI: il quadro teorico

## PREMESSE: UN CAMBIAMENTO DI PROSPETTIVA

### I QUATTRO LIVELLI DI INQUIRY NELL'AMBITO DELLA DIDATTICA DELLE SCIENZE

**(Bell, Smetana e Binns, 2005)**

| | Domanda | Procedura | Soluzioni |
|---|---|---|---|
| 1. INQUIRY CONFERMATIVO: GLI STUDENTI CONFERMANO UN PRINCIPIO ATTRAVERSO UN'ATTIVITÀ IN CUI I RISULTATI SONO GIÀ NOTI IN ANTICIPO | X | X | X |
| 2. INQUIRY STRUTTURATO: GLI STUDENTI INVESTIGANO UNA DOMANDA PRESENTATA DALL'INSEGNANTE ATTRAVERSO UNA PROCEDURA ASSEGNATA | X | X | |
| 3. INQUIRY GUIDATO: GLI STUDENTI INVESTIGANO UNA DOMANDA PRESENTATA DALL'INSEGNANTE USANDO PROCEDURE PROGETTATE SELEZIONATE DAGLI STUDENTI STESSI | X | | |
| 4. INQUIRY APERTO: GLI STUDENTI INVESTIGANO DOMANDE FORMULATE DA LORO STESSI ATTRAVERSO PROCEDURE CHE PROGETTANO O SELEZIONANO | | | |

**Come stimolare processi di questo tipo anche in ambito matematico, conducendo gli studenti verso forme sempre più autonome di inquiry?**

# La metodologia MVI: il quadro teorico

## La logica dell'inquiry e la teoria della variazione

**Logic of inquiry** (Hintikka, 1999)

**Variation theory** (Marton et al., 2004)

# La metodologia MVI: il quadro teorico

## La logica dell'inquiry e la teoria della variazione

**Logic of inquiry** (Hintikka, 1999):

Costruzione di conoscenza come **processo interrogativo tra due "giocatori"**.

**Variation theory** (Marton et al., 2004)

# La metodologia MVI: il quadro teorico

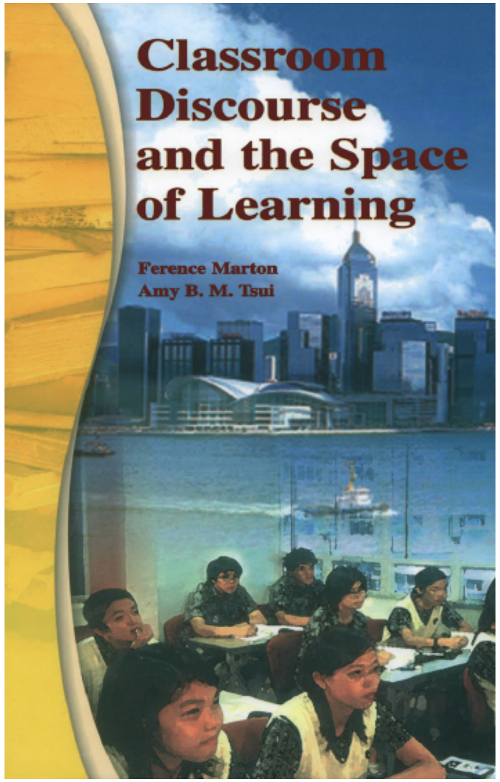
## La logica dell'inquiry e la teoria della variazione

**Logic of inquiry** (Hintikka, 1999):

Costruzione di conoscenza come **processo interrogativo tra due "giocatori"**.

**Variation theory** (Marton et al., 2004)

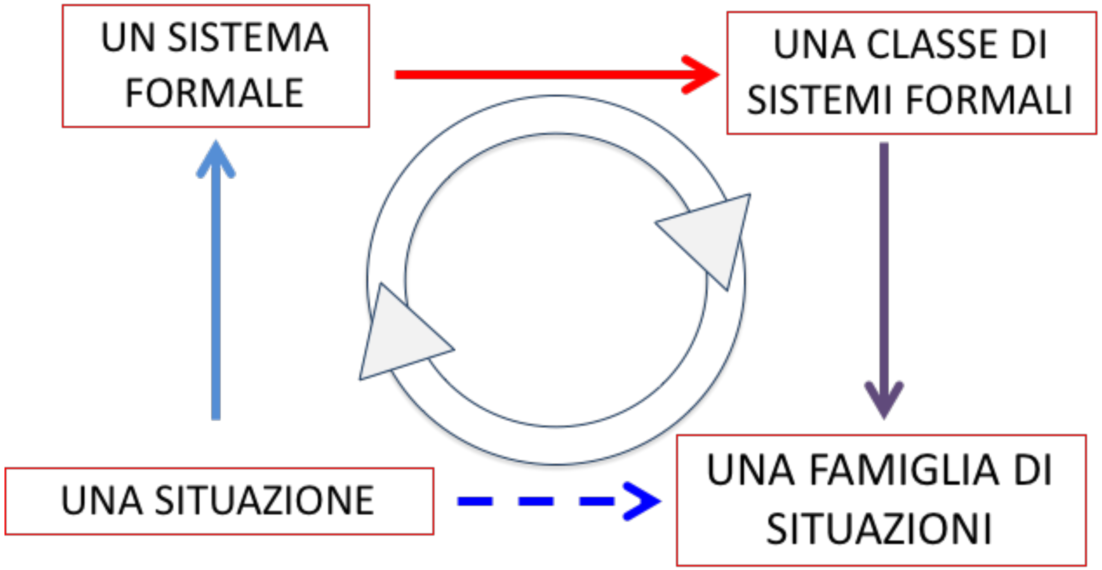
Soltanto osservando e sperimentando la **variazione**, è possibile **discernere** gli **aspetti critici** che caratterizzano gli **oggetti di apprendimento** e diventare realmente **consapevoli** di essi.



# La metodologia MVI: il quadro teorico

## IL CICLO VIRTUOSO

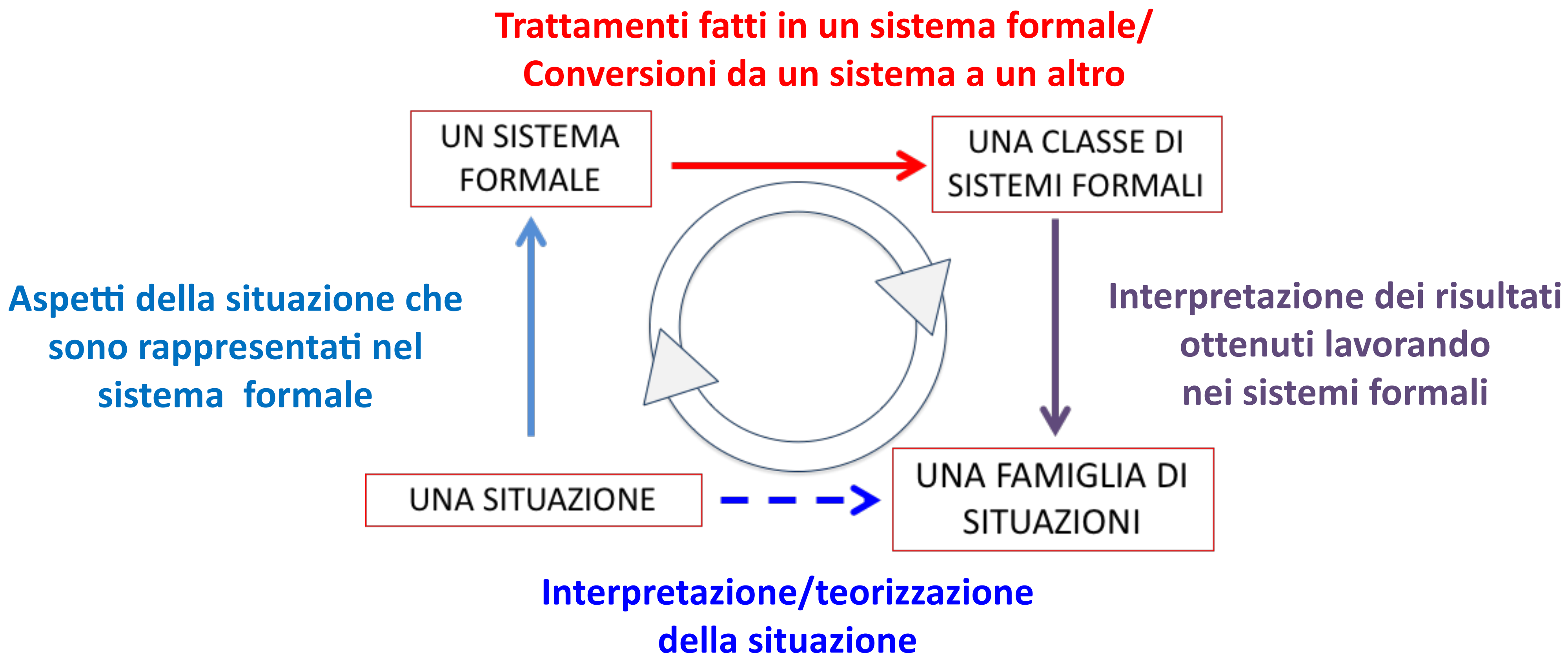
Progettare attività per condurre gli studenti attraverso il **CICLO VIRTUOSO** (Arzarello, 2016):



# La metodologia MVI: il quadro teorico

## IL CICLO VIRTUOSO

Progettare attività per condurre gli studenti attraverso il **CICLO VIRTUOSO** (Arzarello, 2016):



# La metodologia MVI: progettazione di attività

## Come progettare le attività per stimolare processi di ricerca?

## UN ESEMPIO: l'Attività "Quadrati"

**La progettazione iniziale delle attività** presentate in questo seminario **è stata realizzata nell'ambito del corso PLS "*Metodologie di insegnamento della matematica per favorire negli studenti un approccio di ricerca*"** tenuto da me e da Ornella Robutti presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Torino

**Ringrazio**, in particolare, le docenti
**Paola Curletti e Silvia Ghiazza** (Liceo Majorana, Torino),
che hanno sperimentato per prime le attività nelle loro classi

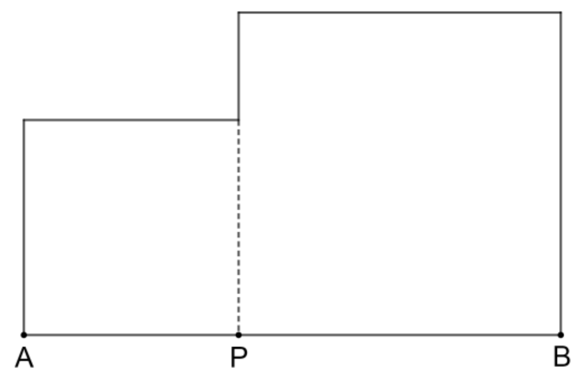
# La metodologia MVI: progettazione di attività

## Come progettare le attività per stimolare processi di ricerca?

## UN ESEMPIO: l'Attività "Quadrati" (parte 1)

In un segmento AB di lunghezza 10 cm, prendi un punto P e costruisci due quadrati sullo stesso lato rispetto alla retta AB: uno con lato AP, l'altro con lato PB.

