Il calcolo integrale: aspetti teorici e didattici.

Andrea Bruno (Roma Tre)

Seminario PLS

Roma, 4 febbraio 2022

Il calcolo integrale: aspetti teorici e didattici.

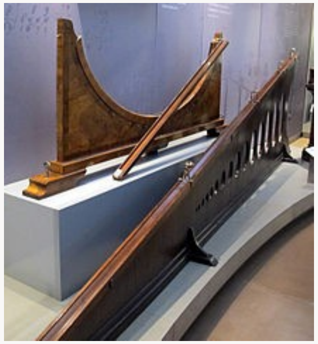
- **E’ davvero utile calcolare l’integrale indefinito?**
- **Non sarebbe comunque preferibile tenerlo in secondo piano rispetto all’integrale definito?**
- **Molti alunni vedono gli integrali indefiniti come una costruzione artificiale senza utilità e piena di meccanismi complicati e di stratagemmi, di cui sfugge il senso.**

Sul testo “Matematica 2004” del UMI si leggono le seguenti indicazioni:
“*L'ordine e il modo in cui si introducono i concetti di derivata, integrale, primitiva, funzione integrale dipendono dalle scelte didattiche dell'insegnante. La storia della matematica può essere di aiuto e di guida in queste scelte. Il teorema fondamentale del calcolo integrale può essere illustrato anche facendo ricorso a visualizzazioni.*

Il calcolo integrale: aspetti teorici e didattici.

D’altra parte le funzioni di cui si sa calcolare la primitiva sono tutte e sole quelle che compaiono come esercizi.....

Oltre a dover fare i conti con la presenza di softwares (Mathematica, Maple, Derive…), il sapere che non ogni funzione continua ha una primitiva che si esprime in maniera elementare può aiutare a vincere paure e ritrosie.



Il calcolo integrale: aspetti teorici e didattici.

-Funzioni non integrabili elementarmente:

- e^{x^2}: (Liouville)
- $\frac{1}{\ln x}$
- $\frac{\sin x}{x}$

Il calcolo integrale: aspetti teorici e didattici.

-Funzioni non integrabili elementarmente:

Teorema (TCHEBITCHEV)

$p, r, s \in \mathbb{Q}$

$x^p(ax^r+b)^s$ é elem. int.

$\Updownarrow$

s o $\frac{p+1}{r}$ o $\frac{p+1}{r}+s$ é intero

Il calcolo integrale: aspetti teorici e didattici.

-Funzioni non integrabili elementarmente:

C. De Lellis: Il Teorema di Liouville ovvero perché non esiste la primitiva di e^x^2 (Bellinzona, 29/9/12)

$$f(x)\, e^{g(x)} \quad \text{elem. int.}$$

$$\Updownarrow$$

$$\exists\ a(x) \in \mathbb{C}(X) \quad \left(a(x) = \frac{P}{Q} \right)$$

$$\text{t.c.} \quad f' = a' + a g'$$

$$\left(\Uparrow \quad a e^{g(x)} \right)$$

Il calcolo integrale: aspetti teorici e didattici.

Non mi sembra proponibile parlare di formule di Fagnano, di integrali ellittici, di Superficie di Riemann, di funzioni ellittiche, anche se compaiono nel testo di Enriques-Chisini.

