Questioni di aritmetica e di algebra
3 dicembre 2021

Claudio Bernardi e Alessandro Gambini

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Liceo Matematico 2021/22

una bilancia a due piatti

Mediterranean Youth Mathematical Championship (*MYMC*)
è una gara a squadre nata pochi anni fa

www.mymc.it

www.mymc.it/2019/mymc-2019.html

alla voce "*Training exercises*"
si trovano tutti i problemi assegnati nei vari anni.

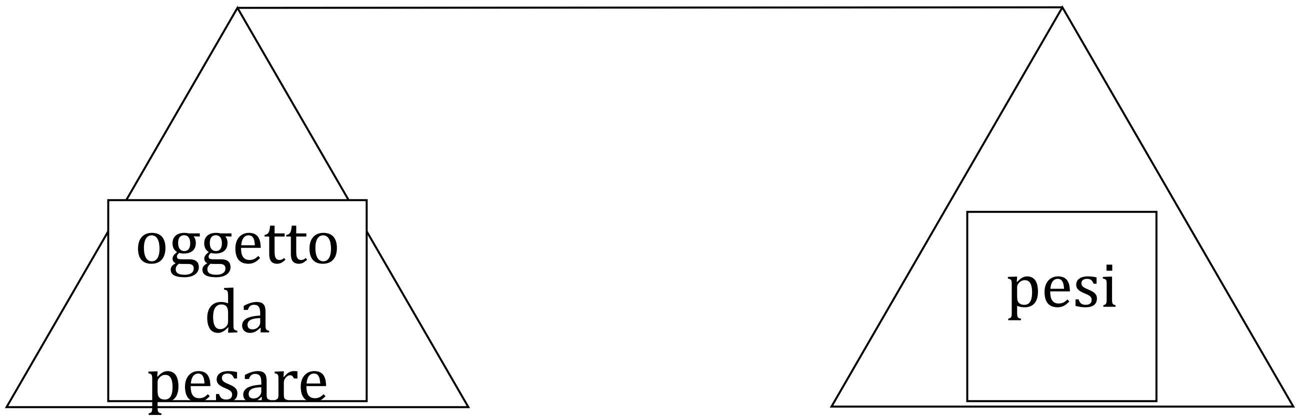
Nel *MYMC* sono assegnati problemi di difficoltà variabile,
anche problemi che si possono proporre in classe.

Vediamo un problema del 2019 che è risultato difficile,
ma si presta a discussioni e ad attività per tentativi ed errori.

una bilancia a due piatti

una bilancia a due piatti

Problema introduttivo. ***Una persona ha sei pesi con una bilancia a due piatti: su un piatto pone l'oggetto da pesare e sull'altro piatto alcuni dei sei pesi. La persona riesce così a pesare tutti gli oggetti che hanno un peso intero, da 1 libbra fino a 63 libbre. Si chiede qual è il peso in libbre dei sei pesi.***



una bilancia a due piatti

Non conviene pensare a tanti pesi tutti da una libbra, e nemmeno avere un peso per ogni numero di libbre.

È necessario un peso da **1 libbra**. Poi, per ottenere 2 libbre, abbiamo due possibilità:

o un altro peso da 1 libbra, oppure un peso da 2 libbre.

Conviene la seconda possibilità, perché, avendo a disposizione i pesi da **1 e** da **2**, se li poniamo insieme su un piatto della bilancia, riusciamo ad ottenere anche il peso 3.

Proseguiamo. Per ottenere 4 abbiamo tre possibilità:

un altro peso da 1 libbra, un altro peso da 2, un peso da 4.

Conviene l'ultima possibilità, cioè un peso da **4**,

perché riusciamo ad arrivare fino a 7 libbre.

una bilancia a due piatti

1	1	**1**
2	2	**1 0**
3	1+2	**1 1**
4	4	**1 0 0**
5	4+1	**1 0 1**
6	4+2	**1 1 0**
7	4+2+1	**1 1 1**

L’ultima colonna mette in evidenza il legame con la *numerazione binaria*.