**Come cambia** il **perimetro** dell'intera figura ottenuta dai due quadrati **al variare della posizione di P sul segmento AB?**



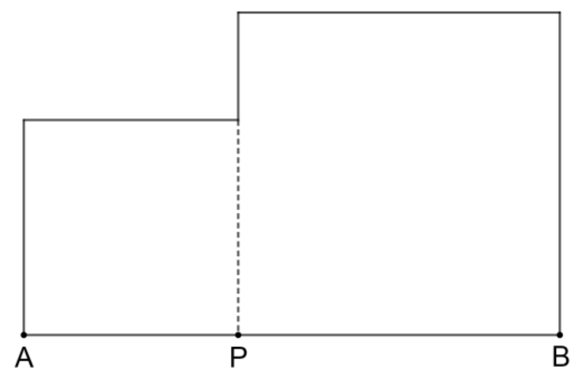
# La metodologia MVI: progettazione di attività

## Come progettare le attività per stimolare processi di ricerca?

## UN ESEMPIO: l'Attività "Quadrati" (parte 1)

In un segmento AB di lunghezza 10 cm, prendi un punto P e costruisci due quadrati sullo stesso lato rispetto alla retta AB: uno con lato AP, l'altro con lato PB.

**Come cambia** il **perimetro** dell'intera figura ottenuta dai due quadrati **al variare della posizione di P sul segmento AB?**




Studio di una **situazione problema**, con la richiesta di focalizzare l'attenzione su alcune **grandezze variabili**, osservandone **la variazione** e mettendo in luce **gli effetti di tale variazione**.

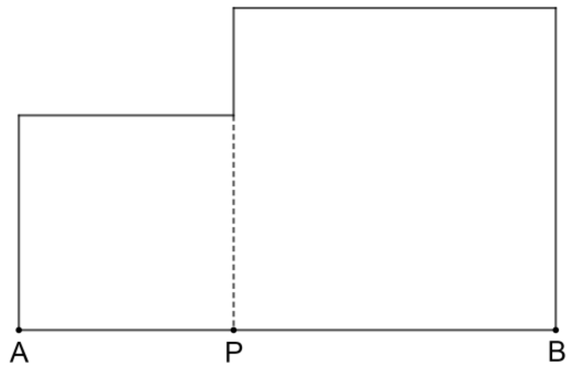
# La metodologia MVI: progettazione di attività

## Come progettare le attività per stimolare processi di ricerca?

## UN ESEMPIO: l'Attività "Quadrati" (parte 1)

In un segmento AB di lunghezza 10 cm, prendi un punto P e costruisci due quadrati sullo stesso lato rispetto alla retta AB: uno con lato AP, l'altro con lato PB.

**Come cambia** il **perimetro** dell'intera figura ottenuta dai due quadrati **al variare della posizione di P sul segmento AB?**




**Ruolo dell'insegnante nel corso della discussione:**

- **chiede chiarimenti e stimola un confronto** con l'obiettivo di **affinare la formulazione delle congetture;**
- **stimola la costruzione di argomentazioni** a supporto delle **congetture** proposte, attraverso domande del tipo.

**"Cos'hai osservato?"**
**"Siete d'accordo con questa osservazione?"**
**"Perché?"**

# La metodologia MVI: progettazione di attività

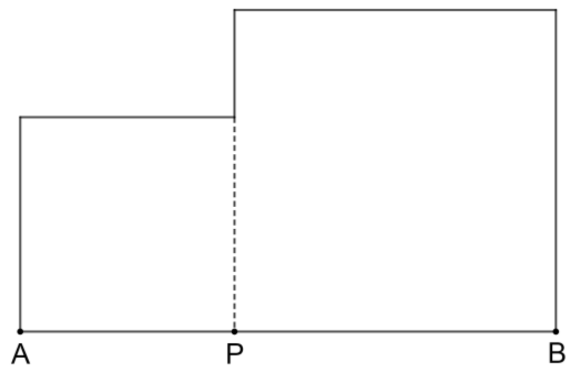
## Come progettare le attività per stimolare processi di ricerca?

## UN ESEMPIO: l'Attività "Quadrati" (parte 2)

Costruisci la figura dei due quadrati in **GeoGebra** e costruisci una **tabella** per raccogliere i dati. Osserva e studia come varia la figura quando muovi P su AB.

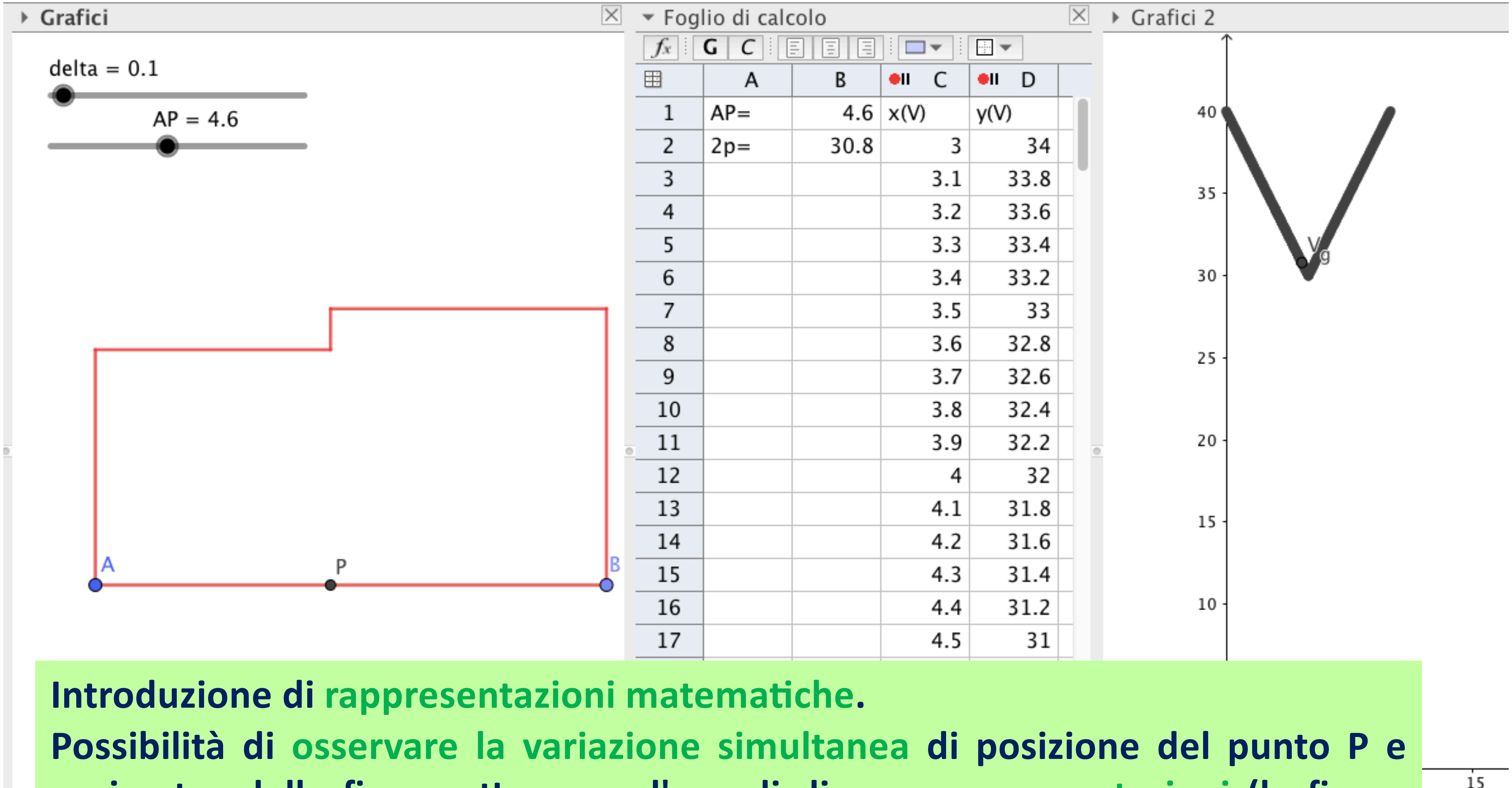
**a)** Fai una congettura su come il perimetro della figura cambia quando P si muove e crea il **grafico** che rappresenta il perimetro in base alla tua congettura. **Verifica la tua congettura.**

**b)** Giustifica la forma del grafico che hai creato, trovando **un'espressione matematica che rappresenti il perimetro quando P varia su AB**.



# La metodologia MVI: progettazione di attività

## Come progettare le attività per stimolare processi di ricerca?




**Introduzione di rappresentazioni matematiche.**

**Possibilità di osservare la variazione simultanea di posizione del punto P e perimetro della figura attraverso l'uso di diverse rappresentazioni (la figura geometrica dinamica, la tabella, il grafico cartesiano).**

# La metodologia MVI: progettazione di attività

## Come progettare le attività per stimolare processi di ricerca?

**Passaggio successivo:** focus su **altre variabili/parametri**

L'insegnante pone nuove domande in modo da **favorire il passaggio a successivi livelli di ricerca**.

**"Cosa succede se l'ipotesi A non vale?"**

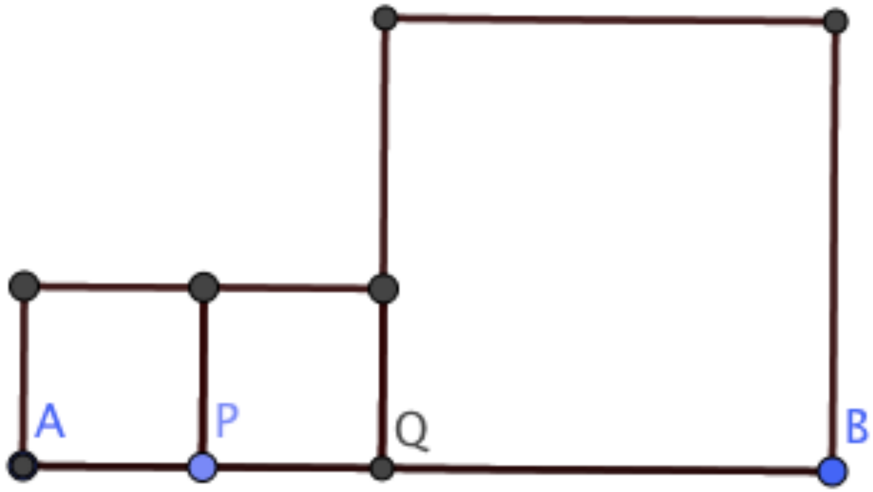
**"E se al posto di A considerassimo l'ipotesi B?"**

