

Matrici e immagini digitali

Dall'algebra matriciale al trattamento delle immagini

Una proposta didattica del Progetto Klein Italia

Stefano FINZI VITA (Fondazione Sapienza)
Davide PASSARO (Roma Sapienza)
Francesca TOVENA (Roma Tor Vergata)

Il Progetto Klein Internazionale

<https://www.mathunion.org/icmi/activities/klein-project>



- Avviato nel 2008 dall'**International Mathematical Union** (IMU) e dall'**International Commission on Mathematical Instruction** (ICMI)
- Obiettivo: creare una comunità di apprendimento basata sui contatti tra scuole secondarie e ricerca matematica contemporanea.
- Strumento base sono le cosiddette "**vignettes Klein**", brevi scritti capaci di illustrare in modo stimolante e innovativo specifici temi della matematica che potrebbero trovare spazio nei programmi tradizionali.
- Diverse vignette sono presenti sul sito, per lo più in lingua inglese, anche se molte sono state tradotte in italiano su iniziativa dell'UMI.

Il Progetto Klein Italia

In Italia in questi anni l'esperienza del [Liceo Matematico](#) è andata sempre più crescendo, e l'UMI ha creato un apposito Gruppo di Ricerca.

All'interno di esso, grazie all'iniziativa coordinata da [Ferdinando Arzarello](#) e [Ornella Robutti](#) dell'Università di Torino, è apparso naturale un collegamento col Progetto Klein, costituendo una sezione Klein Italia che al momento coinvolge una trentina tra docenti universitari e insegnanti.

- L'attività è partita individuando un paio di vignette su cui lavorare ([Simmetrie](#) e [Matrici e immagini](#)), trasponendone i contenuti in un percorso didattico articolato e fornendo un ricco materiale di accompagnamento da mettere a disposizione degli insegnanti interessati alla sperimentazione
- Da poco si lavora a una terza vignetta: [Ricorrenza e induzione](#)

La vignetta originale

Matrici e immagini digitali (<http://blog.kleinproject.org/?p=1742lang=it>)

D.U. Pesco e H.J. Bortolossi, Università Federale Fluminense, Brasile



Le immagini, come te le immagini?

- Gli studenti di oggi sono nativi digitali, maneggiano quotidianamente centinaia di immagini sul cellulare o sul pc, giocano con App in grado di trasformarle con effetti speciali divertenti, ma pochi di loro sanno come sia realmente fatta un'immagine digitale e come si possa intervenire su di essa per modificarla.

Le immagini, come te le immagini?

- Gli studenti di oggi sono nativi digitali, maneggiano quotidianamente centinaia di immagini sul cellulare o sul pc, giocano con App in grado di trasformarle con effetti speciali divertenti, ma pochi di loro sanno come sia realmente fatta un'immagine digitale e come si possa intervenire su di essa per modificarla.
- Lo scopo del nostro percorso è mostrare che dietro quelle immagini ci sono strutture numeriche ben definite e facilmente ricavabili, punto di partenza per poterle modificare attraverso algoritmi numerici (spesso anche molto semplici).

Le immagini, come te le immagini?

- Gli studenti di oggi sono nativi digitali, maneggiano quotidianamente centinaia di immagini sul cellulare o sul pc, giocano con App in grado di trasformarle con effetti speciali divertenti, ma pochi di loro sanno come sia realmente fatta un'immagine digitale e come si possa intervenire su di essa per modificarla.
- Lo scopo del nostro percorso è mostrare che dietro quelle immagini ci sono strutture numeriche ben definite e facilmente ricavabili, punto di partenza per poterle modificare attraverso algoritmi numerici (spesso anche molto semplici).
- Python fornisce un linguaggio (a loro per lo più già noto) per implementare questi metodi numerici e apprezzarne istantaneamente gli effetti.

Image processing

Il trattamento delle immagini ha numerose applicazioni in **biologia**, **chimica**, **medicina**, **ingegneria**, **arte**, **informazione** [v. Gruppo **MIVA-UMI**].

Ci sono almeno 4 situazioni, dove la matematica può dare una mano:

- **Image denoising**: rimuovere interferenze presenti nell'immagine (il cosiddetto *rumore*) causate da problemi di trasmissione del segnale, mantenendone le strutture fondamentali.
- **Image deblurring**: ridefinire i contorni sfumati, per esempio in immagini sfocate, fornendone una versione più nitida.
- **Image inpainting**: quando parte dell'immagine è occlusa o deteriorata, partendo dalle informazioni presenti nelle regioni visibili si cerca di ricostruire le zone mancanti attraverso l'interpolazione.
- **Image segmentation**: si vogliono individuare specifiche regioni in un'immagine separandole tra loro in base alle proprietà caratteristiche (colore, intensità, ecc.).

La struttura del percorso proposto (e del seminario)

- Tabelle e matrici [I biennio]

Francesca

- Uno strumento didattico innovativo: i Notebook Jupyter e la piattaforma Colab di Google

Davide

- ▶ L'inizio della sperimentazione al Liceo Plinio

Alberto Bigazzi

- Azioni sulle immagini digitali (con Python) [II biennio / V anno]

Stefano

TABELLE E MATRICI

Immagine come funzione

Una immagine digitale (raster, bitmap) è la rappresentazione numerica di una immagine bidimensionale.