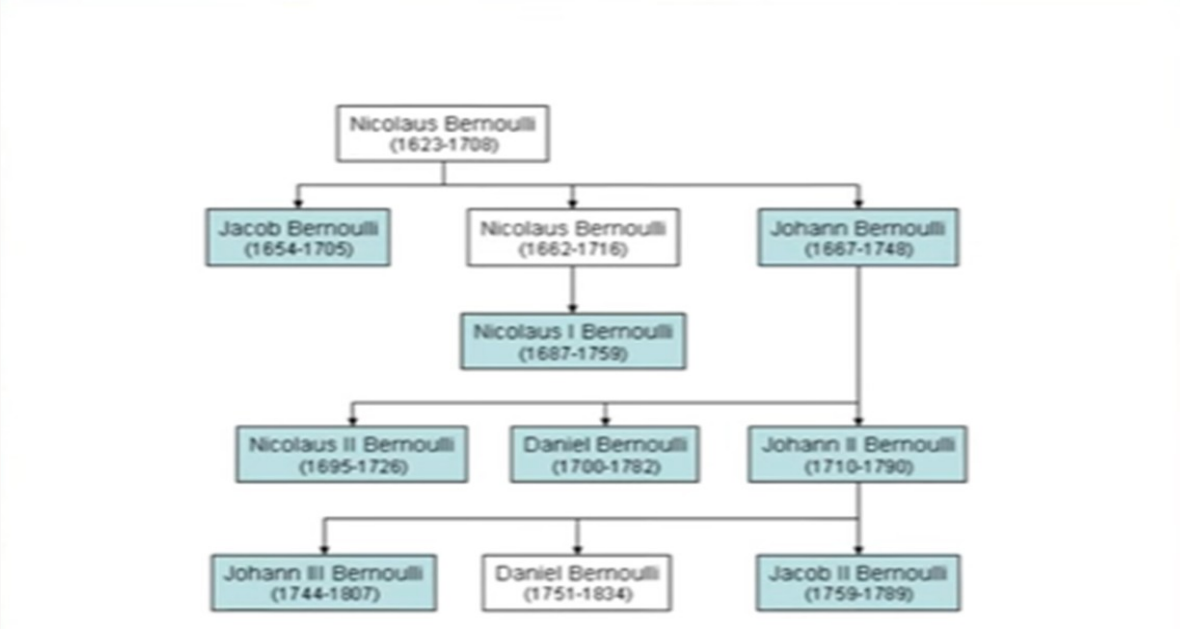
Il calcolo integrale: aspetti teorici e didattici.

Insomma, vi sono pochi strumenti per dare ragione del limite nella possibilità del calcolo, ma è possibile motivare gli alunni presentando piccoli percorsi in una grande storia,

Da cui si evincono la profonda unità della matematica e come storie di uomini, storia della scienza e contesti culturali si intrecciano.

Il calcolo integrale: aspetti teorici e didattici.

La famiglia Bernoulli:



Il calcolo integrale: aspetti teorici e didattici.

Jacob Bernoulli (1655, 1705)

-legge dei grandi numeri

-e

-numeri di Bernoulli

Il calcolo integrale: aspetti teorici e didattici.

Johann Bernoulli (1667-1748)

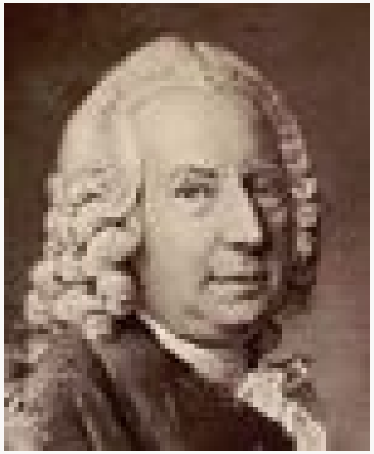
-ispiratore del trattato

di De l’Hopital

-calcolo delle variazioni

Il calcolo integrale: aspetti teorici e didattici.

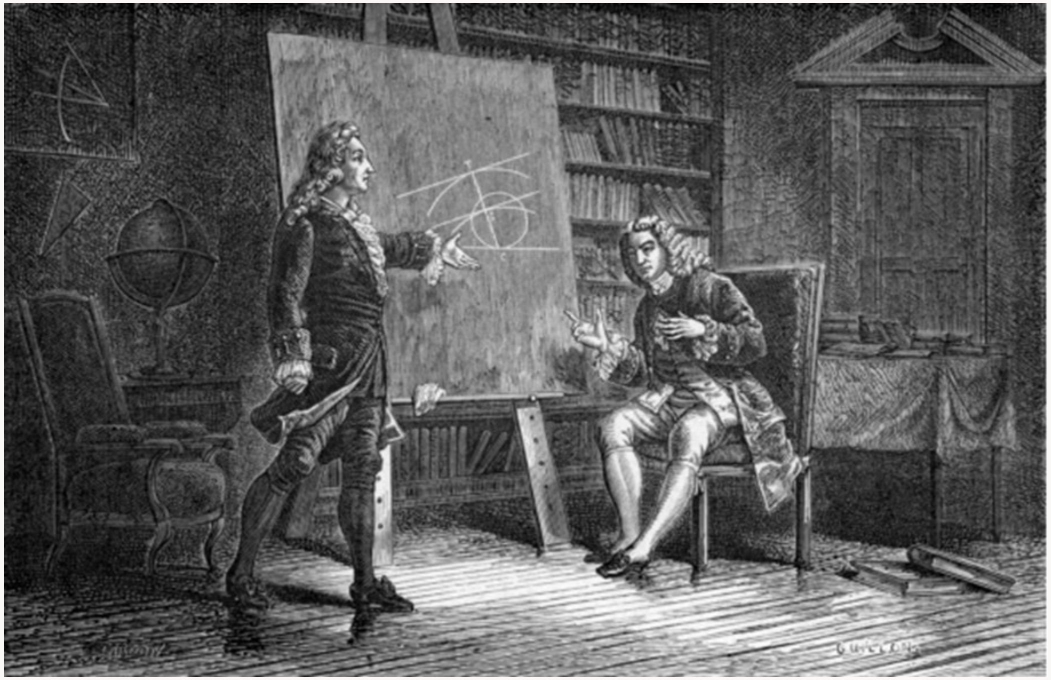
Daniel Bernoulli (1700-1782)