# La metodologia MVI: progettazione di attività

## Come progettare le attività per stimolare processi di ricerca?

## UN ESEMPIO: l'Attività "Quadrati" (parte 3)

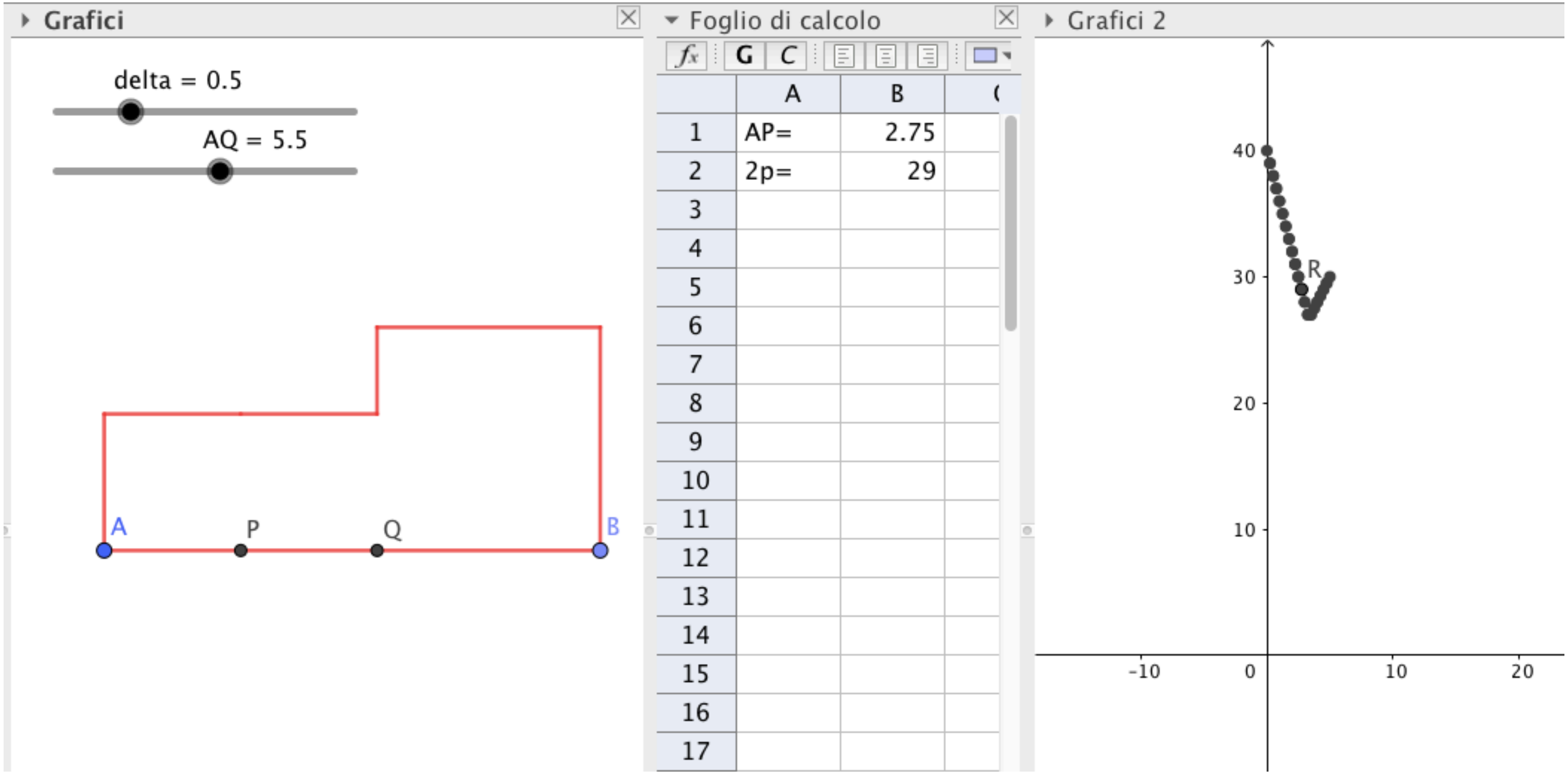
**Che cosa succede se si prendono su AB due punti, P e Q tali che AP = PQ** e si considerano i due quadrati con lati AP e PQ dalla stessa parte rispetto alla retta AB, e un terzo quadrato con lato QB? **Come cambia il perimetro della figura? Perché?**



# La metodologia MVI: progettazione di attività

## Come progettare le attività per stimolare processi di ricerca?

## UN ESEMPIO: l'Attività "Quadrati" (parte 3)



# La metodologia MVI: progettazione di attività

## Come progettare le attività per stimolare processi di ricerca?

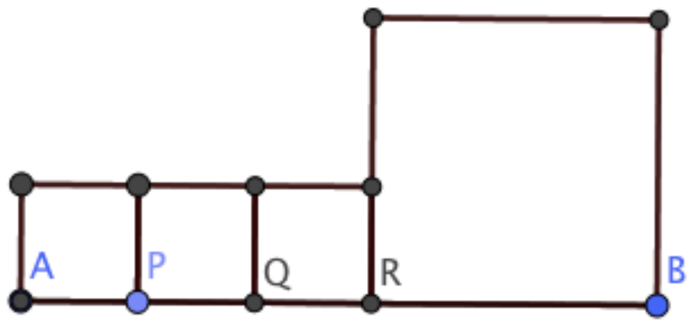
## UN ESEMPIO: l'Attività "Quadrati" (parte 4)

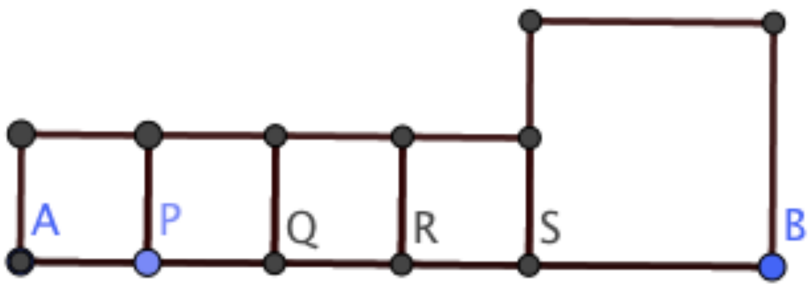
E se considerassimo su AB **tre punti P, Q, R** in modo che AP=PQ=QR?

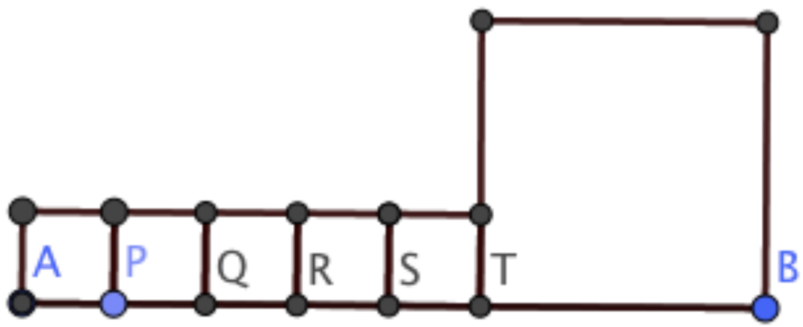
E se considerassimo **4 punti**?

E se ne considerassimo **5**? …

…**E se considerassimo un numero sempre maggiore di punti?**



# La metodologia MVI: progettazione di attività

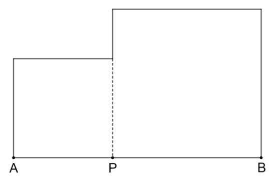
## Come progettare le attività per stimolare processi di ricerca?

## UN ESEMPIO: l'Attività "Quadrati" (parte 4)

**E se considerassimo su AB tre punti P, Q, R in modo che AP=PQ=QR?**
**E se considerassimo 4 punti? E se ne considerassimo 5? …**

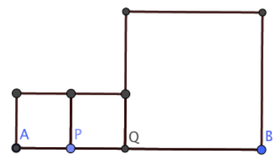
n=1

$$2p = 3x + 3(10 - x) + |10 - x - x| = \mathbf{30 + |10 - 2x|}$$
$$0 \leq x \leq 10$$



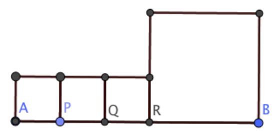

n=2

$$2p = 5x + 3(10 - 2x) + |10 - 2x - x| = \mathbf{30 - x + |10 - 3x|}$$
$$0 \leq 2x \leq 10$$



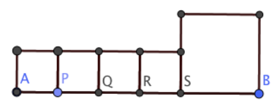

n=3

$$2p = 7x + 3(10 - 3x) + |10 - 3x - x| = \mathbf{30 - 2x + |10 - 4x|}$$
$$0 \leq 3x \leq 10$$




n=4

$$2p = 9x + 3(10 - 4x) + |10 - 4x - x| = \mathbf{30 - 3x + |10 - 5x|}$$
$$0 \leq 4x \leq 10$$




$$\boxed{\begin{array}{c}\mathbf{2p = 30 - (n - 1)x + |10 - (n + 1)x|} \\ \mathbf{0 \leq nx \leq 10}\end{array}}$$

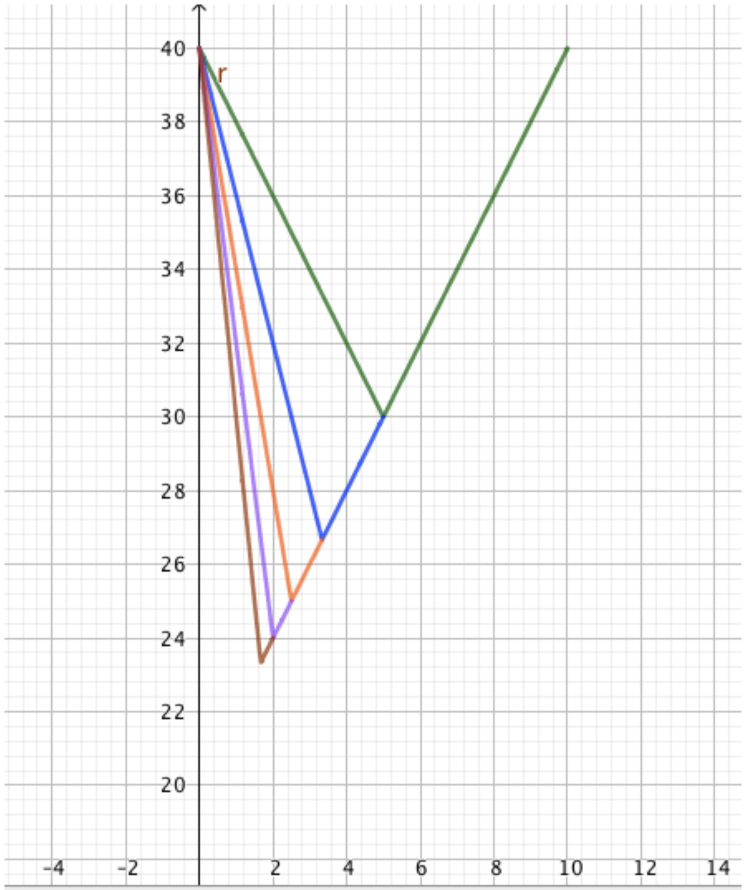
**Attivazione di un processo di generalizzazione**

# La metodologia MVI: progettazione di attività

## Come progettare le attività per stimolare processi di ricerca?

## UN ESEMPIO: l'Attività "Quadrati" (parte 4)

**E se considerassimo su AB tre punti P, Q, R in modo che AP=PQ=QR?**
**E se considerassimo 4 punti? E se ne considerassimo 5? ...**




$$\boldsymbol{2p = 30 - (n-1)x + |10 - (n+1)x|}$$
$$\boldsymbol{0 \leq nx \leq 10}$$

Il massimo è sempre 40 (si ottiene per x=0 in tutti i casi)