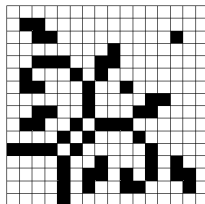
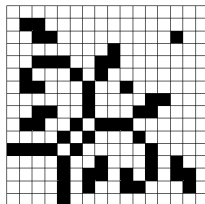


Immagine come funzione

Una immagine digitale (raster, bitmap) è la rappresentazione numerica di una immagine bidimensionale.



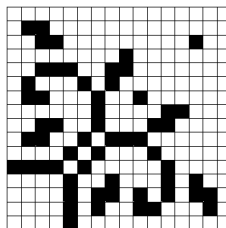
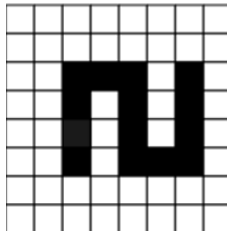
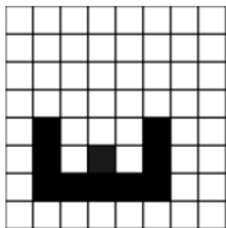
Nella proposta, rivolta a studenti del primo biennio della secondaria di secondo grado, l'immagine digitale sarà, più semplicemente, una griglia a quadretti colorati, descritta da una funzione dall'insieme delle coppie di indici della griglia ad un insieme finito di colori.

Si fornisce una occasione per trattare la nozione di funzione discreta, di rappresentarla, di studiarne le composizioni.

Questa parte di trasposizione didattica è stata curata da Antonella Azzone, Rosa Buono, Giovanna Guidone, Eleonora Faggiano, Monica Mattei, Federica Mennuni, Gabriella Righetti, Francesca Tovenà

Attività 1: familiarizzare con indici di riga e colonna

Attività di laboratorio: Battaglia navale



Obiettivi:

- importanza di un sistema condiviso per indicare una cella in una griglia;
- padroneggiare il linguaggio formale specifico.
- far emergere la relazione tra posizione di una cella in una griglia e una coppia ordinata (*indiceriga, indicecolonna*) nel prodotto cartesiano tra insiemi di indici;
- saper formulare nella terminologia delle griglie alcune proprietà di simmetria proprie delle immagini digitali;

Riempire una griglia

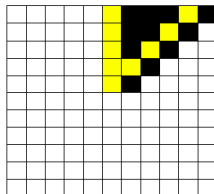
A partire da esempi numerici, si passa alla descrizione di leggi che individuano particolari zone nella griglia.

Considera la seguente griglia che contiene alcune celle colorate. Leggi ed esegui le indicazioni.

Indicazioni

Completa la griglia in modo che tutte le celle siano colorate di nero o di giallo, in base alle seguenti istruzioni:

- L'elemento $(6, 6)$ è nero;
- L'elemento (i, k) e l'elemento (k, i) hanno lo stesso colore;
- L'elemento (i, k) e l'elemento $(i, 12 - k)$ hanno lo stesso colore;
- L'elemento (i, k) e l'elemento $(12 - i, k)$ hanno lo stesso colore.



Riempire una griglia

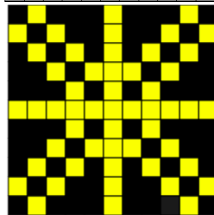
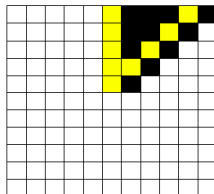
A partire da esempi numerici, si passa alla descrizione di leggi che individuano particolari zone nella griglia.

Considera la seguente griglia che contiene alcune celle colorate. Leggi ed esegui le indicazioni.

Indicazioni

Completa la griglia in modo che tutte le celle siano colorate di nero o di giallo, in base alle seguenti istruzioni:

- L'elemento $(6, 6)$ è nero;
- L'elemento (i, k) e l'elemento (k, i) hanno lo stesso colore;
- L'elemento (i, k) e l'elemento $(i, 12 - k)$ hanno lo stesso colore;
- L'elemento (i, k) e l'elemento $(12 - i, k)$ hanno lo stesso colore.



Attività 2: L'immagine come funzione

PARTE A



Guarda la griglia che hai davanti e indica con (i, k) l'elemento con indice di riga i e indice di colonna k .

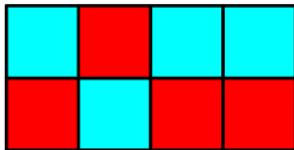
Considera la legge seguente:

$$(i, k) \mapsto i + k$$

che ti dice che sopra la casella (i, k) devi impilare $i + k$ monete.

Colloca le monete su ogni casella secondo la legge data.

