Paradossi, antinomie, insolubilia: un percorso tra Logica, Matematica, Filosofia e Informatica

per il Liceo Matematico

Lorenzo Carlucci (Sapienza)
lorenzo.carlucci@uniroma1.it

1 Aprile 2022

“Finora non ho mai incontrato un individuo che usasse la parola paradosso a titolo di argomento e non fosse un imbecille”

Paul Valéry

Il Mentitore

Questa frase è falsa

Socrate dice: “Io mento”

Epimenide Cretese dice: “Tutti i Cretesi mentono”

Il Mentitore: fonti

Perdute: Logica Stoica (Eubulide, Crisippo), cf. Diogene Laerzio 7, 43; 2, 108

Aristotele, *Elenchi Sofistici* 25 (180b 2-7)

Bibbia: Salmi, 115, 2; **San Paolo**, *Lettera a Tito* 1, 12-13

Seneca, *Epistola* 45, 10

S. Agostino, *Contra academicos* 3, 13, 29

Cicerone, *De divinatione* 2, 11; *Academica* 2, XXIX, 95

Il Mentitore: Aristotele

È simile anche il discorso concernente la circostanza che la medesima persona al tempo stesso dice il falso e dice il vero, ma per il fatto che non è facile a vedersi quale delle due cose uno potrebbe attribuirgli, il dire il vero in senso assoluto o il dire il falso (in senso assoluto), sembra difficile a risolversi. Nulla però impedisce che il discorso sia falso in senso assoluto e vero per un certo aspetto o di qualcosa, vale a dire: che sia vero per certe cose, ma che non sia vero in sé.

Confutazioni sofistiche, XXV (180b 2-3)

Il Mentitore: Salmista

Salmo 115, 2 (116B)

Ego dixi in excessu meo: Omnis homo mendax

Ego dixi in trepidatione mea: Omnis homo mendax

Ho detto con sgomento: “Ogni uomo è bugiardo”

→ **Origene** (185-253) e **Basilio di Cesarea** (330-379): Il Salmista (Davide) è un dio!

Il Mentitore: San Paolo

Ad Titum 1, 12-13

dixit quidam ex illis proprius ipsorum propheta Cretenses semper mendaces malae bestiae ventres pigri testimonium hoc verum est

Uno di loro, proprio un loro profeta, ha detto: “I Cretesi sono sempre bugiardi, brutte bestie e fannulloni”. Questa testimonianza è vera.

Il Mentitore: Cicerone [Academica]

XXIX [95] Quid quod eadem illa ars, quasi Penelope telam retexens, tollit ad extremum superiora? Utrum ea vestra an nostra culpa est? Nempe fundamentum dialecticae est, quidquid enuntietur — id autem appellant *axioma*, quod est quasi effatum — aut verum esse aut falsum. Quid igitur? Haec vera an falsa sunt? **Si te mentiri dicis idque verum dicis, mentiris an verum dicis?** Haec scilicet **inexplicabilia** esse dicitis, quod est odiosius quam illa, quae nos non comprehensa et non percepta dicimus.

XXX. Sed hoc omitto, illud quaero: si ista explicari non possunt nec eorum ullum iudicium invenitur ut respondere possitis verane an falsa sint, ubi est illa definitio, effatum esse id quod aut verum aut falsum sit ?

Il Mentitore: Cicerone [Academica]

XXIX [95] E cosa dire del fatto che questa stessa scienza [la dialettica] alla fine distrugge i propri passi precedenti, come Penelope che disfa la tela? Dobbiamo accusare per questo la tua scuola o la mia? Chiaramente è un principio fondamentale della dialettica che ogni enunciato (che essi chiamano assioma, ossia, una proposizione) è vero o falso; e dunque? Questa è una proposizione vera o falsa - 'Se tu dici che stai mentendo e lo dici veridicamente, stai mentendo?' La tua scuola ovviamente dice che questi problemi sono inspiegabili, che è più odioso delle cose che noi chiamiamo non comprese e non percepite.

XXX. Ma lascio questo punto e chiedo: se i problemi in questione sono inspiegabili e in essi nessun criterio ci permette di rispondere se siano veri o falsi, che ne è della definizione di una 'proposizione come 'ciò che è o vero o falso'?