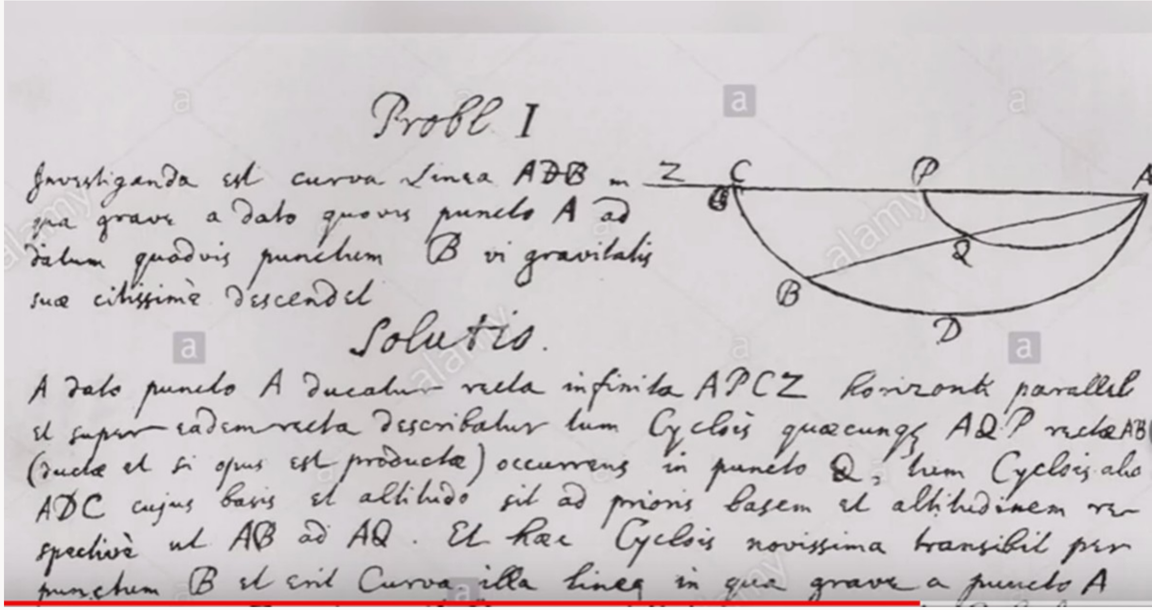
Fluidi, gas

Legge di Euler-Bernoulli

Il calcolo integrale: aspetti teorici e didattici.



Il calcolo integrale: aspetti teorici e didattici.



Probl. I

Investiganda est curva Linea ADB in qua grave a dato quovis puncto A ad datum quodvis punctum B vi gravitatis suae citissime descendet

Solutio.

A dato puncto A ducatur recta infinita APCZ horizonti parallel[a] et super eadem recta describatur tum Cyclois quaecunque AQP recta AB (ducta et si opus est producta) occurrens in puncto Q, tum Cyclois alia ADC cujus basis et altitudo sit ad prioris basem et altitudinem respective ut AB ad AQ. Et haec Cyclois novissima transibit per punctum B et erit Curva illa linea in qua grave a puncto A

La brachistocrona

Jacob e Johann sono ferventi polemisti pro-Leibniz.

Jacob inizia Johann al calcolo infinitesimale e lavorano per dieci anni con spirito di rivalità che diventa accesa e poi lite.