Dalla funzione all'immagine e viceversa



1. Considera l'immagine e riproducila aiutandoti con il file geogebra.
2. Trascrivi i valori da attribuire nella funzione corrispondente alla tabella, attribuendo a ogni coppia di indici il colore della corrispondente cella.

$$f: \{1, 2\} \times \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{\text{azzurro}, \text{rosso}\}$$

$$(1,1) \mapsto$$

$$(1,2) \mapsto$$

$$(1,3) \mapsto$$

$$(1,4) \mapsto$$

$$(2,1) \mapsto$$

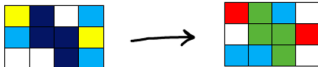
$$(2,2) \mapsto$$

$$(2,3) \mapsto$$

$$(2,4) \mapsto$$

Attività 3: cambio di colore come composizione successiva alla funzione immagine

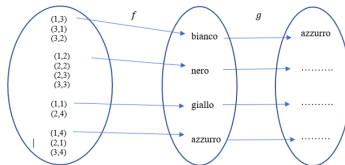
L'immagine a destra (B) è stata ottenuta da quella a sinistra (A) modificando i colori.



Punto 2.

Completa la funzione-tabella dell'immagine di sinistra, inserendo le frecce che associano a ciascuna coppia di indici il colore della cella corrispondente. Poi trascrivi i colori del codominio della funzione g tenendo conto delle frecce già inserite.

$$\{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3, 4\} \xrightarrow{f} \{\text{bianco, giallo, azzurro, nero}\} \xrightarrow{g} \{\text{rosso, bianco, verde, azzurro}\}$$



Punto 1.

Rappresenta la funzione che descrive il cambio di colori effettuato, inserendo le frecce tra i colori:

$$g: \{\text{bianco, giallo, azzurro, nero}\} \rightarrow \{\text{rosso, bianco, verde, azzurro}\}$$

Completa disegnando le frecce del cambio di colore.



Verifica che la composizione $f' = g \circ f$ di g dopo f , definita da $x \mapsto (g \circ f)(x) = g(f(x))$ coincide con la funzione-tabella dell'immagine con i colori modificati.

Attività 4: cambio di disposizione e riordino come composizione prima della funzione immagine

Attività 4.2 Ricomponi l'immagine

Dividetevi in coppie e considerate la funzione-tabella:

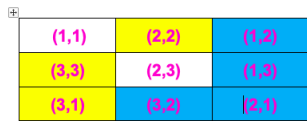
$$f: \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\} \rightarrow \{\text{bianco}, \text{azzurro}, \text{giallo}\}$$

$(1,1) \mapsto \text{bianco}$ $(1,2) \mapsto \text{azzurro}$ $(1,3) \mapsto \text{azzurro}$
 $(2,1) \mapsto \text{azzurro}$ $(2,2) \mapsto \text{bianco}$ $(2,3) \mapsto \text{bianco}$
 $(3,1) \mapsto \text{giallo}$ $(3,2) \mapsto \text{azzurro}$ $(3,3) \mapsto \text{giallo}$



Punto 1 e 2

- Uno di voi due ricopia l'immagine associata a f su un foglio; poi, trascriverà in ogni cella la coppia con indice di riga e colonna; infine, ritaglierà i quadretti.
- L'altro dei due posizionerà i quadretti ritagliati nella immagine seguente, facendo attenzione a far corrispondere gli indici



Attività 5 e 6: introduzione alle affinità

L'immagine rivela proprietà delle trasformazioni piane



- Obiettivo: introdurre la nozione di trasformazione affine del piano, evidenziandone alcune proprietà geometriche e imparando a rappresentarle analiticamente
- Attività: i ragazzi sperimentano l'effetto prodotto operando trasformazioni su configurazioni finite di punti nel piano cartesiano

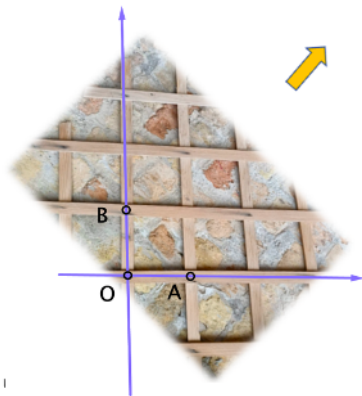
f
Dilatazione lungo
un asse



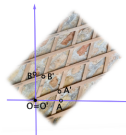
g
Trasformazione affine



Attività 5 e 6: introduzione alle affinità



1. Se le aste formano quadrati di lato 20cm, segna con un puntino alcuni punti della griglia e trovane le coordinate.
2. Silvana tira la griglia nella direzione della freccia (è la direzione della bisettrice degli assi) lasciando fisso il punto che nella figura è indicato come O. Il punto A viene spostato in una posizione che, rispetto al sistema di riferimento fissato all'inizio, si può descrivere con $A'(\sqrt{3} \cdot 10, 10)$ (le coordinate sono espresse in centimetri). Quali sono le coordinate del punto B nella sua nuova posizione B'? Per ciascuno dei punti che avevi evidenziato in 1., trova poi le coordinate assunte in questa nuova configurazione della griglia.