Il minimo varia e si ottiene per

$$x = \frac{10}{n+1}$$

$$\boldsymbol{2p(min) = 30 - (n-1)}\frac{10}{n+1}$$

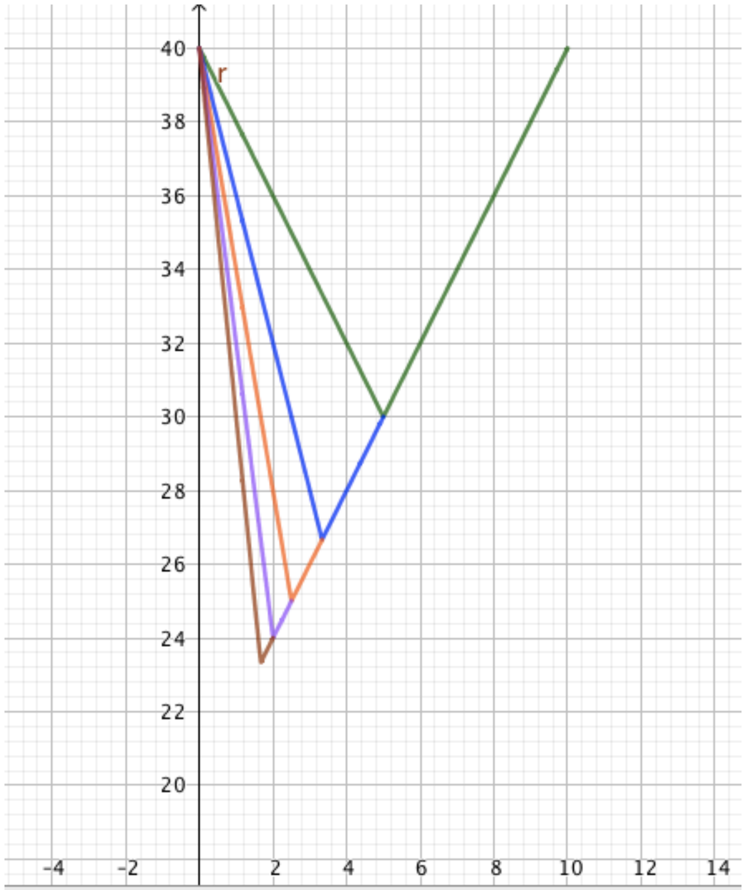
$$\lim_{n \to +\infty} \boldsymbol{2p(min) = 30 - 10 = 20}$$

# La metodologia MVI: progettazione di attività

## Come progettare le attività per stimolare processi di ricerca?

## UN ESEMPIO: l'Attività "Quadrati" (parte 4)

**E se considerassimo su AB tre punti P, Q, R in modo che AP=PQ=QR?**
**E se considerassimo 4 punti? E se ne considerassimo 5? …**




**Osservazioni di uno studente, dopo aver rappresentato il grafico del perimetro fino al caso di cinque quadrati:**

*"Il valore minimo del perimetro, all'aumentare del numero di quadrati, sarà 20 cm perché **è l'intersezione della retta passante per i punti di minimo con l'asse y**.*

*Si vede anche nella figura geometrica: **se aumentiamo il numero dei quadrati, i lati diventano sempre più corti, quindi all'aumentare dei quadrati ottengo una figura costituita dalla sovrapposizione di due segmenti di lunghezza 10cm** (la lunghezza di AB). Il perimetro sarà la somma delle lunghezze di questi due segmenti, quindi 20 cm."*

# La metodologia MVI: progettazione di attività

## Come progettare le attività per stimolare processi di ricerca?

## UN ESEMPIO: l'Attività "Quadrati" (parte 5)

Possibili altre variazioni:

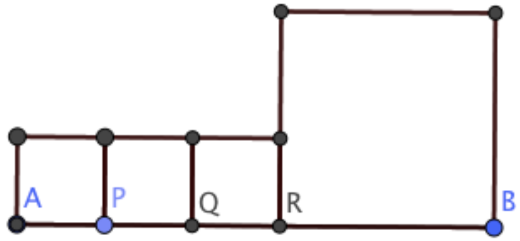
E se AB non avesse lunghezza 10?

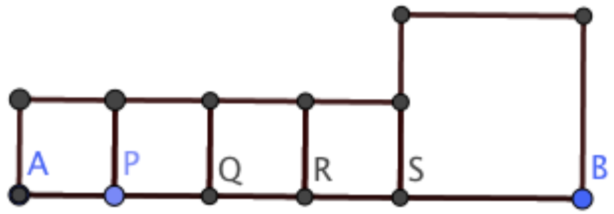
E se anziché il perimetro, considerassimo l'**area della figura**?

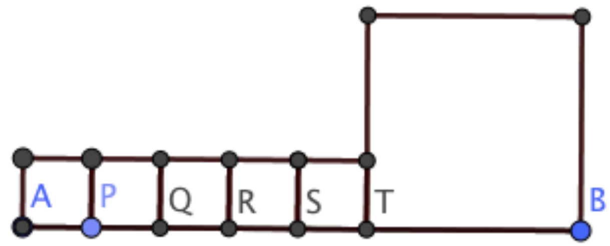
E se considerassimo **triangoli equilateri**, anziché quadrati?

E se considerassimo dei **cubi**?

…



# La metodologia MVI: progettazione di attività

## LE FASI DEL LAVORO IN CLASSE

- **Momenti di lavoro a piccoli gruppi**
- **Discussioni con focus su:**
  - **congetture prodotte (ogni variazione consente di generare nuove congetture)**
  - **giustificazioni/dimostrazioni delle congetture**
  - **riflessioni sui processi attivati e sulle rappresentazioni utilizzate**

**Una riflessione sulle potenzialità di questa metodologia: FOCUS SUI PROCESSI**

**ESPLORARE E CONGETTURARE**

**ARGOMENTARE E DIMOSTRARE**

**RISOLVERE PROBLEMI E MODELLIZZARE**

# Contenuti di questo seminario

- La metodologia della ricerca variata: quadro teorico ed elementi metodologici per la progettazione ed implementazione di attività
- **La sperimentazione condotta a distanza:**

a) **Presentazione dell'attività "Esplorazione di tabelle"**

b) **Riflessioni sui risultati del lavoro condotto nelle classi: focus sulle risposte degli studenti**

c) Riflessioni sui risultati del lavoro condotto nelle classi: focus sul ruolo dell'insegnante

- Conclusioni

# La sperimentazione condotta a distanza
# Report dell'esperienza al Liceo Terenzio Mamiani

## Alcune informazioni sul contesto della sperimentazione

**DOCENTI COINVOLTI:**

- **Annalisa Cusi (Dipartimento di Matematica – Sapienza Università di Roma)**
- **Andrea Antonelli (Liceo Terenzio Mamiani)**
- **Pietro Sabatino (Liceo Terenzio Mamiani)**
- **Davide Stellati (tesista - Sapienza Università di Roma)**

**PERIODO DELLA SPERIMENTAZIONE:**

**Aprile-Maggio 2020**

**STUDENTI COINVOLTI:**

**Classe 4°E, Liceo Terenzio Mamiani**

# La sperimentazione condotta a distanza
# Report dell'esperienza al Liceo «G. Galilei» di Civitavecchia

## Alcune informazioni sul contesto della sperimentazione

**DOCENTI COINVOLTI:**

- **Annalisa Cusi (Dipartimento di Matematica – Sapienza Università di Roma)**
- **Enza Neri (Liceo Galilei)**
- **Lucia Claudia Pascalin (Liceo Galilei)**
- **Davide Stellati (tesista - Sapienza Università di Roma)**

**PERIODO DELLA SPERIMENTAZIONE:**

**Maggio-Giugno 2020**

**STUDENTI COINVOLTI:**

**Classe 1°AS, Liceo Galilei**

# La sperimentazione condotta a distanza
# Report dell'esperienza al Liceo Terenzio Mamiani

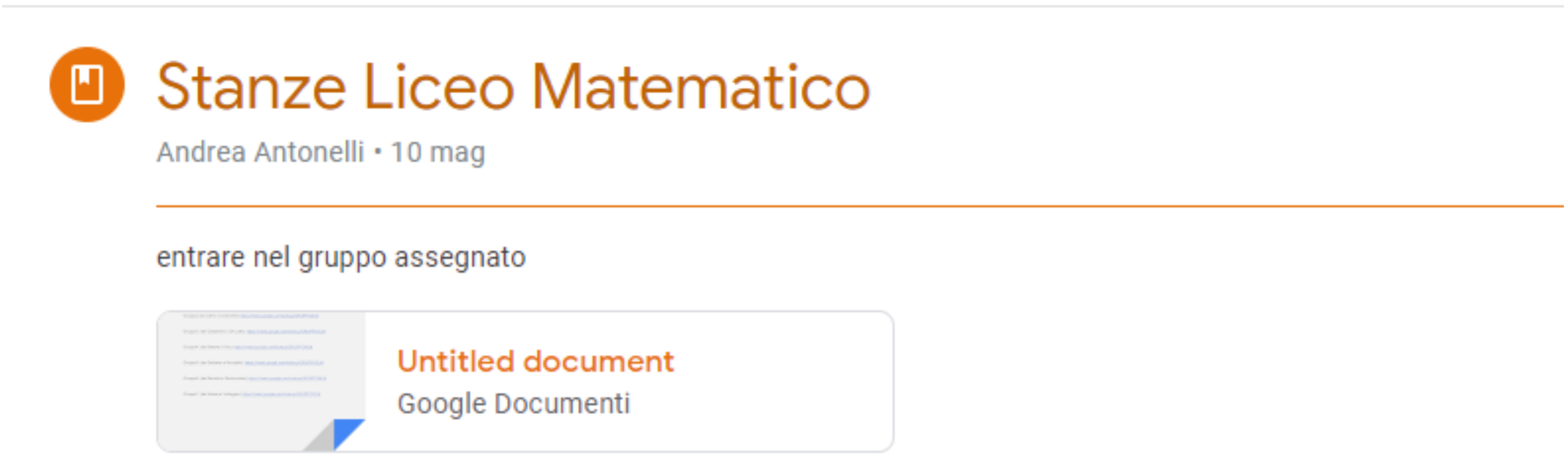
## Metodologia

- 4 incontri a cadenza settimanale (40 minuti ciascuno)
- Lavoro a gruppi a distanza (4 studenti per gruppo, nomina di un referente per ogni gruppo)
- Utilizzo della piattaforma Google Classroom per consegnare le schede e per caricare le risposte
- Uso della piattaforma Google Meet per realizzare le discussioni di classe, organizzate attraverso l'uso di file OneNote

# La sperimentazione condotta a distanza
# Report dell'esperienza al Liceo Terenzio Mamiani

## Metodologia – Il lavoro a piccoli gruppi

**Attraverso la piattaforma Meet di Google vengono create delle stanze virtuali (condivise su Classroom). Alle stanze, create per consentire il lavoro a piccoli gruppi a distanza, hanno accesso gruppi composti da 4 studenti.**



# La sperimentazione condotta a distanza
# Report dell'esperienza al Liceo «G. Galilei» di Civitavecchia

## Metodologia

- **5 incontri a cadenza settimanale (1,5h ciascuno)**
- **Lavoro a gruppi a distanza (4 studenti per gruppo, nomina di un referente per ogni gruppo)**
- **Utilizzo della piattaforma Google Classroom per consegnare le schede e per caricare le risposte**
- **Uso della piattaforma Google Meet per realizzare le discussioni di classe, organizzate attraverso l'uso di file OneNote**

## La sperimentazione condotta a distanza
## Report dell'esperienza al Liceo Terenzio Mamiani

### L’attività proposta: "Esplorazione di tabelle"

**Esplorazione di regolarità numeriche**
**con il metodo della ricerca variata**

# La sperimentazione condotta a distanza
# Report dell'esperienza al Liceo Terenzio Mamiani

## L’attività proposta: "Esplorazione di tabelle"

### Scheda 1

Osservate attentamente questa tabella. Notate delle regolarità?

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 3 | 3 |
| 2 | 4 | 8 |
| 3 | 5 | 15 |
| 4 | 6 | 24 |
| 5 | 7 | 35 |
| | | |
| | | |

Dopo aver elencato tutte le regolarità osservate, provate a motivarle.