La cifra delle unità corrisponde al peso 1, la cifra delle decine al peso 2, ecc.; scriviamo la cifra 1 se quel peso è usato il numero e scriviamo 0 in caso contrario.

una bilancia a due piatti

Proseguendo, si trovano i pesi da 8, da 16 e da 32 libbre:

con pesi da **1, 2, 4, 8, 16, 32** si ottengono tutti i pesi da 1 fino a 63 libbre. Per esempio:

$(23)_{10} = (10111)_2$ perché $23 = 16 + 4 + 2 + 1$

In generale: disponendo di n+1 pesi che corrispondono alle potenze di 2, da 2^0 a 2^n, si riescono a pesare tutti gli oggetti con un peso intero fino a un massimo di $2^{n+1} – 1$ (quest'ultimo numero si ottiene con tutti i pesi).

una bilancia a due piatti

Problema assegnato al MYMC 2019,

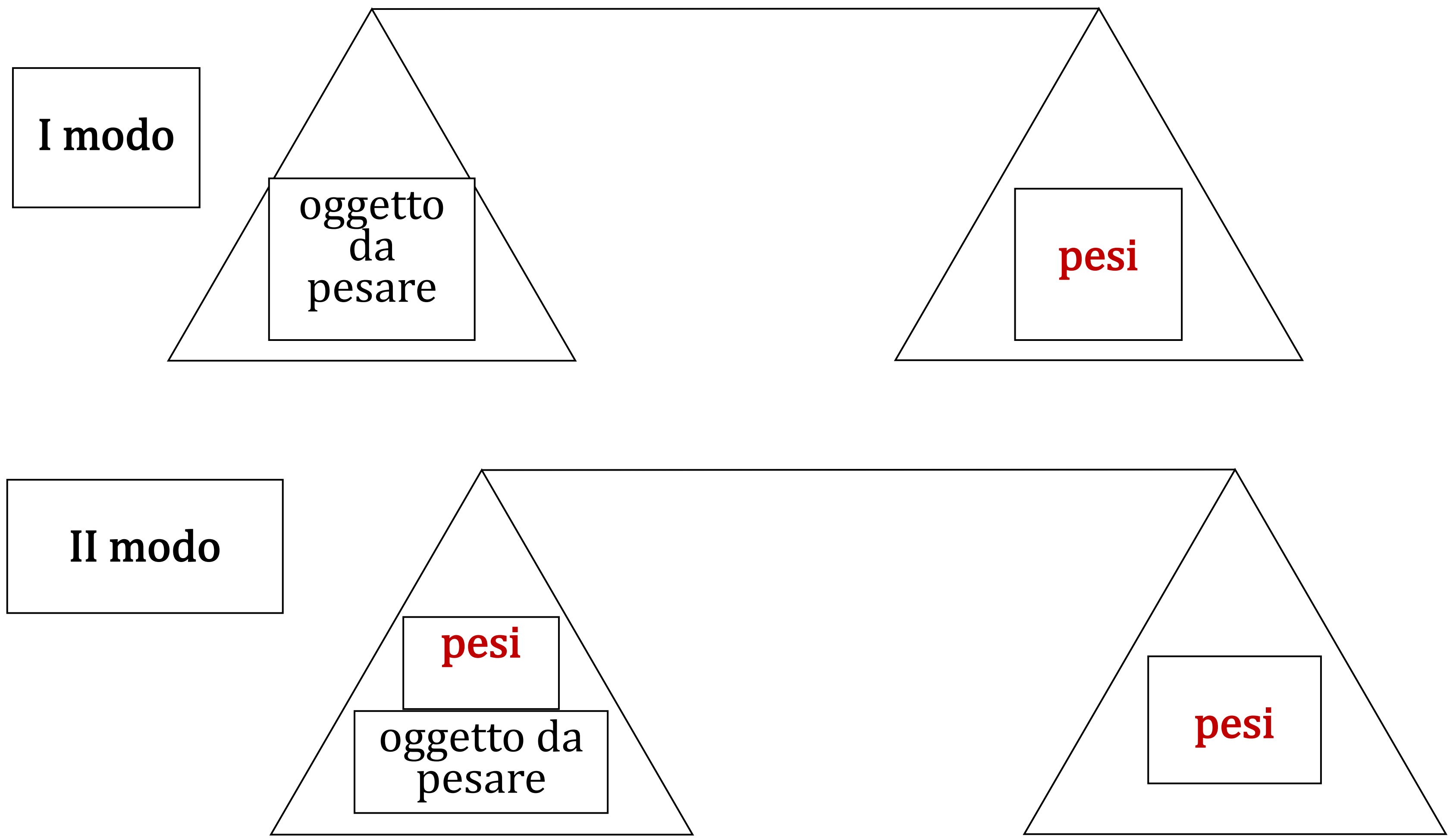
tratto dal *Liber Abaci* di Leonardo Pisano.