Il Mentitore: Sant'Agostino [Contra Academicos]

13. 29. Restat dialectica, […] Ego vero plura quam de quavis parte philosophiae. Nam primo omnes illas propositiones, quibus supra usus sum, veras esse ista me docuit. Deinde per istam novi alia multa vera. Sed quam multa sint, numerate, si potestis. Si quatuor in mundo elementa sunt, non sunt quinque. Si sol unus est, non sunt duo. Non potest una anima et mori et esse immortalis. Non potest homo simul et beatus, et miser esse. Non hic et sol lucet, et nox est. Aut vigilamus nunc, aut dormimus. Aut corpus est, quod mihi videre videor, aut non est corpus. Haec et alia multa, quae commemorare longissimum est, per istam didici vera esse, quoquo modo sese habeant sensus nostri, in se ipsa vera. Docuit me, si cuius eorum quae per connexionem modo proposui pars antecedens assumpta fuerit, trahere necessario id quod annexum est. Ea vero quae per repugnantiam vel disiunctionem a me sunt enuntiata, hanc habere naturam, ut cum auferuntur caetera, sive unum, sive plura sint, restet aliquid quod eorum ablatione firmetur. Docuit etiam me, cum de re constat, propter quam verba dicuntur, de verbis non debere contendi: et quisquis id faciat, si imperitia faciat, docendum esse; si malitia, deserendum: si doceri non potest, monendum ut aliquid aliud potius agat, quam tempus in superfluis operamque consumat; si non obtemperat, neglegendum. De captiosis autem atque fallacibus ratiunculis breve praeceptum est: si male concedendo inferuntur, ad ea quae concessa sunt esse redeundum. Si verum falsumque in una conclusione confligunt, accipiendum inde quod intellegitur, quod explicari non potest relinquendum. Si autem modus in aliquibus rebus latet penitus hominem, scientiam eius non esse quaerendam. Haec quidem habeo a dialectica, et alia multa quae commemorare non est necesse. Neque enim debeo ingratus existere. Verum ille sapiens aut haec neglegit, aut si perfecta dialectica ipsa scientia veritatis est, sic illam novit ut istorum **mendicissimam calumniam**: **Si verum est, falsum est; si falsum est, verum est**: contemnendo, et non miserando fame enecet..

Mentitore: S. Agostino [Contra Academicos]

13. 29. Rimane la dialettica. [....] io ne so più di qualsiasi altra parte della filosofia. Proprio essa mi ha insegnato che son vere tutte quelle proposizioni che dianzi ho formulato. Inoltre per suo mezzo conosco molte altre verità. E voi contate, se ce la fate, quante sono: se in natura vi sono quattro elementi, essi non sono cinque; se il sole è uno, non sono due; non può la medesima anima perire ed essere immortale; non si può essere insieme felici e infelici; in questo luogo non è contemporaneamente giorno e notte; in questo momento o siamo svegli o dormiamo; o è corpo ciò che mi appare o non è corpo. Ho appreso per mezzo della dialettica che queste, e molte altre proposizioni, che sarebbe lungo enumerare, sono vere, qualunque sia l'attitudine dei nostri sensi, cioè vere in se stesse. Mi ha insegnato che se si verifica la parte antecedente di una delle proposizioni condizionali da me formulate, essa trae necessariamente quanto vi è implicito e che le proposizioni da me formulate secondo il principio di contraddizione e del terzo escluso hanno questa caratteristica che, se si escludono le altre parti, una o più, ne rimane una che ha la sua verifica dall'esclusione delle altre. Mi ha insegnato anche che quando è chiaro il concetto che viene espresso con le parole, non si deve far questione di parole. Chiunque lo fa, se agisce per impreparazione deve essere istruito, se per slealtà si deve lasciare a se stesso. Se non può essere istruito, deve essere esortato a dedicarsi a qualche altra occupazione anziché perdere tempo e possibilità inutilmente; se non dà ascolto, si deve non calcolarlo. Breve è l'ammaestramento nei riguardi dei paralogismi e sofismi. Se la loro illazione deriva da illegittima conseguenza, **si deve riesaminare quanto è stato indebitamente concesso**. Se mescolano in una sola proposizione vero e falso, si deve isolare ciò che è oggetto di pensiero e lasciare ciò che è illogico. Se poi il significato di alcune nozioni è completamente nascosto all'uomo, non se ne deve ricercare la conoscenza. Dalla dialettica ricevo questo insegnamento e molti altri che non è necessario ricordare. Non vorrei proprio diventar noioso. Comunque il filosofo disprezza le false argomentazioni. Se poi, com'è difatti, la consummante dialettica è scienza per sé di verità, la conosce in maniera che disprezzando e non avendo pietà faccia morir di fame il sorite ricattatore degli accademici: **Se è vero, è falso e se è falso, è vero.**

Il Mentitore nel Medioevo

Adamo di Balsham (Parvipontanus), 1132, *Ars Disserendi*:

An mentiatur qui nichil nisi se mentiri dicit.