## La sperimentazione condotta a distanza
## Report dell'esperienza al Liceo Terenzio Mamiani

### Gli obiettivi didattici dell'attività

- **Creare un contesto per stimolare la formulazione di congetture e la costruzione di argomentazioni e dimostrazioni**
- **Favorire lo sviluppo di abilità di *inquiry, problem solving, un generale "senso* per la matematica“**
- **Stimolare un uso del linguaggio algebrico come strumento di pensiero**

# La sperimentazione condotta a distanza
# Report dell'esperienza al Liceo Terenzio Mamiani

## Le congetture elaborate dagli studenti – Scheda 1

i numeri delle prime due colonne sono scritti in sequenza (nella 2ª colonna si inizia da 3)

**La prima e la seconda colonna sono composte da numeri consecutivi**

LA DIFFERENZA TRA DUE QUALSIASI NUMERI CONSECUTIVI APPARTENENTI ALLA 1ª O ALLA 2ª COLONNA E' SEMPRE 1

- la 1ª e la 2ª colonna sono composte da numeri consecutivi

# La sperimentazione condotta a distanza
# Report dell'esperienza al Liceo Terenzio Mamiani

## Le congetture elaborate dagli studenti – Scheda 1

**I prodotti tra i numeri della prima e della seconda colonna coincidono con i numeri della terza colonna**

moltiplicando i numeri della colonna centrale per i numeri della colonna di sinistra e viceversa, si ottengono i numeri della colonna di destra

se si dividono i numeri della colonna di destra per i numeri della colonna centrale, si ottengono i numeri della colonna di sinistra

1 - I PRODOTTI TRA I NUMERI DELLA 1ª E DELLA 2ª COLONNA (NELLE RISPETTIVE RIGHE) COINCIDONO CON I NUMERI DELLA 3ª COLONNA

Secondo me moltiplicando i numeri della 1ª colonna con quelli della seconda il risultato si trova nella 3ª colonna e a sua volta se dividiamo i numeri della 3ª colonna con quelli della 2ª colonna il risultato è quello della 1ª e viceversa.

# La sperimentazione condotta a distanza
# Report dell'esperienza al Liceo Terenzio Mamiani

## Le congetture elaborate dagli studenti – Scheda 1

sottraendo i numeri della colonna di sinistra
da i numeri della colonna centrale si
ottiene sempre 2

**La differenza tra i numeri della prima colonna e della prima è sempre 2**

LA DIFFERENZA TRA I NUMERI DELLA 2ª COLONNA E DELLA 1ª
E' SEMPRE 2

In ogni riga il numero della 2ª colonna equivale al
numero della 1ª più 2.

# La sperimentazione condotta a distanza
# Report dell'esperienza al Liceo Terenzio Mamiani

## Le congetture elaborate dagli studenti – Scheda 1

LE DIFFERENZE TRA I NUMERI DELLA 3ª COLONNA SONO IN PROGRESSIONE ARITMETICA (+2)

| x | y | x · y |
|---|---|---|
| 1 | 3 | 3 |
| 2 | 4 | 8 |
| 3 | 5 | 15 |
| 4 | 6 | 24 |
| 5 | 7 | 35 |

+5
+7
+9
+11

+2
+2
+2

**La differenza tra i numeri della terza colonna sono in progressione aritmetica**

# La sperimentazione condotta a distanza
# Report dell'esperienza al Liceo «G. Galilei» di Civitavecchia

## Le congetture elaborate dagli studenti – Scheda 1

**Proprietà 1**

I numeri presenti nelle prime due colonne sono consecutivi.

Nella prima colonna sono rappresentati tutti i numeri naturali in successione a partire da uno.
Nella seconda colonna sono rappresentati tutti i numeri naturali in successione a partire da tre.

nella 1° e nella 2° colonna si ha una
successione di numeri consecutivi

1° COLONNA : [redacted] PRIMI NUMERI NATURALI DIVERSI DA 0
2° COLONNA : PRIMI NUMERI NATURALI MAGGIORI DI 2

# La metodologia della ricerca variata (MVI)

**<u>Proprietà 2</u>: *gli elementi nella terza colonna sono i prodotti degli elementi nella prima e seconda colonna appartenenti alla stessa riga***

**Proprietà 2**

I numeri della prima colonna moltiplicati con quelli della seconda danno come prodotto i numeri presenti nella terza.
Di conseguenza al punto precedente, i numeri della terza colonna divisi per quelli della seconda danno come quoziente i numeri della prima.

**Ogni riga è una moltiplicazione, i numeri delle prime due colonne sono i fattori, mentre il numero della terza colonna è il prodotto. il prodotto è anche uguale a quello della moltiplicazione tra un numero n e n + 2 sulla prima colonna.**

Se si moltiplica un numero della prima colonna con quello della seconda colonna ad esso adiacente, si ottiene il numero della terza colonna che si trova nella loro stessa riga. Con un ragionamento analogo, dividendo un numero della terza colonna con quello della prima colonna nella sua stessa riga, si ottiene quello della seconda colonna sempre nella loro stessa riga. Allo stesso modo, dividendo un numero della terza colonna con quello della seconda colonna ad esso adiacente, si ottiene il numero della prima colonna nella loro stessa riga.

# La sperimentazione condotta a distanza
# Report dell'esperienza al Liceo «G. Galilei» di Civitavecchia

## Le congetture elaborate dagli studenti – Scheda 1

### Proprietà 3

La differenza tra numeri delle stesse righe della prima e seconda è sempre uguale a 2.

**Preso un numero n sulla prima colonna, il numero sulla sua stessa riga della seconda colonna è uguale ad n+2**

Se a un numero della prima colonna si aggiunge 2 si ottiene il numero della seconda colonna della stessa riga
Allo stesso modo, se si sottrae 2 ad un numero della seconda colonna si otterrà il numero della prima colonna della stessa riga

Ciascun numero della 2° colonna è uguale al suo corrispondente nella 1° sommato 2

# La sperimentazione condotta a distanza
# Report dell'esperienza al Liceo «G. Galilei» di Civitavecchia

## Le congetture elaborate dagli studenti – Scheda 1

### Alternanza di righe costituite da numeri pari e numeri dispari

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 3 | 3 |
| 2 | 4 | 8 |
| 3 | 5 | 15 |
| 4 | 6 | 24 |
| 5 | 7 | 35 |
| | | |
| | | |

a) **Guardando le colonne si alternano sempre numeri pari e dispari e nel caso delle prime due colonne i numeri sono successivi**

b) Se si sommano un numero della prima colonna con quello della seconda colonna ad esso adiacente si otterranno tutti i numeri naturali pari in successione a partire da 4.

# La sperimentazione condotta a distanza
# Report dell'esperienza al Liceo «G. Galilei» di Civitavecchia

## Le congetture elaborate dagli studenti – Scheda 1

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 3 | 3 |
| 2 | 4 | 8 |
| 3 | 5 | 15 |
| 4 | 6 | 24 |
| 5 | 7 | 35 |
| | | |
| | | |

Addizionando il 1° numero della 1° colonna con il 2° della 2° colonna ed il 1° della 3° colonna, si ha come risultato il secondo numero della 3° colonna e così via

LEGGE DI LETIZIA: DATO UN NUMERO SULLA 1° COLONNA AGGIUNGIGLI IL SUCCESSIVO DEL SUO CORRISPONDENTE (VUOL DIRE IL NUMERO CHE È SULLA SUA STESSA RIGA) DELLA 2° COLONNA E IL PROPRIO CORRISPONDENTE DELLA 3°. IL RISULTATO SARÀ SUCCESSIVO (NELLA SUCCESSIONE) DEL NUMERO DELLA 3° COLONNA ADDIZIONAT

**Esempi di congetture che coinvolgono somme di elementi presenti nella tabella**

Partendo dall'ultima riga, se si sottrae al numero posto nella terza colonna il numero posto nella seconda (es. 35-7) si ottiene come risultato il numero sulla riga superiore, nella terza colonna, sommato al numero sulla stessa riga ma nella seconda colonna (es. 35-7 = 28; 28= 24+4).

# La sperimentazione condotta a distanza
# Report dell'esperienza al Liceo «G. Galilei» di Civitavecchia

## Le congetture elaborate dagli studenti – Scheda 1

2° LEGGE DI LETIZIA: DATO UN NUMERO SULLA 3° COLONNA SOTTRAIGLI IL SUO CORRISPONDENTE DELLA 1° COLONNA E IL PRECEDENTE DEL SUO CORRISPONDENTE DELLA 2° COLONNA. IL RISULTATO [redacted] È IL PRECEDENTE DEL NUMERO DELLA 3° COLONNA.

**Esempi di congetture che coinvolgono somme di elementi presenti nella tabella**

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 3 | 3 |
| 2 | 4 | 8 |
| 3 | 5 | 15 |
| 4 | 6 | 24 |
| 5 | 7 | 35 |
| | | |
| | | |

Guardiamo la tabella come una scacchiera

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 3 | 1 |
| 2 | 4 | 8 | 2 |
| 3 | 5 | 15 | 3 |
| 4 | 6 | 24 | 4 |
| 5 | 7 | 35 | 5 |
| 6 | 8 | 48 | 6 |
| 7 | 9 | 63 | 7 |
| A | B | C | |

Abbiamo che $C2 = C1 + B1 + A2$
$C3 = C2 + B2 + A3$
$C4 = C3 + B3 + A4$
e così via

# La sperimentazione condotta a distanza
# Report dell'esperienza al Liceo «G. Galilei» di Civitavecchia

## Le congetture elaborate dagli studenti – Scheda 1

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 3 | 3 |
| 2 | 4 | 8 |
| 3 | 5 | 15 |
| 4 | 6 | 24 |
| 5 | 7 | 35 |
| | | |
| | | |

**Esempi di congetture che coinvolgono somme di elementi presenti nella tabella**

La somma dei numeri presenti sulla stessa riga è uguale a $n$-1, dove $n$ è il numero posto nella riga successiva e nella terza colonna.

Sommando tutti i numeri di una stessa riga si ottiene il numero naturale precedente di quello della terza colonna ma della riga successiva.

# La sperimentazione condotta a distanza
# Report dell'esperienza al Liceo «G. Galilei» di Civitavecchia

## Le congetture elaborate dagli studenti – Scheda 1

**Esempi di congetture che coinvolgono prodotti di elementi presenti nella tabella**

**Preso un numero n sulla seconda colonna e preso il numero n+1 sottostante, il loro prodotto è uguale alla somma di n+1 e il numero alla sua destra**

**Presi due numeri sulla seconda colonna, n e n+2, il loro prodotto è uguale al numero sulla stessa riga di n+2 ma sulla terza colonna**

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 3 | 3 |
| 2 | 4 | 8 |
| 3 | 5 | 15 |
| 4 | 6 | 24 |
| 5 | 7 | 35 |
| | | |
| | | |

# La sperimentazione condotta a distanza
# Report dell'esperienza al Liceo «G. Galilei» di Civitavecchia

## Le congetture elaborate dagli studenti – Scheda 1

### Congettura che mette in luce il fatto che i numeri presenti nella terza colonna sono in progressione aritmetica

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 3 | 3 |
| 2 | 4 | 8 |
| 3 | 5 | 15 |
| 4 | 6 | 24 |
| 5 | 7 | 35 |
| | | |
| | | |

La differenza tra ogni numero presente nella terza colonna e il numero nella riga successiva, sempre della terza colonna, è un numero dispari. Eseguendo le sottrazioni si nota che i numeri dispari sono in ordine crescente, o decrescente, nel caso in cui si inizi dall' alto o dal basso.

Nella terza colonna si aggiunge tra due numeri "successivi" sempre un numero dispari partendo da 5

La differenza tra due numeri posizionati l'uno sotto l'altro, aumenta di 2 ogni volta che ci si sposta di una casella verso il basso.