1691: forma degli scafi

1697: problema isoperimetrico

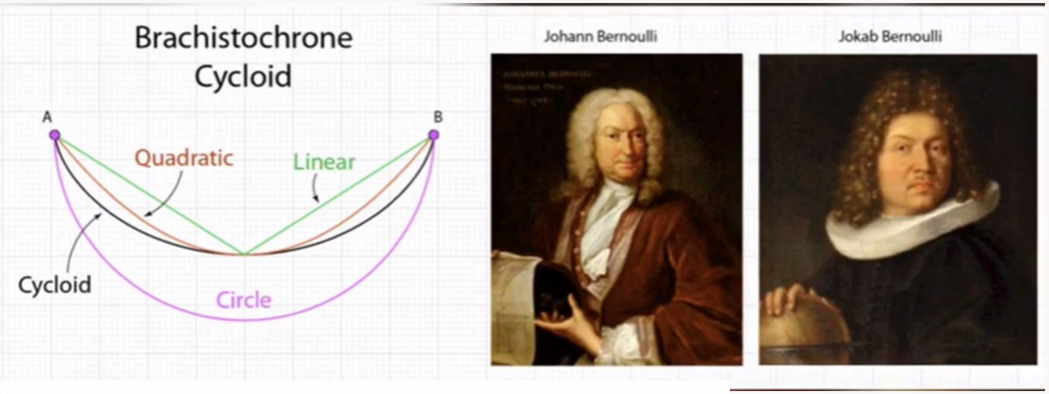
La brachistocrona

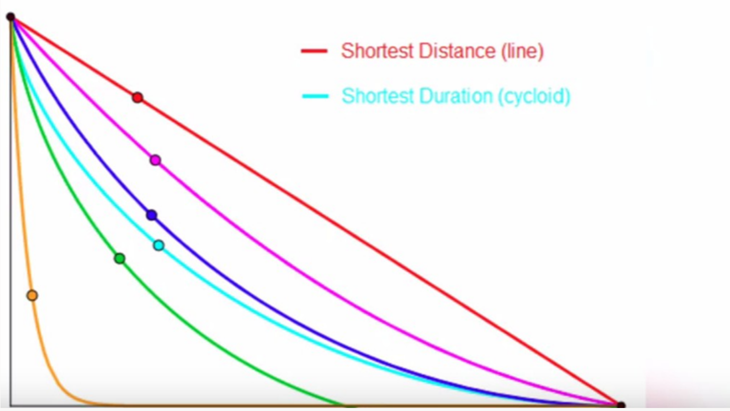
«La forma delle cose» M. Andreatta, 2019.

Nel 1696, Johann propone su A. Eruditorum il problema:

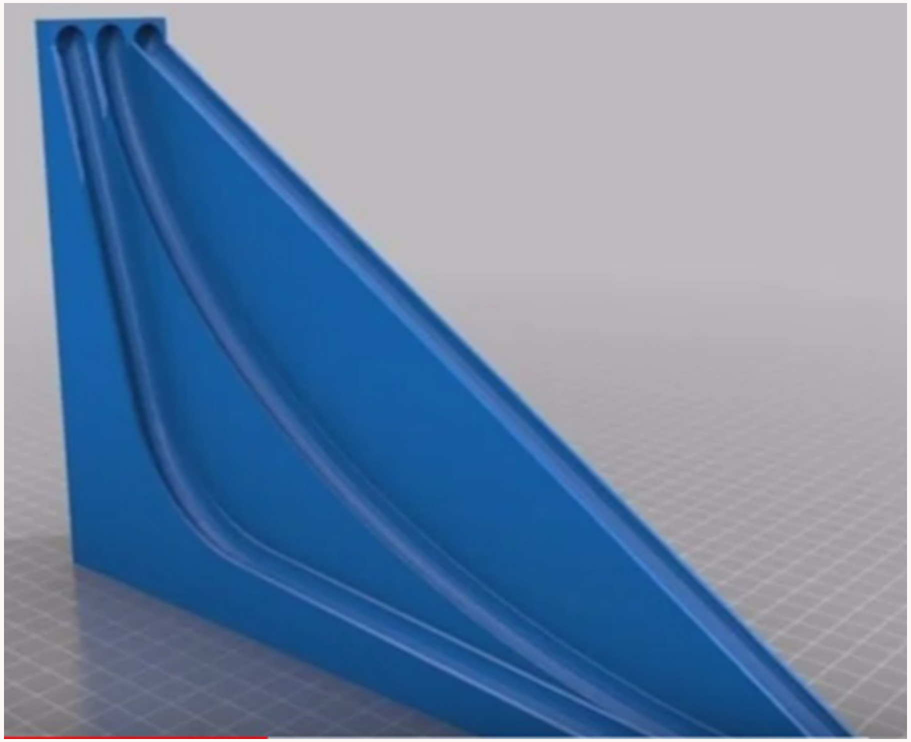
"Dati due punti A e B in un piano verticale, trovare la curva che un corpo che si muove, per gravità, da A deve percorrere per raggiungere B nel tempo piu breve."