NOTEBOOK JUPYTER E COLAB

Jupyter notebook a scuola

- Il notebook è una sorta di quaderno degli appunti digitale gestito tramite browser.
- Permette di avere nello stesso posto in modo interattivo: testo (comprese formule in LaTeX, immagini, video, link), codice e dati.
- Nasce in campo scientifico per sviluppare e condividere la propria ricerca in modo veloce e flessibile.
- È particolarmente adatto ad essere usato a scuola.
- È un progetto opensource gratuito e multiplatforma.
- Jupyter è probabilmente il notebook attualmente più usato.

Definizione "originale" di Jupyter:

JupyterLab is the latest web-based interactive development environment for notebooks, code, and data. Its flexible interface allows users to configure and arrange workflows in data science, scientific computing, computational journalism, and machine learning. (fonte: <https://jupyter.org/>)

Jupyter e Python

- Jupyter permette l'inserimento di celle in cui è contenuto codice che può essere eseguito in tempo reale in modo interattivo mostrando i successivi risultati sempre nel browser.
- Anche se Jupyter permette di usare diversi linguaggi (R, Julia, ecc..) nasce con il linguaggio **Python**.
- Python è considerato da molti il più semplice linguaggio per iniziare ad apprendere la programmazione.
- Jupyter e Python sono una accoppiata perfetta per utilizzare tutte le potenzialità dei notebook.
- Esistono varie versioni di Jupyter anche online. La più famosa ed utilizzata è Google Colab: <https://colab.research.google.com/> (serve avere account google).
- Esistono anche alternative online come Kaggle
- Colab permette di evitare di installare Jupyter e Python azzerando il tempo "perso" per installare il tutto.

Iniziamo ad usare Colab

Per usare colab è sufficiente accedere al seguente indirizzo:

<https://colab.research.google.com/>

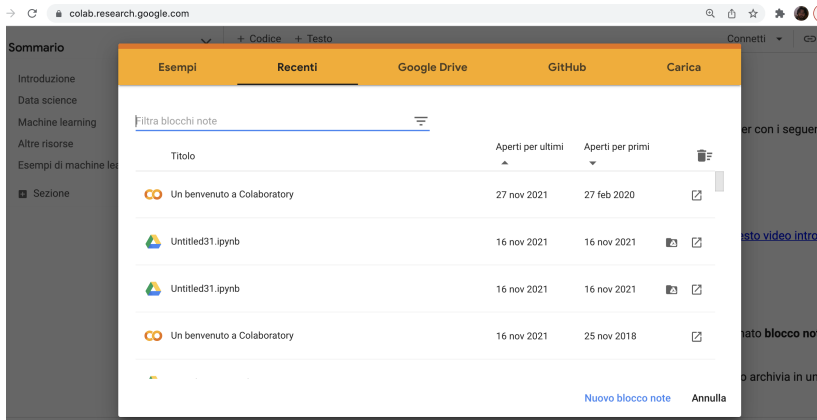
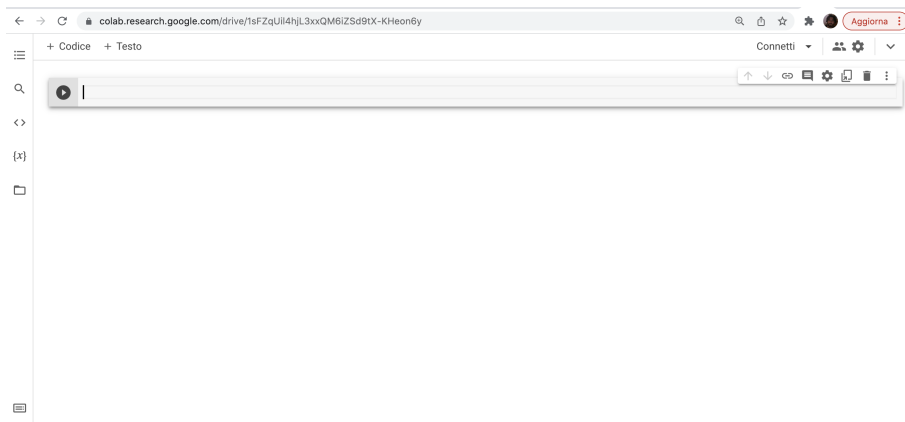


Figure: Schermata iniziale: cliccare su "Nuovo blocco note"

Il primo notebook jupyter: blocchi di testo e di codice



Il primo notebook: si posso aggiungere delle celle/blocchi di testo e di codice

Il primo notebook: editare il testo (1)

The screenshot shows a Google Colab notebook interface. The browser address bar displays the URL: `colab.research.google.com/drive/1sFZqUil4hjlL3xxQM6IZSd9tX-KHeon6y#scrollTo=dnNCxkZzdMlc`. The notebook has two tabs: '+ Codice' and '+ Testo', with '+ Testo' currently selected. The interface includes a search bar, a 'Connetti' button, and an 'Aggiorna' button. The main editor area is split into two columns. The left column contains the following text: 'Qui si può inserire il testo.', 'Si possono facilmente anche inserire immagini', 'Nonchè formule con la notazione LaTeX', and a LaTeX expression $y = \int_a^b f(x) dx$ rendered using the `\int_{a}^{b} f(x) dx` code. The right column contains the same text, but the LaTeX expression is rendered as a visual formula $y = \int_a^b f(x) dx$. A rich text editor toolbar is visible above the text, featuring icons for bold, italic, code, link, image, list, indent, outdent, link, unlink, and other formatting options.