Una persona ha 4 pesi con cui riesce a determinare tutti i pesi interi da 1 a 40 libbre.

Si chiede di quali pesi si tratta.

Nel *MYMC* era stato aggiunto un *suggerimento* esplicito su come disporre i pesi.

una bilancia a due piatti



una bilancia a due piatti

In termini aritmetici, ora è lecito *sottrarre* i pesi.

È sempre necessario un peso da **1** libbra.

Poi conviene un peso da **3** libbre, così abbiamo:

$$1, \qquad 2 = 3-1, \qquad 3, \qquad 4 = 3+1.$$

Con il terzo peso, dobbiamo riuscire a ottenere 5.

La scelta migliore per il terzo peso è **9**, perché $5 = 9-3-1$.

Con i pesi da 1, 3, 9 si arriva fino a $1+3+9 = 13$

Proseguendo, questa volta si trovano *le potenze di* 3.

La risposta è: **1, 3, 9, 27**. In effetti, $1+3+9+27 = 40$.

una bilancia a due piatti

Ogni numero $n \leq 40 = 3^3 + 3^2 + 3^1 + 3^0$ si esprime in base 3 con al più quattro cifre.

Ma si esprime anche anche differenza di due numeri tali che:

- non contengono la cifra 2,
- non capita che nei due numeri compaia la cifra 1 nella stessa posizione.

Per esempio,

$$32 = (1012)_3 = (1100)_3 - (11)_3 = 36 - 4.$$

sulla numerazione in base 3

Normalmente si usano le cifre **0, 1, 2**. Ma potremmo usare le cifre **0, 1, –1**. Indichiamo quest'ultima cifra con il simbolo $\bar{1}$.

0	0	**0**	
1	1	**1**	
2	2	**$1\bar{1}$**	(= 3 – 1)
3	10	**10**	
4	11	**11**	
5	12	**$1\bar{1}\bar{1}$**	(= 9 – 3 – 1)
6	20	**$1\bar{1}0$**	
7	21	**$1\bar{1}1$**	
8	22	**$10\bar{1}$**	
9	100	**100**	

tagli di monete e banconote

Se avessimo una ***monetazione*** basata sulle potenze di 2, potremmo pagare un qualunque prezzo *con monete tutte diverse fra loro*, in uno e un solo modo.

Con una monetazione basata sulle potenze di 3, potremmo pagare un qualunque prezzo con *monete tutte diverse fra loro*, ma prevedendo anche un *resto* a sua volta formato da *monete diverse fra loro*

(sempre in uno e un solo modo)

tagli di monete e banconote

euro	**dollaro USA**
1 centesimo	1 centesimo
2 centesimi	
5 centesimi	5 centesimi
10 centesimi	10 centesimi (*dime*)
20 centesimi	25 centesimi (*quarter*)
50 centesimi	[*50 centesimi (half dollar)*]

Questioni di Aritmetica e Algebra

Approccio alla ricerca in matematica in ambito aritmetico

Partiamo da un problema non noto e «facciamo ricerca» considerando varie fasi:

- Definizione del problema
- Euristica/Esplorazione
- Tentativi di diverse rappresentazioni
- Problem solving
- Argomentazione e dimostrazione
- Generalizzazione e applicazioni ad altri casi

Partizioni di interi

Cosa sono? (definizione)

Dato n intero positivo, p(n) è il numero di modi di scrivere n come somma di interi positivi (non necessariamente distinti e senza tenere conto dell'ordine):

n	partizioni	p(n)
1	1	1
2	1+1, 2	2
3	1+1+1, 2+1, 3	3
4	1+1+1+1, 1+1+2, 2+2, 1+3, 4	5
5	…	7

Probabilmente introdotte da Leibniz nel 17° secolo. Eulero ne pubblica un libro nel 1748. Esiste qualcosa sulle partizioni nell'antichità?

Partizioni di interi

Quanto vale p(n) ? Un po' di storia…

Fino a un secolo fa non si pensava fosse possibile trovare una «formula» per p(n).