Es: 8 − 3 = 5
15 − 8 = 7 = 5 + 2
24 − 15 = 9 = 7 + 2

# La sperimentazione condotta a distanza
# Report dell'esperienza al Liceo «G. Galilei» di Civitavecchia

## Le congetture elaborate dagli studenti – Scheda 1

**$B_i^2-1= C_{i+1}$**

Assumiamo il numero 1 come costante. Elevando al quadrato ogni numero della 2° colonna e sottraendo il numero 1 al risultato dell'elevamento, si ottiene il numero posto diagonalmente in basso a destra rispetto al numero inizialmente elevato

**Congetture che coinvolgono quadrati di espressioni contenenti elementi della tabella**

**$C_{i+1}=((A_{i+1}+B_{i+1})/2)^2)-1$**

LEGGE DEL QUINTO GRUPPO: DATO UN NUMERO SULLA 3° COLONNA QUESTO È UGUALE AL QUADRATO DELLA MEDIA DEI SUOI CORRISPONDENTI MENO UNO.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 3 | 3 |
| 2 | 4 | 8 |
| 3 | 5 | 15 |
| 4 | 6 | 24 |
| 5 | 7 | 35 |
| | | |
| | | |

LEGGE DEL QUINTO GRUPPO: VISTO CHE I NUMERI SULLA PRIMA COLONNA SONO EQUIVALENTI AI LORO CORRISPONDENTI DELLA 2° COLONNA – 2, POSSIAMO SCRIVERLI COME N-1 E N+1, PERCIÒ I LORO PRODOTTI SARANNO $N^2-1$.

# La sperimentazione condotta a distanza
# Report dell'esperienza al Liceo Terenzio Mamiani

## "Esplorazione di tabelle" – Scheda 1 bis

### Scheda 1bis

In questa tabella è stato evidenziato un possibile modo di rappresentare i numeri presenti nella terza colonna.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 3 | 3=4-1 |
| 2 | 4 | 8=9-1 |
| 3 | 5 | 15=16-1 |
| 4 | 6 | 24=25-1 |
| 5 | 7 | 35=36-1 |
| | | |
| | | |

a) Questa nuova rappresentazione vi ha permesso di notare qualcosa in più rispetto a quanto avete osservato lavorando sulla scheda 1?

b) Dopo aver spiegato quale regolarità questa nuova rappresentazione ha l'obiettivo di mettere in luce, provate a motivarla.

## La sperimentazione condotta a distanza
## Report dell'esperienza al Liceo Terenzio Mamiani

### Le congetture elaborate dagli studenti – Scheda 1 bis

• i numeri della 3ª colonna sono ~~[illegible]~~ affiancati dal quadrato del numero intermedio della prima e seconda colonna infatti $\sqrt{4}=2$ che è il numero intermedio tra 1 e 3. $\sqrt{9}=3$; $\sqrt{16}=4$; $\sqrt{25}=5$; $\sqrt{36}=6$; $\sqrt{49}=7$; $\sqrt{64}=8$. questi numeri sono consecutivi perché ~~[illegible]~~ lo sono anche i numeri della 1ª e 2ª colonna.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 3 = 4 - 1 | $3^2=9$ | $2^2=4$ |
| 2 | 4 | 8 = 9 - 1 | $4^2=16$ | $3^2=9$ |
| 3 | 5 | 15 = 16 - 1 | $5^2=25$ | $4^2=16$ |
| 4 | 6 | 24 = 25 - 1 | $6^2=36$ | $5^2=25$ |
| 5 | 7 | 35 = 36 - 1 | | |

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 3 | 3=4-1 |
| 2 | 4 | 8=9-1 |
| 3 | 5 | 15=16-1 |
| 4 | 6 | 24=25-1 |
| 5 | 7 | 35=36-1 |

I NUMERI DELLA TERZA COLONNA SONO QUADRATI PERFETTI DIMINUITI DI UNO. PIÙ PRECISAMENTE OGNI NUMERO DIMINUITO DI UNO DELLA TERZA COLONNA È IL QUADRATO PERFETTO DEL SOLO NUMERO CHE È MAGGIORE DI QUELLO DELLA PRIMA COLONNA E MINORE DI QUELLO DELLA SECONDA, NELLA RISPETTIVA RIGA. QUESTO

# La sperimentazione condotta a distanza
# Report dell'esperienza al Liceo Terenzio Mamiani

## Le congetture elaborate dagli studenti – Scheda 1 bis

SOMMANDO I NUMERI DELLA PRIMA COLONNA CON QUELLI DELLA SECONDA COLONNA IN RIGA, OTTENIAMO UN NUMERO PARI CHE DIVISO PER 2 E SUCCESSIVAMENTE ELEVATO ALLA SECONDA, DÀ COME RISULTATO UN QUADRATO PERFETTO. QUESTO QUADRATO PERFETTO CORRISPONDE AL NUMERO DAL QUALE SI SOTTRAE 1 PER OTTENERE I NUMERI DELLA TERZA COLONNA.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 3 | 3=4-1 |
| 2 | 4 | 8=9-1 |
| 3 | 5 | 15=16-1 |
| 4 | 6 | 24=25-1 |
| 5 | 7 | 35=36-1 |

1 Sommando i numeri di una stessa riga delle prime due colonne si ottiene un numero pari. Dopo aver diviso il numero ottenuto per 2, se si eleva il risultato della divisione alla seconda si ottiene un quadrato perfetto, che corrisponde al numero dal quale viene sottratto 1

# La sperimentazione condotta a distanza
# Report dell'esperienza al Liceo «G. Galilei» di Civitavecchia

## Le congetture elaborate dagli studenti – Scheda 1 bis

**I numeri presenti nella terza colonna sono tutti numeri precedenti ai quadrati di un valore $2 \leq x \leq 6$**

I numeri della terza colonna sono i quadrati di tutti i numeri naturali in successione a partire da 2, diminuiti di 1.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 3 | 3=4-1 |
| 2 | 4 | 8=9-1 |
| 3 | 5 | 15=16-1 |
| 4 | 6 | 24=25-1 |
| 5 | 7 | 35=36-1 |

**Nella terza colonna ci sono tutti i numeri precedenti ai quadrati, perché secondo la regolarità delle righe che sono moltiplicazioni (come affermato nella scheda precedente) si ottiene la formula $n(n+2)=n^2+2n$; la formula dei numeri precedenti ai quadrati è $(n+1)^2-1=n^2+2n$, quindi le soluzioni sono equivalenti.**

**esempio: n=3**

- **$3(3+2)=15$**
- **$(3+1)^2-1=15$**

# La sperimentazione condotta a distanza
# Report dell'esperienza al Liceo «G. Galilei» di Civitavecchia

## "Esplorazione di tabelle" – Scheda 2

### Scheda 2

Cosa succede se la differenza tra i numeri nelle prime due colonne non è più 2? Ad esempio, se la differenza è 4? (come nella tabella qui sotto)

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 5 | 5 |
| 2 | 6 | 12 |
| 3 | 7 | 21 |
| 4 | 8 | 32 |
| 5 | 9 | 45 |
| | | |
| | | |

**a)** È possibile evidenziare regolarità simili a quelle che abbiamo messo in luce lavorando sulla scheda 1? Elencate le regolarità che osservate e provate a motivare le vostre congetture.

**b)** Sulla base di quanto avete osservato fino ad ora, sapreste dire se possiamo formulare analoghe congetture nel caso in cui i numeri nelle prime due colonne abbiano differenza diversa da 2 e 4, ma sempre pari? Ad esempio 6, 8 ...? E se la differenza fosse un numero pari qualsiasi?

Esplorate questi nuovi casi e formulate delle congetture, cercando di motivarle.

# La sperimentazione condotta a distanza
# Report dell'esperienza al Liceo «G. Galilei» di Civitavecchia

## Le congetture elaborate dagli studenti – Scheda 2

1. La differenza tra i numeri, sulla stessa riga, della seconda e prima colonna è pari a 4.
2. Il numero posto nella terza colonna è uguale al prodotto dei numeri nella prima e seconda colonna.
3. La differenza tra due numeri successivi nella terza colonna è sempre uguale a un numero dispari.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 5 | 5 |
| 2 | 6 | 12 |
| 3 | 7 | 21 |
| 4 | 8 | 32 |
| 5 | 9 | 45 |

a) tutti gli "enti fondamentali" evidenziati nella scheda F1, sono in comune

1 Nella prima colonna sono rappresentati tutti i numeri naturali in successione a partire da uno.
2 Nella seconda colonna sono rappresentati tutti i numeri naturali in successione a partire da cinque.
3 Se si moltiplica un numero della prima colonna con quello della seconda colonna ad esso adiacente, si ottiene il numero della terza colonna che si trova nella loro stessa riga.

# La sperimentazione condotta a distanza
# Report dell'esperienza al Liceo «G. Galilei» di Civitavecchia

## Le congetture elaborate dagli studenti – Scheda 2

**Congetture che coinvolgono**
**somme di elementi presenti nella tabella**

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 5 | 5 |
| 2 | 6 | 12 |
| 3 | 7 | 21 |
| 4 | 8 | 32 |
| 5 | 9 | 45 |

$$A_i + B_{i+1} + C_i = C_{i+1}$$

$$C_{i+1} - A_{i+1} - B_i = C_i$$

Legge di Letizia: dato un numero della 1° colonna aggiungigli il successivo del suo corrispondente della 2°colonna e il proprio corrispondente della 3°. Il risultato sarà il successivo (nella successione) del numero della 3°colonna addizionato.
2° Legge di Letizia: dato un numero sulla 3°colonna sottraigli il suo corrispondente della 1°colonna ed il precedente del suo corrispondente della 2°colonna. Il risultato è il precedente del numero della 3° colonna.

# La sperimentazione condotta a distanza
# Report dell'esperienza al Liceo «G. Galilei» di Civitavecchia

## Le congetture elaborate dagli studenti – Scheda 2

**Congetture che coinvolgono quadrati di espressioni contenenti elementi della tabella**

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 5 | 5 |
| 2 | 6 | 12 |
| 3 | 7 | 21 |
| 4 | 8 | 32 |
| 5 | 9 | 45 |

LEGGE DEL QUINTO GRUPPO: DATO UN NUMERO SULLA 3° COLONNA QUESTO È UGUALE AL QUADRATO DELLA MEDIA DEI SUOI CORRISPONDENTI MENO UNO.

Motivazione: visto che i numeri sulla prima colonna sono equivalenti ai loro corrispondenti della 2° -n, possiamo scriverli come x-n/2 ed x+n/2, perciò i loro prodotti saranno x^2-(n/2)^2.

# La sperimentazione condotta a distanza
# Report dell'esperienza al Liceo «G. Galilei» di Civitavecchia

## Le congetture elaborate dagli studenti – Scheda 2

### Congetture riguardanti il confronto tra tabelle diverse

DIFFERENZA=2

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 3 | 3 |
| 2 | 4 | 8 |
| 3 | 5 | 15 |
| 4 | 6 | 24 |
| 5 | 7 | 35 |

DIFFERENZA=4

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 5 | 5 |
| 2 | 6 | 12 |
| 3 | 7 | 21 |
| 4 | 8 | 32 |
| 5 | 9 | 45 |

DIFFERENZA=6

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 7 | 7 |
| 2 | 8 | 16 |
| 3 | 9 | 27 |
| 4 | 10 | 40 |
| 5 | 11 | 55 |

DIFFERENZA=8

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 9 | 9 |
| 2 | 10 | 20 |
| 3 | 11 | 33 |
| 4 | 12 | 48 |
| 5 | 13 | 65 |

**a.** Prendiamo in considerazione la terza colonna di ogni tabella. Se si va a sottrare dai numeri della terza colonna della prima tabella i numeri della terza colonna ma della seconda tabella, per esempio, ogni numero della seconda tabella con il suo corrispondente, si ottengono numeri pari in successione (es. 5-3=2; 12-8=4). Se si va ad effettuare lo stesso passaggio però sottraendo i numeri della terza colonna della seconda tabella a i numeri della terza colonna della prima tabella si ottengono numeri pari, però non in successione, saltandone uno.