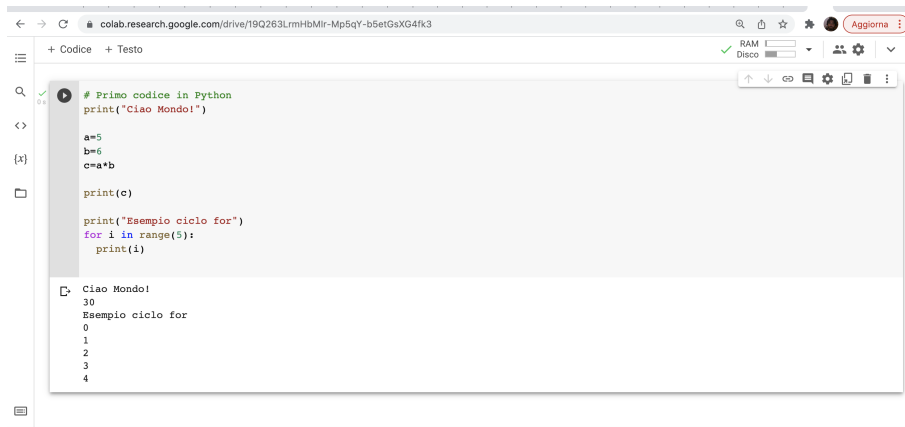
L'editor di testo è intuitivo e permette di usare anche LaTeX

Il primo notebook: editare il testo (2)

The screenshot displays a Google Colab notebook with a browser address bar showing the URL: `colab.research.google.com/drive/1sFzqUil4hJL3xxQM6IZSd9tX-KHeon6y#scrollTo=dnNCxkZzdMlc`. The interface includes a top toolbar with icons for text formatting (bold, italic, code, link, image, list, indent, outdent, undo, redo, help) and a right sidebar with 'Connetti' and 'Aggiorna' buttons. The notebook content is split into two columns. The left column contains the following text: 'Qui si può inserire il testo.', 'Si possono facilmente anche inserire immagini', 'Nonchè formule con la notazione LaTeX', a LaTeX formula $y = \int_a^b f(x)dx$, italicized text '*testo da mettere in corsivo*', bold text '**testo in grassetto**', and a link '[testo del link](https://www.liceomatematico.it)'. The right column contains: 'Qui si può inserire il testo.', 'Si possono facilmente anche inserire immagini', 'Nonchè formule con la notazione LaTeX', the same LaTeX formula $y = \int_a^b f(x)dx$, italicized text 'testo da mettere in corsivo', bold text 'testo in grassetto', and a blue link 'testo del link'.

E' possibile scrivere in grassetto, corsivo, inserire link, immagini, video, ecc..

Il primo notebook: scrivere codice



The screenshot shows a Google Colab notebook in a web browser. The address bar displays the URL: `colab.research.google.com/drive/19Q263LrmHbMlr-Mp5qY-b5etGsXG4fk3`. The interface includes a top toolbar with icons for search, share, star, and a refresh button labeled "Aggiorna". Below the toolbar, there are tabs for "+ Codice" and "+ Testo". The main area contains a code cell with the following Python code:

```
# Primo codice in Python
print("Ciao Mondo!")

a=5
b=6
c=a*b

print(c)

print("Esempio ciclo for")
for i in range(5):
    print(i)
```

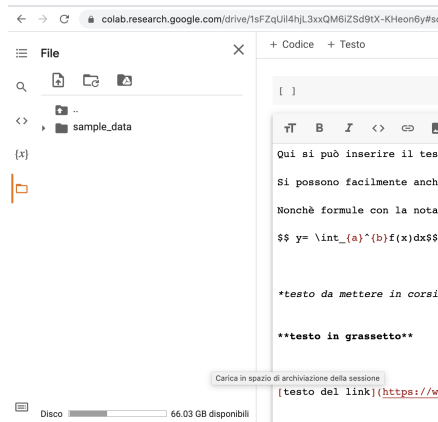
Below the code cell, the output is displayed in a scrollable area:

```
Ciao Mondo!
30
Esempio ciclo for
0
1
2
3
4
```

The interface also shows system status indicators for RAM and Disco usage, and a sidebar with icons for search, expand/collapse, and file management.