Hardy e Ramanujan pubblicarono una formula asintotica nel 1918, successivamente migliorata da altri matematici.

$$p(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} \exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right) \text{ as } n \to \infty$$

Nel 2011 il matematico Ken Ono, sfruttando i lavori di Ramanujan, trova degli schemi di tipo frattale nei numeri di partizione, riuscendo a calcolare p(n) con una somma finita di termini: https://www.wired.com/2011/01/partition-numbers-fractals/

(Hidden fractals suggest answer to ancient math problem)

Partizioni di interi

Tante possibili varianti: p(n | «quache condizione»)

p(n | parti distinte)

n	partizioni	p(n)
1	1	1
2	2	1
3	2+1, 3	2
4	1+3, 4	2

p(n | parti dispari)

n	partizioni	p(n)
1	1	1
2	1+1	1
3	1+1+1, 3	2
4	1+1+1+1, 1+3	2

Sembrano lo stesso numero. Potrebbe valere per ogni n?

Si potrebbe andare avanti…

Partizioni di interi

Continuiamo l'elenco (euristica/esplorazione)

p(n | parti distinte)

n	partizioni	p(n)
5	1+4, 2+3, 5	3
6	1+5, 2+4, 1+2+3, 6	4
7	1+6, 2+5, 3+4, 1+2+4, 7	5
…		

p(n | parti dispari)

n	partizioni	p(n)
5	1+1+1+1+1, 1+1+3, 5	3
6	1+1+1+1+1+1, 1+1+1+3, 3+3, 1+5	4
7	1+1+1+1+1+1+1, 1+1+1+1+3, 1+1+5, 1+3+3, 7	5
…		

Si potrebbe implementare un algoritmo per verificarlo per n grande.

Congettura: p(n | parti distinte) = p(n | parti dispari)

Partizioni di interi

Non siamo in grado di calcolare esplicitamente nessuna delle due.

Come si procede?

Problem solving

Siamo interessati a dimostrare: *p(n | parti distinte) = p(n | parti dispari)*

Se fossimo in grado di calcolarli avremmo risolto il problema ma ciò andrebbe ben oltre quello che vogliamo dimostrare.

Ci basta dimostrare che i due insiemi sono in corrispondenza biunivoca.

Ad esempio per n=5 come posso mettere le relative partizioni in biiezione?

1+4	1+1+1+1+1
2+3	1+1+3
5	5

Idee?

Partizioni di interi

Argomentazione

Nelle partizioni in **parti distinte** ogni numero pari si può scomporre nella somma di due numeri, che a loro volta, se sono pari possono essere ulteriormente scomposti e così via fino ad ottenere solo numeri dispari.

In ogni partizione in **parti dispari**, ogni volta che un numero appare due volte posso «accoppiarlo» e creare un altro numero. Posso iterare il procedimento con la somma ottenuta.

Merge and split

1+4 → 1+(2+2) → 1+(1+1)+(1+1) Viceversa 1+1+1+1+1 → 2+2+1 → 4+1

2+3 → (1+1)+3 1+1+3 → 2+3

5 <---> 5

Ho creato una corrispondenza biunivoca

Partizioni di interi

Non è ancora una dimostrazione

In letteratura si trovano dimostrazioni che utilizzano le «funzioni generatrici» anche se il problema è stato dimostrato da Eulero che non aveva a disposizione questi strumenti.

Si possono usare altre idee, ad esempio:

Ogni partizione in parti dispari si può scrivere

$$1 \cdot (2^{k_{11}} + \cdot 2^{k_{12}} + \cdots) + 3 \cdot (2^{k_{21}} + 2^{k_{22}} + \cdots) + 5 \cdots$$

Sfruttando il fatto che ogni numero si può scrivere in modo univoco come somma di potenze di 2…

Viceversa…

Partizioni di interi

Generalizzazione

Si può generalizzare la tecnica del *merge and split*?

Cioè, dati due insiemi A e B si può sempre creare una corrispondenza biunivoca tra

p(n | parti in A) = p(n | parti distinte in B) ?

Nel caso precedente A= *numeri dispari* e B=*numeri naturali*

Partendo da un caso banale:

A cosa corrisponde **p(n | parti in {1})** ?