An vere dicat qui nichil nisi se mentiri dicit.

An vere enuntiet qui se mentiri dicit.

Dialectica Monacensis (prima metà XII secolo):

Qualiter autem fiat hec fallacia in dictione illius insolubilis: ‘ego dico falsum’, hoc habetur in tractatu de insolubilibus.

Il Mentitore nel Medioevo

Alexander Neckham (1157-1217), *De naturis rerum*

Giovanni Duns Scoto (1266-1308), *Quaestiones super liber Elenchorum*, qq. 52-53

Thomas Bradwardine (1300-1349), *Insolubilia*

Socrate dice: Platone dice il vero; Platone dice: Socrate dice il falso

Socrate dice: Platone dice il falso; Platone dice: Socrate dice il falso

Socrate dice: Platone dice il falso; Platone dice: Socrate dice il vero

Il Mentitore nel Medioevo: soluzioni

SECUNDUM QUID/SIMPLICITER: vero in un senso, falso in un altro!

TRANSCASUS: la frase si riferisce a enunciati passati!

RESTRICTIO: si vieta l'autoreferenzialità!

CASSATIO: l'enunciato paradossale non ha senso!

Paradossi insiemistici: infinito

Il tutto è maggiore della parte.

Eppure ci sono tanti quadrati perfetti quanti numeri naturali.

"Io non veggo che ad altra decisione si possa venire, che a dire, infiniti essere tutti i numeri, infiniti i quadrati, infinite le loro radici, né la moltitudine de' quadrati esser minore di quella di tutti i numeri, né questa maggior di quella, ed in ultima conclusione, **gli attributi di eguale maggiore e minore non aver luogo ne gli infiniti**, ma solo nelle quantità terminate."
Galileo Galilei, *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* (1638)

Paradossi insiemistici: infinito (precursori)

Adam Balsham (1130-1181), *Ars disserendi*

> tot igitur interrogabilia sunt quot omnia tam interrogabilia quam non interrogabilia, et **ipsa se ipsis plura; quod est impossibile**...

Rabbi Hasdai Crescas (1340-1410), *Or-Adonai* (*Luce di Dio*)

Il principio che il tutto è maggiore della parte non vale per le quantità infinite! Esiste l'infinito in atto! Vuole 'liberare' la teologia ebraica dalla filosofia aristotelica!

Paradossi dell’infinito: conclusioni?

Ontologica: *Non esistono* totalità infinite in atto: portano a contraddizione.

Linguistica: *Non ha senso* parlare di maggiore e minore per le totalità infinite.

Logica: “Il tutto è maggiore della parte” non è un assioma valido.

Paradossi insiemistici: soluzione moderna

→ **Ridefinizione di "infinito", "maggiore", "minore"** (Dedekind, Bolzano, Cantor):

Un insieme è **infinito** se e solo se può essere posto in **corrispondenza biunivoca** con una sua **parte propria**

Georg Cantor (1845-1918): Teoria degli Insiemi basata sulla nozione di corrispondenza biunivoca.

Due insiemi hanno uguale grandezza se e solo se esiste tra loro una **biiezione**

- Se B è una parte (sottoinsieme) di A allora B non è maggiore di A (B ≤ A)
- Se A è un insieme e B l'insieme delle sue parti (sottoinsiemi) allora B è maggiore di A

Ergo: Esistono infinite varietà di grandezze infinite.

Paradossi insiemistici: Cantor

Paradosso di Cantor (1899) L'insieme di tutti gli insiemi è maggiore e minore del suo insieme delle parti!

A = insieme di tutti gli insiemi

B = insieme delle parti di A

B è sottoinsieme di A → B è minore o uguale ad A

D'altra parte Cantor dimostra che, in generale, B è maggiore di A.

Ergo: *Non esiste* l'insieme di tutti gli insiemi!

Paradossi insiemistici: appartenenza

Paradosso di **Bertrand Russell** (1902):

Insieme di tutti gli insiemi che non appartengono a sé stessi

Barbiere che rade tutti e soli coloro che non radono sé stessi

Persona che ama tutte e sole le persone che non amano sé stesse

Utente che mette *like* a tutti e soli gli utenti che non mettono *like* a sé stessi

Nazione che difende tutte e sole le nazioni che non difendono sé stesse

etc.