La brachistocrona

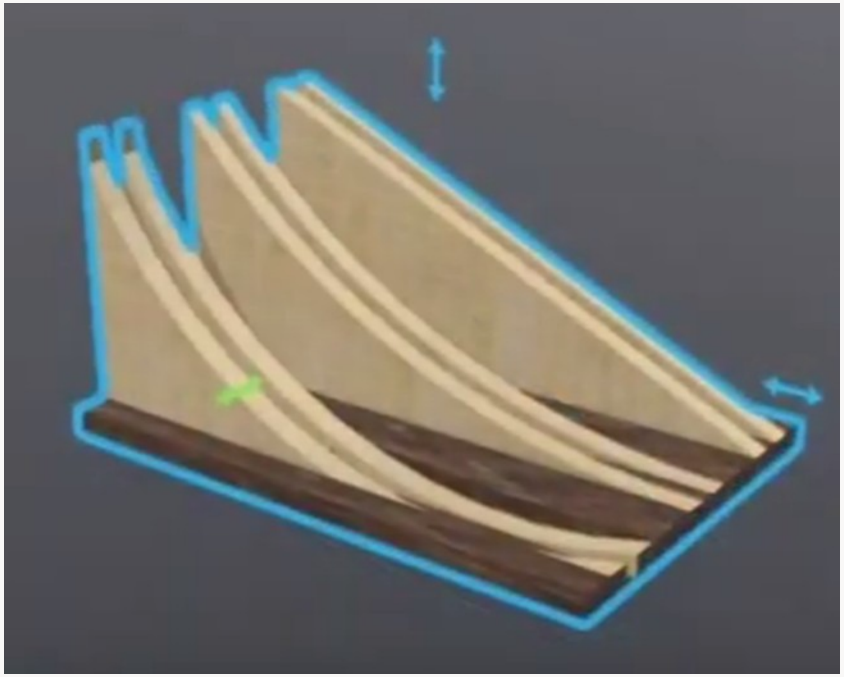




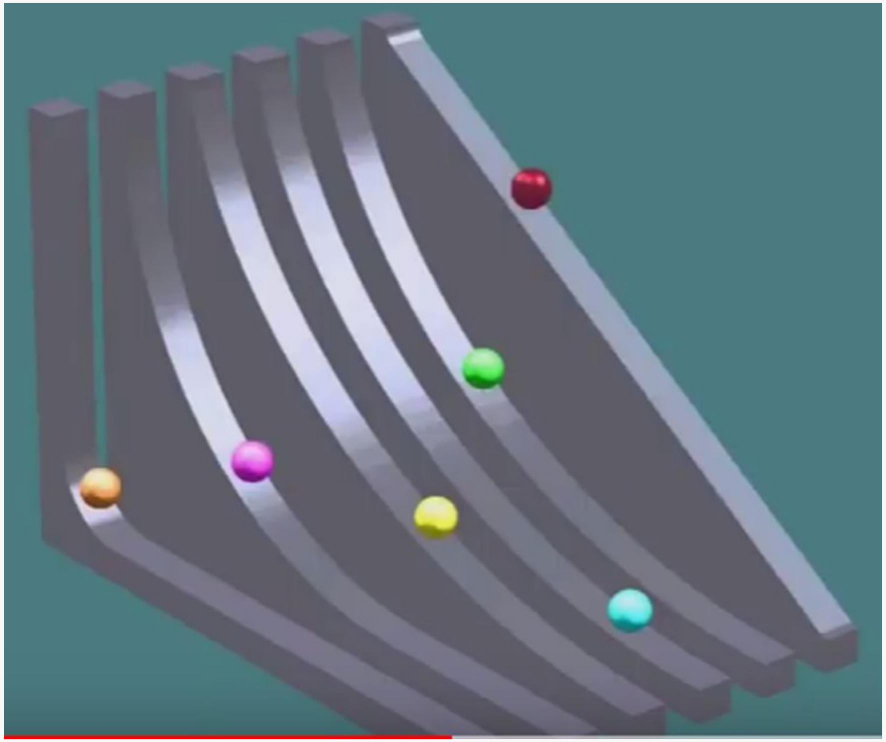
La brachistocrona



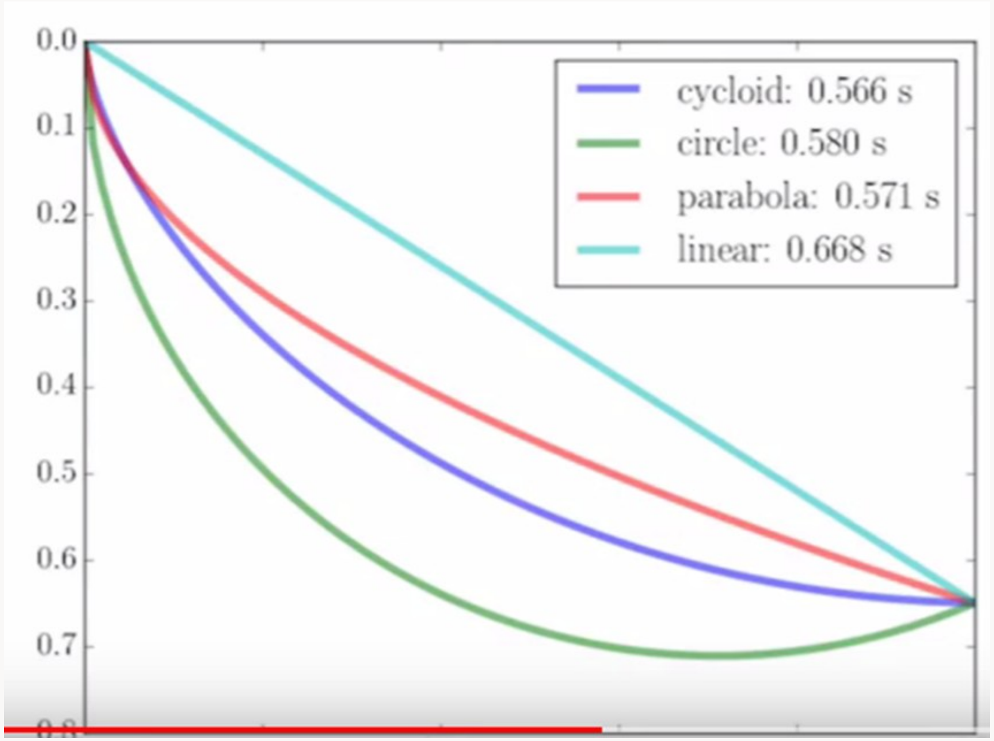