Partizioni di interi

Applicazione della tecnica ad altri casi

p(n | parti in {1}) = 1 per ogni n naturale.

Infatti ogni n si può scrivere solo come somme di «1».

Applichiamo la tecnica merge and split:

1+1+1+1+1+1+1 → 2+2+2+1 → 4+2+1

1+1+1+1+1+1+1+1+1+1 → 2+2+2+2+2 → 4+4+2 → 8+2

…

Costruiamo a destra una partizione in parti distinte con sole potenze di 2.

Quindi **p(n | parti in {1,2,4,8,…})=1** per ogni n naturale

Abbiamo «ri-dimostrato» che ogni numero naturale si può scrivere in modo univoco come somma di potenze di 2.

Partizioni di interi

Altri tipi di generalizzazione

Si può applicare la tecnica del merge and split con delle triple?

E delle n-uple in generale?

Sfruttando le triple si può far vedere che:

$p(n \mid \text{parti non divisibili per } 3) = p(n \mid \text{in cui ogni parte compare al più } 2 \text{ volte})$

Partizioni di interi

Limiti della tecnica (nel caso delle coppie)

Funziona per qualunque scelta dell'insieme A (o B) da cui parto?

Esistono situazioni «ambigue»?

Consideriamo **p(n | parti in {1,3,6})** e le seguenti partizioni di 12:

3+3+3+3

6+6

Applicando merge and split:

3+3+3+3 → 6+6 → 12

6+6 → 12

Si perde la biiezione. Perché?

Partizioni di interi

Limiti della tecnica

Se non posso costruire la biiezione con *merge and split* significa che non esiste nessuna biiezione tra

p(n | parti in {1,3,6}) e **p(n | parti distinte in B)** ?

n	1	2	3	4	5	6
p(n | parti in {1,3,6})	**1**	**1**	**2**	**2**	**2**	**4**

Implementiamo un algoritmo che costruisca B. Inizialmente B è vuoto

- Esiste una partizione di 1, quindi l'elemento «1» va aggiunto a B
- Esiste una partizione di 2. Non abbiamo nessuna partizione in parti distinte di 2 usando B, quindi 2 va aggiunto a B
- Esistono due partizioni di 3. Con gli elementi attuali in B ne possiamo costruire solo una in parti distinte (1+2) quindi «3» va aggiunto a B

Partizioni di interi

Limiti della tecnica

p(n | parti in {1,3,6}) e **p(n | parti distinte in B)** ?

n	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
p(n | parti in {1,3,6})	**1**	**1**	**2**	**2**	**2**	**4**

In questo momento B={1,2,3}

- Esistono due partizioni di 4. Con gli elementi attuali in B ne possiamo costruire solo una, (3+1), quindi «4» va aggiunto a B.
- Esistono due partizioni di 5. Con gli elementi attuali possiamo costruire due partizioni distinte (1+4) e (3+2). Quindi «5» **non** deve essere aggiunto a B.
- Esistono quattro partizioni di 6. Con gli elementi attuali in B ne possiamo costruire solo due in parti distinte (4+2) e (1+2+3). Aggiungere «6» a B non basta.

Game over

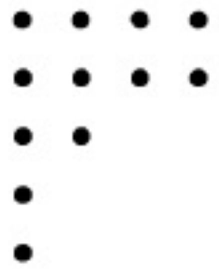
Partizioni di interi

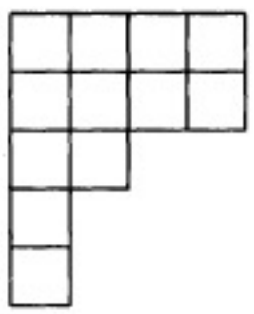
Esiste una sola tecnica per creare delle biiezioni?

No, però per cambiare punto di vista può essere utile un **cambio di rappresentazione**

Dal registro aritmetico al registro grafico (*grafici di Ferrers o diagrammi di Young*)

Ad esempio la partizione di 12= 4+4+2+1+1 la possiamo anche rappresentare così:





Partizioni di interi

Ora sono trasparenti identità che con la rappresentazione precedente erano opache.