Paradossi dell’appartenenza: conclusioni

Ontologica: *Non esiste* l’insieme di tutti gli insiemi che non appartengono a sé stessi.

Linguistica: *Non ha senso* parlare di insiemi che appartengono a sé stessi.

Logica: “Ogni concetto definisce un insieme” *non è un assioma valido*.

Paradossi insiemistici: implicazioni

→ Revisione della nozione di **infinito**

→ Revisione della nozione di **insieme**

→ Revisione della nozione di **verità**

→ Revisione della nozione di **significato**

E.g. Graham Priest, "Logic of paradox," (1979) → dialetheism

Uso positivo dei paradossi: cardinalità

A = un gruppo di persone = Giorgio, Maria, Marco, Laura, Jeff, ...

B = le foto di tutti i possibili raggruppamenti (incluso quello senza nessuno)

Ogni persona sceglie **liberamente** la sua foto preferita.

Qualcuno può scegliere una foto in cui compare, qualcun altro no.

Sicuramente c'è una foto che ritrae tutte e sole le persone *del secondo tipo*!

→ *Questa* foto non è la preferita di nessuno!

NB: Il ragionamento funziona anche per un gruppo **infinito** di persone!

Uso positivo dei paradossi: cardinalità

Sia A un insieme. Sia B l’insieme di tutti i suoi sottoinsiemi.

Sia F una funzione da A in B.

Per un elemento *x* in A può darsi che *x* appartenga a F(*x*) oppure no

Consideriamo l’insieme S di tutti gli elementi di A che non appartengono **alla propria immagine** sotto la funzione F.

Questo insieme S è in B ma non è immagine di alcun *x* in A.

Ergo: Nessuna funzione da A in B è suriettiva (= copre tutto B).

Da cui si dimostra: L’insieme delle parti di A è **strettamente maggiore** di A.

Uso positivo dei paradossi: indecidibilità algoritmica

Sia M un **mago** capace di predire, da due fotografie di due **persone** A e B, se A mette un *like* alla foto di B su Instagram.

> Se M esiste allora esiste una **persona** P che decide se mettere un *like* su Instagram alla foto di C secondo la procedura seguente:
>
> Chiedo a M se C mette un *like* a se stesso.
>
> Se M dice di sì, allora non metto un *like* a C. Se M dice di no, allora metto un *like* a C.

Ora mi chiedo: P mette un *like* a se stesso? → contraddizione!

Ergo: Non esiste P! → Dunque non esiste M!

NB: funziona con *programmi* invece di *persone*/*maghi*

→ Non tutto è risolvibile da un algoritmo!

Uso positivo dei paradossi: incompletezza

Fissiamo un insieme di **assiomi** T.

Consideriamo la seguente frase G:

Questa frase non ha una dimostrazione a partire dagli assiomi di T.

Se G è **vera**, allora T non la dimostra e dunque non dimostra tutte le verità.

Se G è **falsa**, allora T la dimostra e dunque T *dimostra una falsità*.

Ergo: T non può essere simultaneamente **completa** (= dimostrare tutte le verità) e **corretta** (= non dimostrare falsità).

[Quando posso scrivere G?]

Quando gli assiomi di T sono **semplici** (e.g. riconoscibili da un algoritmo/programma)

Quando T contiene **un minimo di aritmetica** (e.g. le regole di somma e prodotto)

NB L’auto-referenzialità di G è possibile sotto le precedenti condizioni.

[Cosa dicono i Teoremi di Gödel?]

I *veri* Teoremi di Gödel (1931) non parlano di **verità** ma di **non-contraddizione**:

I Teorema di Gödel: Se T è non-contradditoria, allora è incompleta.

II Teorema di Gödel: Se T è non-contradditoria, non può dimostrarlo.

→ Impossibilità dell'auto-fondazione, auto-giustificazione etc.

→ Impossibilità dell'automazione completa del ragionamento matematico

Persone, programmi, fotografie, codici

Persona A → foto “*a*” di A

I programmi sono liste finite di istruzioni → si possono codificare numericamente

Programma A → codice “*a*” (numero)

Un programma può manipolare (il codice di) un programma

Cosa posso capire dalla foto di una persona?

Cosa posso capire dal codice di un programma?