Nel blocco di codice è possibile scrivere direttamente in Python in un ambiente con già installate molte librerie Python

Caricare dati (1)



E' possibile caricare dataset, immagini dal proprio computer o accedere ai file di una cartella di google drive

Caricare dati (2)

4

```
import pandas as pd

data = pd.read_csv('https://raw.githubusercontent.com/pcm-dpc/COVID-19/master/dati-andamento-nazionale/dpc-covid19-ita-andamento-na
data.head()
```

	data	stato	ricoverati_con_sintomi	terapia_intensiva	totale_ospedalizzati	isolamento_domiciliare	totale_positivi	variazio
0	2020-02-24T18:00:00	ITA	101	26	127	94	221	
1	2020-02-25T18:00:00	ITA	114	35	150	162	311	
2	2020-02-26T18:00:00	ITA	128	36	164	221	385	
3	2020-02-27T18:00:00	ITA	248	56	304	284	588	
4	2020-02-28T18:00:00	ITA	345	64	409	412	821	

data/area di completamento: 16:22

E' possibile caricare dataset opendata da internet e mostrarli in tabella

Condividere notebook

The screenshot shows the Google Colab web interface. The browser address bar displays the URL: `colab.research.google.com/drive/1sFZqUil4hJL3xxQM6IZSd9tX-KHeon6y#scrollTo=iGiPz-7FcSAH`. The interface includes a top bar with navigation icons, a search bar, and a status bar showing RAM and Disk usage. The main content area displays a Jupyter notebook with text and code cells. Overlaid on the notebook are two sharing modal windows. The top window, titled "Condividi con persone e gruppi", allows adding people and groups, showing the user "Davide Passaro (tu)" as the owner, and includes a "Fine" button. The bottom window, titled "Copia link", provides a link to share the notebook, with a note about limitations and a "Copia link" button. The notebook content includes text like "Qui si può inserire il testo." and code like `a= 5`, `b= 17`, `c= 18.0`, and `print(a*b)`.

E' possibile infine condividere i notebook in modalità "visualizzazione" o "modifica". Ottima opzione per insegnante e studenti

Opzione alternativa a Colab: Kaggle

The screenshot displays the Kaggle Notebook interface. At the top, the notebook is titled "test1" and shows "Draft saved". The menu bar includes "File", "Edit", "View", "Run", "Add-ons", and "Help". On the right, there are buttons for "Share", "Save Version", and a version counter "0".

The left sidebar contains navigation icons: a plus sign, a search icon, a trophy icon, a document icon, a code icon, a chat icon, a graduation cap icon, and a downward arrow.

The main area shows a code cell with the following content:

```
# This Python 3 environment comes with many helpful analytics libraries installed
# It is defined by the kaggle/python Docker image: https://github.com/kaggle/docker-python
# For example, here's several helpful packages to load

import numpy as np # linear algebra
import pandas as pd # data processing, CSV file I/O (e.g. pd.read_csv)

# Input data files are available in the read-only "../input/" directory
# For example, running this (by clicking run or pressing Shift+Enter) will list all files under the input dir

import os
for dirname, _, filenames in os.walk('/kaggle/input'):
    for filename in filenames:
        print(os.path.join(dirname, filename))

# You can write up to 20GB to the current directory (/kaggle/working/) that gets preserved as output when you
# You can also write temporary files to /kaggle/temp/, but they won't be saved outside of the current session
```

Below the code cell, there are buttons for "+ Code" and "+ Markdown". The text "penso che" is followed by the equation $y = e^x$, and "ciao" is on the next line. The word "prova" is at the bottom of the code cell.

The right sidebar contains sections for "Settings", "Schedule a notebook run", "Code Help" (with a search bar "Find Code Help"), and "Search for examples of how to do this".

Opzione Kaggle analoga a Colab

L'ESPERIENZA DEL LICEO PLINIO: Alberto Bigazzi

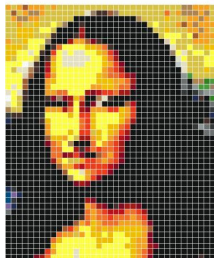
AZIONI SULLE IMMAGINI DIGITALI

I nostri Notebook

Autori: **S. FV** e **Davide Passaro** (Sapienza) insieme a:
Daniela Tondini (Univ. Teramo) e **Paolo Da Pelo** (Liceo Da Vinci, Noci (BA))

- **NB0 - Introduzione all'uso del linguaggio Python**
- **NB1 - Introduzione al calcolo vettoriale e matriciale** (con Python)
- **NB2 - Trasformazioni geometriche nel piano** (con Python)
- **NB3 - Dalla matrice all'immagine digitale e viceversa**
Pixels, immagini bitmap, in bianco/nero, scala di grigi o a colori (RGB)
- **NB4 - Manipolazione di immagini digitali**
Coperture, tagli, collage, variazioni d'intensità, transizioni tra immagini
- **NB5 - Modulo di approfondimento su elaborazioni complesse**
Filtri di convoluzione per azioni locali sui pixel: sfocamento, sharpening, edge detection, noise filtering, image compression