Andando avanti con le sottrazioni tra la prima e le varie tabelle successive si nota che nella successione dei numeri pari, più si va avanti, più numeri pari vengono saltati.

# La sperimentazione condotta a distanza
# Report dell'esperienza al Liceo «G. Galilei» di Civitavecchia

## "Esplorazione di tabelle" - Scheda 3

**Attività: ESPLORAZIONE DI TABELLE PER SCOPRIRE REGOLARITA' NUMERICHE**

E se considerassimo 3 fattori anziché 2?

Osservate con attenzione le seguenti tabelle. Nelle prime tre colonne di ciascuna tabella sono inserite terne di numeri, il cui prodotto compare nella quarta colonna. Che caratteristiche hanno queste terne di numeri?

È ancora possibile evidenziare delle regolarità? Elencate le vostre congetture e provate a motivarle.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 6 |
| 2 | 3 | 4 | 24 |
| 3 | 4 | 5 | 60 |
| 4 | 5 | 6 | 120 |
| 5 | 6 | 7 | 210 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 5 | 15 |
| 2 | 4 | 6 | 48 |
| 3 | 5 | 7 | 105 |
| 4 | 6 | 8 | 192 |
| 5 | 7 | 9 | 315 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 7 | 28 |
| 2 | 5 | 8 | 80 |
| 3 | 6 | 9 | 162 |
| 4 | 7 | 10 | 280 |
| 5 | 8 | 11 | 440 |

# La sperimentazione condotta a distanza
# Report dell'esperienza al Liceo «G. Galilei» di Civitavecchia

## Le congetture elaborate dagli studenti – Scheda 3

### Focus sulle proprietà caratteristiche

Le prime tre colonne sono formate da numeri naturali in successione; la differenza tra i numeri delle prime tre colonne aumenta più si va avanti con le tabelle.

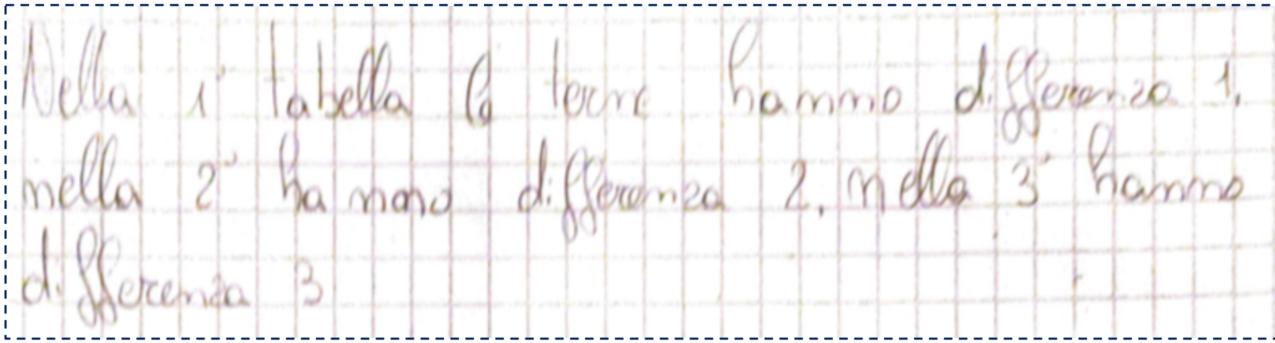
**I numeri nelle colonne sono successivi, nella prima tabella tra i numeri di ogni colonna si aggiunge 1, nella seconda 2 e nella terza 3**

Nella prima colonna della prima tabella sono riportati tutti i numeri naturali a partire da 1, nella seconda a partire da 2, nella terza a partire da 3 e nella quarta i prodotti di tutti i numeri della stessa riga.
Nella prima colonna della seconda tabella sono riportati tutti i numeri naturali a partire da 1, nella seconda a partire da 3, nella terza a partire da 5 e nella quarta i prodotti di tutti i numeri della stessa riga.
Nella prima colonna della terza tabella sono riportati tutti i numeri naturali a partire da 1, nella seconda a partire da 4, nella terza a partire da 7 e nella quarta i prodotti di tutti i numeri della stessa riga.

## Le congetture elaborate dagli studenti – Scheda 3

**Focus sulle proprietà caratteristiche**

Terne della 1° tabella: numeri consecutivi.
Terne della 2° tabella: dato un numero n sulla 1° colonna, il suo corrispondente sulla 2° sarà n+2 ed il suo corrispondente sulla 3° n+4.
Terne della 3° tabella: dato un numero n sulla 1°colonna, il suo corrispondente sulla 2° sarà n+3 ed il suo corrispondente sulla 3° n+6.


Nella 1ª tabella le terne hanno differenza 1, nella 2ª hanno differenza 2, nella 3ª hanno differenza 3

# La sperimentazione condotta a distanza
# Report dell'esperienza al Liceo «G. Galilei» di Civitavecchia

## Le congetture elaborate dagli studenti – Scheda 3

### Una congettura e la sua generalizzazione

Legge del Quinto Gruppo (per la 1° tabella): dato un numero sulla 4° colonna, questo è il cubo del suo numero corrispondente della 2° colonna meno il numero stesso.
Motivazione: dato un numero sulla 2° colonna, chiamiamolo n, i suoi corrispondenti saranno n-1 ed n+1. Il prodotto di questi tre numeri, cioè il numero della 4° colonna, è possibile pensarlo come

$$\boldsymbol{n(n-1)(n+1) = n\left(n^2-1\right) = n^3 - n}$$

Legge del Quinto Gruppo (generale): dato un numero sulla 4° colonna, questo è il cubo del suo numero n corrispondente della 2° colonna, meno il quadrato della differenza tra due numeri corrispondenti di due colonne consecutive, per n.
Motivazione: dato un numero sulla 2° colonna, chiamiamolo n, i suoi corrispondenti saranno n-d ed n+d (d=differenza tra due numeri corrispondenti di due colonne consecutive). Il prodotto di questi tre numeri, cioè il numero della 4° colonna, è possibile pensarlo come $\boldsymbol{n(n-d)(n+d) = n\left(n^2-d^2\right) = n^3 - d^2 n}$

## Contenuti di questo seminario

- La metodologia della ricerca variata: quadro teorico ed elementi metodologici per la progettazione ed implementazione di attività
- **La sperimentazione condotta a distanza:**

a) Presentazione dell'attività "Esplorazione di tabelle"

b) Riflessioni sui risultati del lavoro condotto nelle classi: focus sulle risposte degli studenti

c) **Riflessioni sui risultati del lavoro condotto nelle classi: focus sul ruolo dell'insegnante**

- Conclusioni

# Primo stralcio di discussione

# La sperimentazione condotta a distanza

## Discussioni di classe: il ruolo del docente

Vengono mostrate queste tre proprietà messe in luce lavorando sulla <u>scheda 1</u>

nella 1° e nella 2° colonna si ha una successione di numeri consecutivi

**preso un numero n sulla prima colonna, il numero sulla sua stessa riga della seconda colonna è uguale ad n+2**

RIGHE: DATO UN NUMERO DELLA 3° COLONNA, QUESTO È IL PRODOTTO DEI NUMERI DELLA 1° E DELLA 2° COLONNA CHE SONO SULLA STESSA SUA RIGA.

# La metodologia della ricerca variata (MVI)

## Discussioni di classe: il ruolo del docente

I: Tutti i gruppi hanno fatto queste 3 considerazioni, avete sentito esigenza di motivarle?

Diversi studenti concordano

A: Motivare le proprietà in questa prima fase era complicato in quanto sembrava di descrivere la tabella. Cioè se, nella prima colonna ci sono i numeri naturali a partire da uno, non è che puoi spiegare perché succede… è semplicemente come è fatta la tabella.

I: Mi sembra anche che concordiate, o almeno vi ho visto annuire, potremmo quindi chiamare queste prime tre osservazioni le "*proprietà caratteristiche*" della tabella. Se noi conosciamo le proprietà 1, 2 e 3 infatti, sappiamo proseguire questa tabella indefinitamente,

# La sperimentazione condotta a distanza

## Discussioni di classe: il ruolo del docente

I: …pensiamo un po' come avete ragionato lavorando in geometria. In geometria ci sono delle proprietà che non si dimostrano giusto?

A: Il nostro gruppo ha notato delle similitudini proprio con la geometria... le regolarità che abbiamo visto prima erano potremmo dire assiomi ed enti primitivi che non vengono dimostrati [...]. Abbiamo visto questa similitudine con la geometria in questo ragionamento assiomatico deduttivo.

L'insegnante chiede se altri studenti hanno fatto lo stesso ragionamento e/o se sono d'accordo con quanto detto da A

## Discussioni di classe: il ruolo del docente

# Secondo stralcio di discussione

# La sperimentazione condotta a distanza

## Discussioni di classe: il ruolo del docente

LE DIFFERENZE TRA I NUMERI DELLA 3ª COLONNA SONO IN PROGRES= SIONE ARITMETICA (+2)

• nella terza colonna abbiamo fatto varie osservazioni:
da 3 a 8 ci sono 5 numeri di differenza;
da 8 a 15 ci sono 7 numeri di differenza;
da 15 a 24 ce ne sono 9
da 24 a 35, 11
da 35 a 48, 13
da 48 a 63, ~~63~~ 15
quindi si distanziano di 2 numeri

4.

| | |
|---|---|
| 35 - 24 = 11 | 5 - 3 = 2 |
| 24 - 15 = 9 | 7 - 5 = 2 |
| 15 - 8 = 7 | 9 - 7 = 2 |
| 8 - 3 = 5 | 11 - 9 = 2 |

NELLA TERZA COLONNA, ABBIAMO NOTATO CHE SOTTRAENDO I NUMERI DAL BASSO VERSO L'ALTO IN ORDINE, SI OTTIENE UNA SCALA DI NUMERI DISPARI PARTENDO DAL 5.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 3 | 3 |
| 2 | 4 | 8 |
| 3 | 5 | 15 |
| 4 | 6 | 24 |
| 5 | 7 | 35 |
| | | |
| | | |

**Scheda 1**

# La sperimentazione condotta a distanza

## Discussioni di classe: il ruolo del docente

LE DIFFERENZE TRA I NUMERI DELLA 3ª COLONNA SONO IN PROGRESSIONE ARITMETICA (+2)

DIMOSTRAZIONE

LA DIMOSTRAZIONE PUÒ ESSERE FATTA IN UN CASO ANCORA PIÙ GENERALE IN CUI LE PRIME DUE COLONNE POSSONO ASSUMERE VALORI $x$ E $y$ QUALSIASI NON NECESSARIAMENTE CON UNA DIFFERENZA DI 2. IN QUESTO MODO I NUMERI APPARTENENTI ALLA 1ª COLONNA SONO $x$, $x+1$, $x+2$... E QUELLI DELLA 2ª SONO $y$, $y+1$, $y+2$; INFINE I NUMERI DELLA 3ª SAREBBERO $xy$, $xy+x+y+1$, $xy+2x+2y+4$... LE DIFFERENZE TRA I NUMERI CONSECUTIVI DELLA 3ª COLONNA DUNQUE SAREBBERO $x+y+3$, $x+y+5$, $x+y+7$...