Ad esempio:

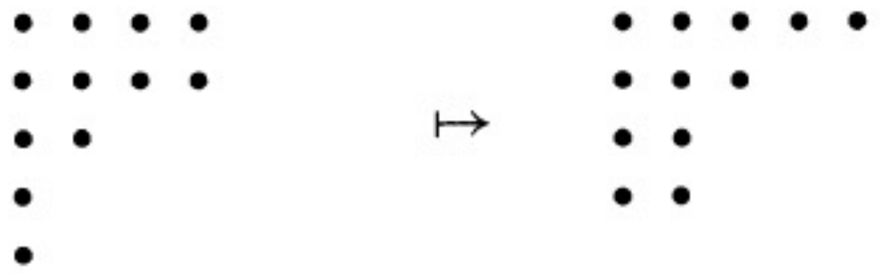
Se traspongo righe e colonne trovo una biiezione:

4+4+2+1+1 → 5+3+2+2 e viceversa.

Non è esprimibile con merge and split e non è *visibile* nel registro aritmetico.

Come la esprimo?

Partizioni di interi



Le righe rappresentano il numero di parti.

Le colonne rappresentano la parte più grande.

p(n | x parti) = p(n | la parte più grande è x)

Questa trasformazione si chiama ***coniugazione***.

Partizioni di interi

Sfruttando la coniugazione si possono «vedere» altre biiezioni. Ad esempio le partizioni in parti distinte non sono in corrispondenza biunivoca solo con quelle in parti dispari (merge and split) ma anche:

p(n | parti distinte) = p(n | in cui compaiono tutte le parti da 1 alla più grande)

(se inverto righe e colonne di un grafico a parti distinte otterrò come addendi tutti i numeri da 1 a k, eventualmente ripetuti, dove k è la massima parte presente).

Partizioni di interi

Posso mettere in corrispondenza biunivoca le partizioni di due numeri distinti?

Riprendiamo la partizione di 12 e togliamo la prima riga (che corrisponde all'elemento più grande):

Che tipo di identità ho costruito?

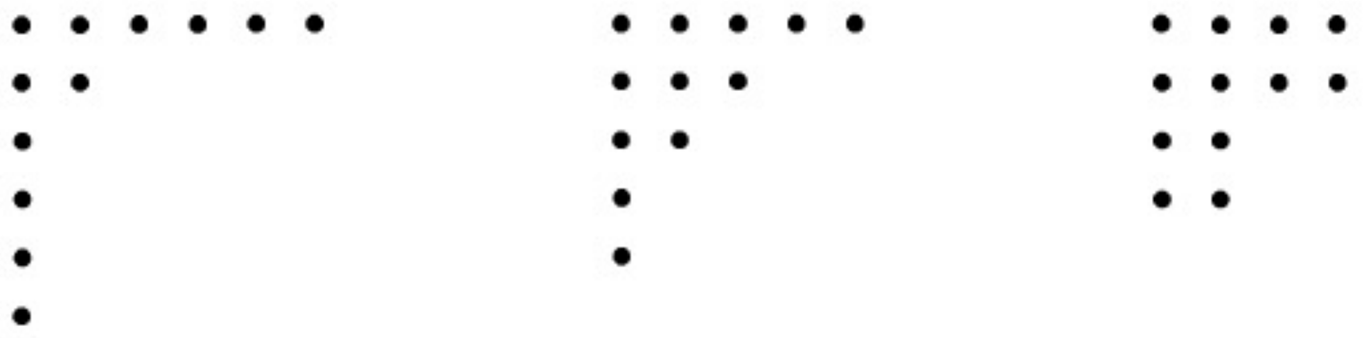
p(n | in cui k è la parte più grande) = p(n-k | in cui tutte le parti sono <= k)

Partizioni di interi

Ulteriori esplorazioni

E se tolgo la prima colonna?

E se considero solo le rappresentazioni *autoconiugate,* cioè quelle che coniugate sono uguali a se stesse?



Partizioni di interi

Recentemente lo studio delle partizioni ha trovato applicazione (non banale) in meccanica quantistica, meccanica statistica e anche in genetica.

Entrano in gioco in processi stocastici discreti come quello del *«Ristorante Cinese»*

https://en.wikipedia.org/wiki/Chinese_restaurant_process

(ristorante con infiniti tavoli circolari con infiniti posti ad ogni tavolo…)

o alla *formula del campionamento di Ewens* legata a processi stocastici in ambito genetico

https://en.wikipedia.org/wiki/Ewens%27s_sampling_formula

Bibliografia:

Andrews, G. E., & Eriksson, K. (2004). *Integer partitions*. Cambridge University Press.