Paradossi e auto-referenza

Teorema di Kleene. Sia A un programma. Esiste un programma K che si comporta così: dato un input *n*, K si comporta come il programma A si comporta sulla combinazione di *n* e di *k; ossia sull'input esterno e su una* **descrizione di se stesso** (il codice di K)!

Mario si comporta così: presa una foto di U e un pennarello colorato, disegna dei baffi sulla foto di U.

→ **Il Kleene di Mario** si comporta così: preso un pennarello colorato, disegna dei baffi sulla *propria* foto.

Teorema di Rice

Sia P una proprietà del comportamento dei programmi non banale.

→ Sia A un programma che ha P e B un programma che non ha P.

Esiste un programma che riconosce correttamente P? Sia C un tale programma.

→ **Programma H**: Su D ed *n*, se C dice che D ha P, H si comporta come B su *n*;

se C dice che D non ha P, H si comporta come A su *n*.

Kleene: Allora esiste un programma K che su *n* si comporta <u>come H su K ed *n*</u>.

Se K ha P → K si comporta come B; se K non ha P → K si comporta come A.

Ergo: Non esiste C! → Nessuna proprietà non-banale dei programmi è algoritmica!

Paradosso di Berry

Consideriamo la seguente definizione D di un numero intero positivo:

> Il minimo numero che non può essere definito in meno di mille parole

L'espressione D definisce un numero intero positivo, sia *d*.

Il numero *d* non può essere definito in meno di mille parole.

L'espressione D contiene meno di mille parole.

Paradosso di Berry e incompletezza di Chaitin

n (numero) → C(n) = lunghezza del programma *più corto* che scrive n e si ferma.

Per ogni numero N fissato esistono ***infiniti*** numeri con complessità > N.

Se un numero n ha complessità minore di N è facile dimostrarlo.

Dimostrare che un numero ha complessità maggiore di un dato N è più difficile.

Quante delle infinite diseguaglianze vere del tipo C(n) > N posso <u>dimostrare</u>?

Paradosso di Berry e incompletezza di Chaitin

Fisso un sistema di assiomi T e un linguaggio di programmazione.

Programma P con un parametro numerico N: faccio la lista di tutte le prove da assiomi di T, appena ne vedo una che prova una diseguaglianza di tipo "$C(x) > \mathbf{N}$" mi fermo e scrivo x.

Se T prova qualche diseguaglianza di tipo $C(x) > N \rightarrow$ *P si ferma* e scrive un numero m.

Questo m ha complessità al più lunghezza di P.

complessità di m ≤ lunghezza di P = costante + log(N).

Se L è abbastanza grande: **costante + log(L) < L.**

Dunque **C(m) < L** ma T dimostra che **C(m) > L**. Contraddizione se T è corretta!

Ergo: Per nessun numero *n* T dimostra che *n* ha complessità maggiore di **L**. Se T è **corretta** (dimostra solo cose vere) allora è **incompleta** (non dimostra tutte le verità).

Verifica a sorpresa

È sabato. Il Professore annuncia alla classe che la settimana successiva ci sarà una verifica a sorpresa. Uno studente solleva la seguente obiezione: la verifica non potrà essere di sabato, perché altrimenti il venerdì gli studenti saprebbero che la verifica si svolgerà di sabato. Non può essere di venerdì, perché altrimenti il giovedì gli studenti saprebbero che si svolgerà di venerdì. Ripetendo questo ragionamento si conclude che la verifica a sorpresa non potrà essere svolta in nessuno dei giorni della settimana.

Verifica a sorpresa e incompletezza

Il numero di programmi di lunghezza al più **L è limitato (finito)**.

Sia **N** maggiore di questo numero.

→ *Almeno un numero* tra 1 e **N** ha complessità maggiore di **L**

Supponiamo che sia *uno solo*. Posso identificarlo ispezionando tutti gli altri.

Ma questo **dimostra** che ha complessità maggiore di **L**.

Supponiamo che siano *solo due*. Posso identificarli ispezionando tutti gli altri.

Ma questo **dimostra** che hanno complessità maggiore di **L**. Etc.

→ II Teorema di Gödel (Se T è non-contraddittoria, non lo dimostra)

Altri paradossi

Paradossi di Zenone → serie convergenti, leggi del moto, regresso all'infinito

Paradossi del voto (Condorcet, Arrow) → educazione civica, etica, diritto

Paradossi dell'implicazione (Stoici, Curry) → auto-referenza, filosofia, giustificazione

Paradosso di Curry → implicazione

Paradosso di Fitch → conoscenza

…

GRAZIE!