La brachistocrona



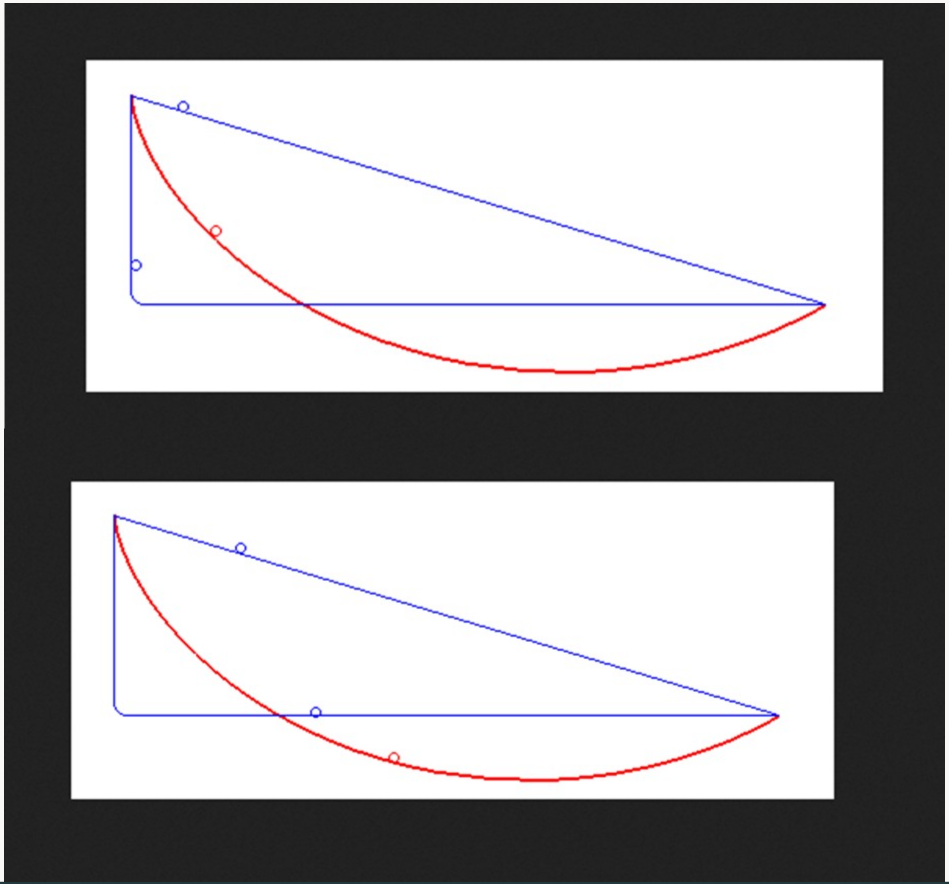
La brachistocrona



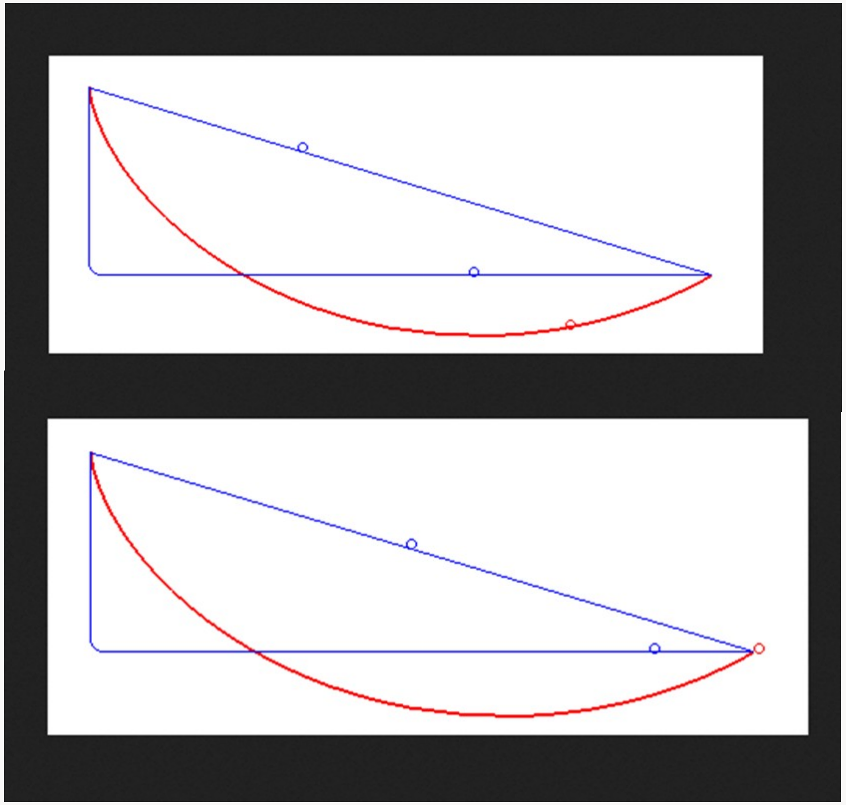
La brachistocrona



La brachistocrona



La brachistocrona



La brachistocrona

Rispondono alla sfida

Jacob Bernoulli

Johann Bernoulli

Leibniz

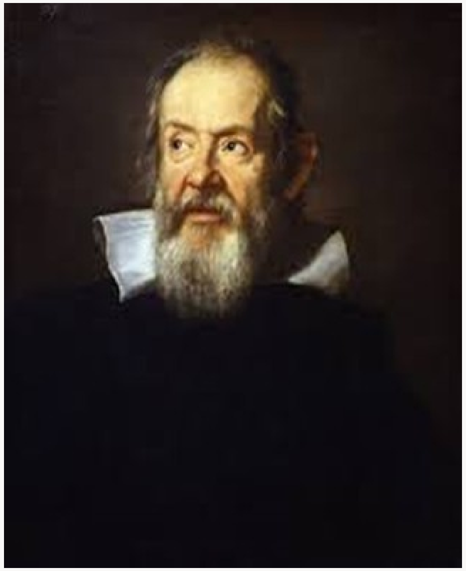
Newton (Huygens)