Dalle matrici numeriche alle immagini



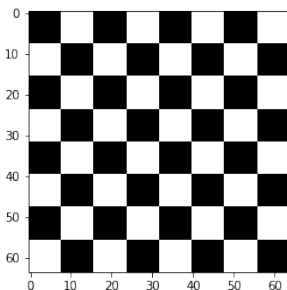
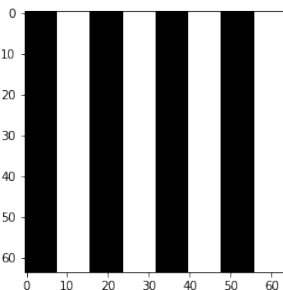
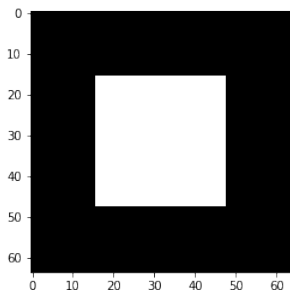
- Il punto di partenza: interpretare un'immagine digitale come una fine scacchiera di rettangolini colorati (i **pixel**) ognuno dei quali associato ad uno o più numeri interi: è quindi naturale rappresentarla e gestirla attraverso matrici aventi tante righe e tante colonne quante quelle della scacchiera dei pixel.
- Gli studenti hanno già sentito parlare di **bit e byte**: non li stupirà allora che un'immagine in scala di grigi dispone di una gamma di $2^8 = 256$ tonalità diverse tra il nero (0) e il bianco (255).

(*) immagine di N. Colonna, Scuola Media di Irsina (MT):

<https://arteimmaginelcolonna.blogspot.com/2019/10/pixel-art.html>

Primi esempi

La prima attività proposta è dunque quella di creare semplici immagini in Bianco e Nero a partire da opportune matrici binarie. Fissata la dimensione (in pixel) dell'immagine, ricavarne le matrici necessarie richiede solo un po' di pratica nella scrittura dei cicli. Opportune librerie di Python disponibili sulla piattaforma Colab permettono quindi di tradurre quelle matrici nelle immagini desiderate.

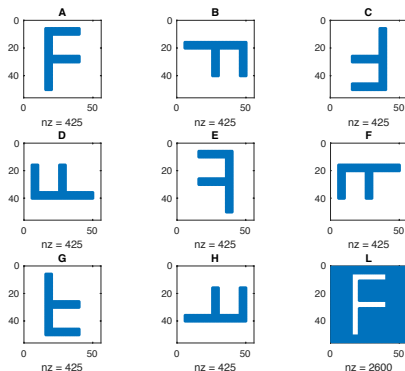


Manipolare le matrici per trasformare l'immagine

Rappresentiamo ora una lettera dell'alfabeto, la F, in nero su sfondo bianco 55x55 (un foglio a quadretti ci aiuta a costruire l'immagine).

A questo punto il semplice riordino degli elementi della matrice generatrice induce una trasformazione dell'immagine. Eccone i risultati.

Sapreste ricavare le matrici associate in funzione di quella iniziale?



Soluzioni

- B: rotazione oraria di 90° $B(i, j) = A(56 - j, i)$
- C: rotazione di 180° $C(i, j) = A(56 - i, 56 - j)$
- D: rotazione antioraria di 90° $D(i, j) = A(j, 56 - i)$
- E: simmetria asse verticale $E(i, j) = A(i, 56 - j)$
- F: trasposta di A (simmetria + rotazione antioraria 90°) $F(i, j) = A(j, i)$
- G: simmetria + rotazione di 180° $G(i, j) = A(56 - i, j)$
- H: simmetria + rotazione oraria 90° $H(i, j) = A(56 - j, 56 - i)$
- L: negativo di A $L(i, j) = 255 - A(i, j)$

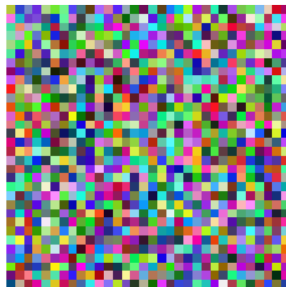
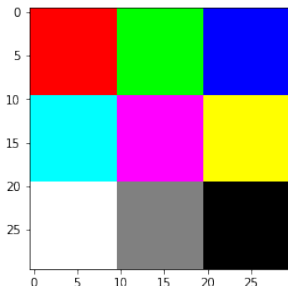
N.B. $B^T = G$, $C^T = H$, $D^T = E$.

Le immagini a colori

Richiedono solo più informazioni: servono ora tre matrici numeriche a valori interi 0-255, in grado di specificare le quantità di **Rosso**, **Verde** e **Blu** (le tre bande del comune sistema RGB) corrispondenti a ciascun pixel. Un rapido calcolo permette di cogliere la ricchezza cromatica di questa rappresentazione:

$$256^3 = 16.777.216$$

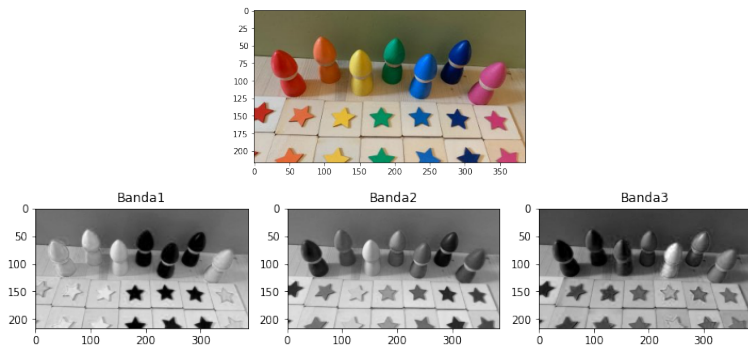
Più di 16 milioni di differenti tonalità di colore!