LA DIFFERENZA TRA QUESTI NUMERI E' COSTANTE, ED E' SEMPRE 2, QUINDI QUESTE DIFFERENZE SONO IN PROGRESSIONE ARITMETICA

| $X$ | $Y$ | $XY$ |
|---|---|---|
| $X+1$ | $Y+1$ | $XY+X+Y+1$ |
| $X+2$ | $Y+2$ | $XY+2X+2Y+4$ |

$+X+Y+1$

$+2$

$+X+Y+3$

| $x$ | $y$ | $x \cdot y$ |
|---|---|---|
| 1 | 3 | 3 |
| 2 | 4 | 8 |
| 3 | 5 | 15 |
| 4 | 6 | 24 |
| 5 | 7 | 35 |

+5   +2

+7   +2

+9   +2

+11

# La sperimentazione condotta a distanza

## Discussioni di classe: il ruolo del docente

I: Qualcuno vuol provare a ripetere che cosa hanno detto? …"progressione aritmetica" è un termine chiaro per tutti?

C: Nell'ultima colonna, se sottrai i numeri partendo dall'alto, … ad esempio, il primo numero se lo sottrai al secondo numero dà come risultato 5 e poi il secondo numero se lo sottrai al terzo numero fa 5+2 …cioè aggiungi sempre due al risultato.

I: Ok, [...]. Poi il terzo gruppo ha aggiunto che queste differenze sono tutti numeri dispari. Uno dei gruppi, in questo caso, ha provato a dimostrare. Chiederei ai membri di questo gruppo di spiegare come hanno ragionato [...].

Gli alunni iniziano a spiegare il loro ragionamento

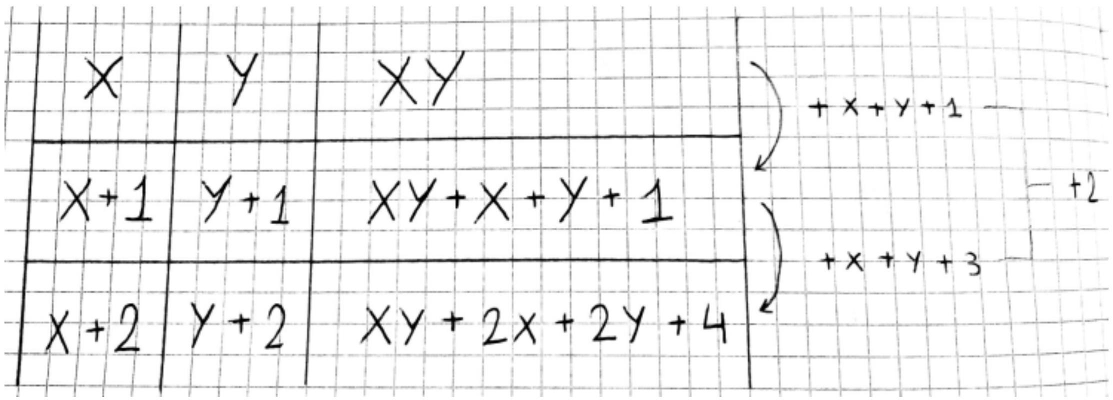
# La sperimentazione condotta a distanza

## Discussioni di classe: il ruolo del docente

**N: Abbiamo visto che qua erano sempre cresciute le differenze allora abbiamo provato a sostituire al primo numero della prima *[colonna]* x e al primo della seconda y … Anche se la differenza non fosse stata due, sarebbe comunque uscita una progressione aritmetica tra le differenze.**

**Gli alunni sono consapevoli della generalità della dimostrazione proposta**

**S: Quindi, diciamo, ci sembra giusto scrivere x e y piuttosto che x e x+2.**



# La sperimentazione condotta a distanza

## Discussioni di classe: il ruolo del docente

I: Avete osservato che, di quelle tre proprietà che abbiamo elencato prima, ne bastano solo due. Basta sapere che gli elementi della terza colonna sono i prodotti degli elementi delle prime due e poi che i numeri nella prima e seconda colonna sono consecutivi.

I pone il focus sulle proprietà caratteristiche utilizzate nella dimostrazione per esplicita il ragionamento proposto da N e da S

N conclude la spiegazione del ragionamento sviluppato dal suo gruppo

I chiede a studenti di altri gruppi di ripetere il ragionamento proposto da N

# Terzo stralcio di discussione

# La sperimentazione condotta a distanza

## Discussioni di classe: il ruolo del docente

**tabella con differenza=6**

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 7 | 7 |
| 2 | 8 | 16 |
| 3 | 9 | 27 |
| 4 | 10 | 40 |
| 5 | 11 | 55 |
| 6 | 12 | 72 |
| 7 | 13 | 91 |

**anche qui le regolarità di ripetono e riprendendo la regolarità sopra esposta qui si dovrà considerare sulla seconda colonna n e n +5**

**abbiamo notato che in questo caso i numeri delle terza colonna sono uguali ad (n+3)²-9, concludendo quindi che i numeri della terza colonna sono sempre uguali a (n+d/2)²-(d/2)² con**

**n = numero prima colonna e d= differenza numeri tra prima e seconda colonna**

**Scheda 2**

**I stimola gli studenti ad esplicitare i significati connessi alle espressioni simboliche introdotte, poi a costruire la dimostrazione della proprietà evidenziata. In particolare, gli studenti osservano che le proprietà caratteristiche permettono di scrivere gli elementi di ciascuna riga della tabella come $n$, $n+d$ ed $n(n+d)$, quindi dimostrare la proprietà equivale a dimostrare l'equivalenza tra $n(n+d)$ e $\left(n+\frac{d}{2}\right)^2-\left(\frac{d}{2}\right)^2$**

# La sperimentazione condotta a distanza

## Discussioni di classe: il ruolo del docente

**I: Vogliamo mostrare che $n(n+d)$ è equivalente a $\left(n+\frac{d}{2}\right)^2-\left(\frac{d}{2}\right)^2$. Come possiamo fare?**

**M: Possiamo scrivere sotto forma di equazione...**

**S: Eh, se mettessimo sotto forma di equazione, quindi $n(n+d)=\left(n+\frac{d}{2}\right)^2-\left(\frac{d}{2}\right)^2$, e poi attribuissimo valori ad n e d... svolgendo i conti, se viene un ugualianza, allora anche l'equazione sarà corretta.**

**I: Vediamo cosa ne pensano gli altri. Va bene inserire valori particolari a n e a d?**

**Si riflette sull'effettiva efficacia dell'approccio proposto da S e sul significato di termini quali "l'equazione sarà corretta"**

# La sperimentazione condotta a distanza

## Discussioni di classe: il ruolo del docente

**A: Oppure potremmo provare una scomposizione in quanto nel secondo c'è una differenza di due quadrati.**

**Viene** $\left(n+\frac{d}{2}-\frac{d}{2}\right)\left(n+\frac{d}{2}+\frac{d}{2}\right)$

**I si fa guidare da A**

$$n(n+d)=\underbrace{\left(n+\frac{d}{2}\right)^2-\left(\frac{d}{2}\right)^2}$$

$$\left(n+\frac{d}{2}-\frac{d}{2}\right)\cdot\left(n+\frac{d}{2}+\frac{d}{2}\right)=n(n+d)$$

**La classe riflette sul fatto che l'equivalenza tra due espressioni non può essere mostrata limitandosi ad una verifica in alcuni casi particolari.**

# La sperimentazione condotta a distanza

## Discussioni di classe: il ruolo del docente

**I guida successivamente gli studenti a mettere in luce come l'espressione n(n+d) possa essere trasformata in modo da ottenere l'espressione $\left(n+\frac{d}{2}\right)^2-\left(\frac{d}{2}\right)^2$**

$$n(n+d)=\underbrace{n^2+nd+\left(\frac{d}{2}\right)^2}-\left(\frac{d}{2}\right)^2=\left(n+\frac{d}{2}\right)^2-\left(\frac{d}{2}\right)^2$$

# Contenuti di questo seminario

- La metodologia della ricerca variata: quadro teorico ed elementi metodologici per la progettazione ed implementazione di attività
- La sperimentazione condotta a distanza:

a) Presentazione dell'attività "Esplorazione di tabelle"

b) Riflessioni sui risultati del lavoro condotto nelle classi: focus sulle risposte degli studenti

c) Riflessioni sui risultati del lavoro condotto nelle classi: focus sul ruolo dell'insegnante

- **Conclusioni**

# La sperimentazione condotta a distanza
# Report dell'esperienza al Liceo Terenzio Mamiani

## Riflessioni conclusive

- Le proprietà osservate dalla maggior parte dei gruppi lavorando sulla scheda 1 sono piuttosto semplici. Il lavoro sulle schede successive ha messo in luce un **maggior livello di complessità nelle congetture formulate** dagli studenti.
- In genere i gruppi **tendono a non formalizzare** le congetture in linguaggio algebrico ma, nella maggior parte dei casi, cercano di descrivere a parole le regolarità osservate, qualcuno fa uso di schematizzazioni o tabelle.
- **Pochi gruppi propongono dei tentativi di dimostrazione**. Il linguaggio utilizzato non è ancora formalmente corretto. In generale, gli studenti **tendono ad evitare notazioni simboliche anche in fase argomentativa**.
- **Durante la didattica in presenza** si è osservata una **maggiore capacità di formalizzazione**, dovuta anche a stimoli forniti dagli insegnanti. **Perché?**
- **Rispetto alla didattica in presenza si nota un minore coinvolgimento**. Spesso i docenti si sono trovati a dover stimolare gli studenti ad intervenire.

# La sperimentazione condotta a distanza
# Report dell'esperienza al Liceo «G. Galilei» di Civitavecchia

## Riflessioni conclusive

### PUNTI DI FORZA DEL LAVORO

- **Gli studenti** hanno **apprezzato la metodologia di lavoro** e **saputo cogliere l'essenza delle attività** loro proposte.
- **Gli studenti non hanno avuto timore** di esporre le loro congetture o di proporre formalizzazioni che potessero rivelarsi errate poiché **sono consapevoli che sbagliare fa parte del processo risolutivo**.

### PUNTI DEBOLI DEL LAVORO

- **Diversi studenti** hanno dichiarato che **la didattica a distanza ha influito negativamente sul processo di condivisione.**
- **Non poter osservare il lavoro di gruppo degli studenti** ha reso più complessa la gestione delle discussioni di classe.

# La sperimentazione condotta a distanza

## Riflessioni conclusive: il punto di vista degli studenti

Non avrei mai pensato a quanti **collegamenti** si potessero fare con la matematica.

**Mi allena nell'argomentazione** e nella **capacità di fare collegamenti** con la matematica, facendo anche delle **discussioni** con i miei compagni di classe per trovare una o più soluzioni su cui concordano tutti.

Mi ha incuriosito il **poter analizzare la matematica da diversi punti di vista**.

Le lezioni sono stimolanti e interessanti e mi hanno aiutata sia ad **argomentare meglio** e **collaborare con i miei compagni**, sia a **ragionare di più, anche nelle altre materie**.

Gli "esercizi" hanno spesso **più procedimenti di risoluzione** così che, una volta trovato uno, **puoi continuare a ragionare**.

Il fatto che siano presenti **varie strade** per la risoluzione dei quesiti posti rende la **condivisione delle opinioni e dei metodi risolutivi** un'attività formativa che ritengo personalmente necessaria.

Tutti gli argomenti trattati sono stati interessanti e **anche la cosa più semplice finiva per dimostrarsi piena di sfaccettature e fonte di confronti**. Credo che la bellezza del corso sia stata anche nel **metodo in cui ci veniva posto, il continuo confronto e l'argomentazione di vari punti di vista**.

**Grazie per l'attenzione!**