L'Hopital

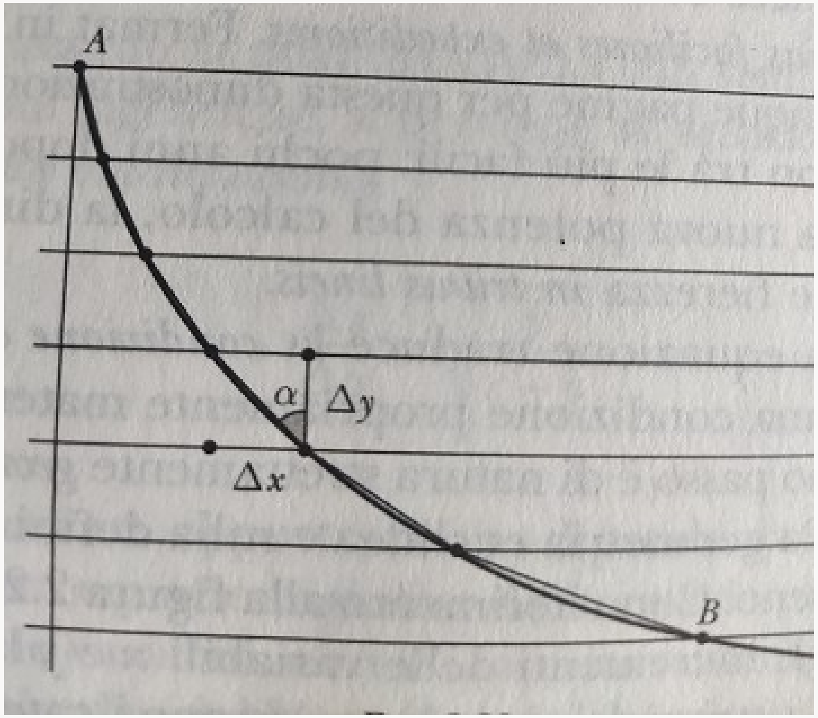
(Tesi P. D'Angelo/Rogora, 2015/16)

La brachistocrona

Galilei aveva dimostrato che lungo l’arco di cerchio si impiega meno tempo che lungo il segmento. Ma dubita che la sua risposta sia la migliore



La brachistocrona



La brachistocrona

Conservazione dell' energia $\Rightarrow v = \sqrt{2gy}$

Legge di Snell $\Rightarrow \dfrac{v}{sen(\alpha)} = K$

La brachistocrona

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}}$$

$$\Delta x = \sqrt{\frac{y}{c-y}}\,\Delta y$$

La brachistocrona

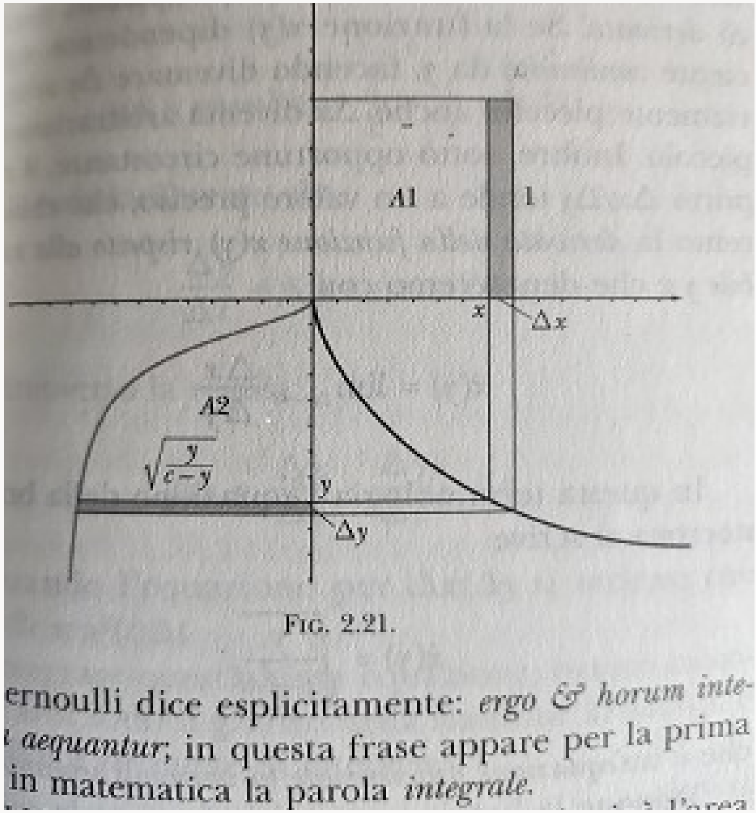


Fig. 2.21.

ernoulli dice esplicitamente: *ergo & horum inte-*
aequantur; in questa frase appare per la prima
in matematica la parola *integrale*.

La brachistocrona

$$y(t) = c \, \text{sen}^2 t$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = c \, \text{sen}(2t)$$

$$\Delta x = \frac{\Delta x}{\Delta y} \frac{\Delta y}{\Delta t} \Delta t$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta x = 2c \, \text{sen}^2 t \, \Delta t$$

La brachistocrona