Dalle immagini alle matrici per intervenire su di esse

A questo punto siamo pronti per il passo opposto: presa un'immagine digitale (per es. scaricata dalla rete) ricaviamone le caratteristiche, formato di compressione, risoluzione (dimensioni in termini di pixel) e struttura numerica associata (le tre matrici del sistema a bande RGB).

formato: JPEG, dimensioni: (387, 217), tipo: RGB



Possibili interventi sulle immagini

Sono tante le idee che possono venire in mente. Ecco un primo elenco di semplici interventi a portata di mano (**trattati nei Notebook**):

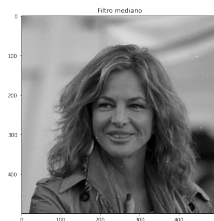
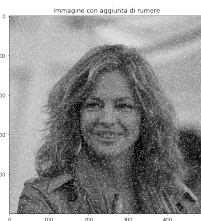
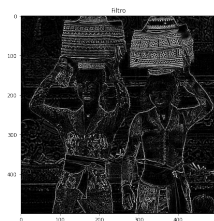
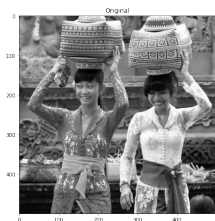
<https://colab.research.google.com/drive/1QaALU1mvubwwFmsONSUAMyDJiCCTd6-M?usp=sharing>

- Copertura parziale o ritaglio
- Collage di più immagini o parti di esse
- Rotazione dell'immagine attorno al centro
- Cambi di colore (schiarire o scurire, tutto o una singola banda)
- Conversione da RGB a scala di grigi
- La somma di immagini: transizione da un'immagine a un'altra
- La differenza di immagini (traslate di un pixel): contorni assiali

Ulteriori approfondimenti

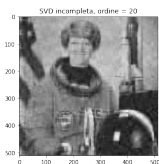
Ovviamente ci sono molte altre cose che si possono fare, con qualche approfondimento matematico, proponibili per esempio all'ultimo anno.

- **Filtri di convoluzione:** operazioni sulle matrici in grado di modificare il colore del singolo pixel in base ai valori associati ai pixel adiacenti. Con queste tecniche è possibile ad esempio
 - ▶ individuare o evidenziare i contorni (**sharpening** e **edge detection**)
 - ▶ eliminare il rumore presente (**noise filtering**)



Ulteriori approfondimenti

- La **Decomposizione ai Valori Singolari (SVD)** di una matrice è una nozione sofisticata di algebra lineare che non può essere analizzata in dettaglio al liceo: però esiste un algoritmo Python in grado di realizzarla, fornendo una tecnica di **compressione delle immagini** in grado di ridurre notevolmente la quantità di dati da memorizzare senza perdere le informazioni essenziali.



Conclusioni

I vantaggi di questa attività secondo noi sono diversi:

- facilitare un approccio algoritmico da parte degli studenti
- padroneggiare l'uso di indici di riga e colonna come variabili o coordinate in una tabella
- rendere concreto l'utilizzo di funzioni a valori discreti
- rafforzare la comprensione delle trasformazioni geometriche attraverso la visualizzazione del loro effetto
- fare pratica di strumenti informatici per il problem solving

Ovviamente i nostri sono solo alcuni spunti sul tema delle immagini digitali e su cosa si possa fare su di esse con la matematica. La sperimentazione di questo tema innovativo (già partita in alcune scuole) porterà di sicuro nuove idee, grazie alle iniziative dei singoli docenti e alla fantasia degli studenti stessi.

Bibliografia e sitografia

- R.C. Gonzalez, R.E. Woods, [Elaborazioni delle immagini digitali](#), 2008.
- L. Calatroni, [MatemaGica e Image Processing: istruzioni per l'uso](#), 2014, <https://informa.airicerca.org/it/2014/11/20/matemagica-image-processing/>
- D. Passaro, [Matematica e programmazione: usare Python al Liceo](#), Archimede: 1, 2016, <https://doi.org/10.1400/239797>
- D. Passaro, [Insegnare Matematica e Fisica utilizzando il Jupyter Notebook: Python e LaTeX per una didattica innovativa](#), Archimede: 2, 2018, <https://doi.org/10.1400/265537>
- G. Peyré, [Numerical Tour in Python on Image Processing](#), sito html, <https://www.numerical-tours.com/python/>
- [Scikit-Image](#), sito open source con algoritmi ed esempi per l'immagine processing mediante Python, <https://scikit-image.org/>
- J.E. Solem, [Programming Computer Vision with Python](#), O'Reilly 2012
- S. Dey, [Hands-On Image Processing with Python](#), Packt Publishing 2018