Il calendario e i giorni della settimana

Ci sono 365 giorni in un anno **365 : 7 = 52 con il resto di 1**

Quindi in un anno ci sono 52 settimane più un giorno.

Oggi è **venerdì 3 dicembre 2021**,

l’anno prossimo il 3 dicembre cadrà di *sabato*

Rivediamo rapidamente la riforma del *calendario*.

Il ***calendario giuliano*** fu promulgato da Cesare nel 46 a.C.

su indicazioni dell'astronomo Sosigene di Alessandria.

Si prevedeva che *ogni* 4 *anni ci fosse un anno bisestile*.

Il calendario e i giorni della settimana

Nel 1582 il calendario giuliano fu sostituito dal ***calendario gregoriano*** con la bolla *Inter gravissimas* di Papa Gregorio XIII.

Un anno in effetti dura circa **365,2422** giorni

(*come definiamo un anno*? si può far riferimento all'*equinozio*, momento in cui il Sole passa per il piano dell'Equatore)

Nel calendario giuliano si assumeva come durata di un anno fosse 365,25 giorni.

Il calendario e i giorni della settimana

Per riportare l'equinozio di primavera al 21 marzo nel 1582 sono stati saltati 10 giorni

ne in posterum a XII Kalendas Aprilis aequinoctium recedat, statuimus ...

L'equinozio di primavera è importante per stabilire la data della Pasqua: nel Concilio di Nicea (325 d.C.) fu stabilito che Pasqua è ***la prima domenica successiva al primo plenilunio di primavera*** (cioè dopo l'equinozio, che cade convenzionalmente il 21 marzo)

Il calendario e i giorni della settimana

Gli anni divisibili per 4 sono bisestili

ma si introducono eccezioni:

- *gli anni secolari non sono bisestili,*
- *ma gli anni divisibili per* 400 *sono bisestili.*

In questo modo, ci sono **97** anni bisestili ogni **400** anni
Durata media di un anno: **365,2425** giorni

Nella nostra epoca gli anni bisestili sono *tutti e soli* quelli multipli di 4: le eccezioni più vicine sono il 1900 e il 2100, non bisestili.

Il calendario e i giorni della settimana

L'Unione Sovietica adottò il calendario gregoriano nel 1918,

ma nel 1923 modificò la formula per decidere quali anni centenari fossero bisestili (***Calendario rivoluzionario sovietico***):

tra gli anni divisibili per 100 sono bisestili solo quelli che divisi per 9 danno come resto 2 o 6

(il resto della divisione per 9 si trova sommando le cifre).

Il primo anno di discordanza con il calendario gregoriano sarebbe stato il 2800. Ma già dal 1940 il Calendario rivoluzionario sovietico fu abbandonato.

Il calendario e i giorni della settimana

Se un bambino nasce oggi, venerdì 3 dicembre 2021, a quale età festeggerà per la prima volta il suo compleanno di venerdì?

Se un bambino è nato giovedì 3 dicembre 2020, a quale età festeggerà per la prima volta il suo compleanno di giovedì?

Se un bambino è nato martedì 3 dicembre 2019, a quale età festeggerà per la prima volta il suo compleanno di martedì?

A quale età capita di festeggiare per la prima volta il compleanno nel giorno della settimana in cui uno è nato?
[ci sono varie possibilità]

Il calendario e i giorni della settimana

2018	**lunedì**	**2024**	**martedì**
2019	**martedì**	2025	mercoledì
2020	giovedì	2026	giovedì
2021	**venerdì**	**2027**	**venerdì**
2022	sabato	2028	domenica
2023	domenica	**2029**	**lunedì**

Il calendario e i giorni della settimana

C'è un'età in cui *tutti* festeggiano il loro compleanno nello stesso giorno della settimana in cui sono nati?

La risposta è ...

metodo di Gauss per la data della Pasqua

resto (n : 19) × 19 + 24,   poi resti di altre divisioni ecc. ecc.

esempio: $n = 2022$ 17 aprile

ciclo di Metone di 19 anni: 19 anni corrispondono quasi esattamente a un numero intero (235) di mesi lunari.