

# **Indecidibilità Algoritmica e Auto-referenza**

**Seminario per Docenti del Liceo Matematico**

---

**Lorenzo Carlucci - Sapienza - 31 Marzo 2023**

# Perché i programmi falliscono?



**Il comportamento dei programmi è prevedibile  
(da altri programmi)?**



# Diciottesimo compleanno

**Ruby Rubacuori**



# Piccole Donne crescono...

**Noemi Letizia**



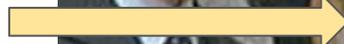
# Il Diciottesimo di Noemi

Noemi

Silvio



Arianna



Benedetto

# Il Fotografo



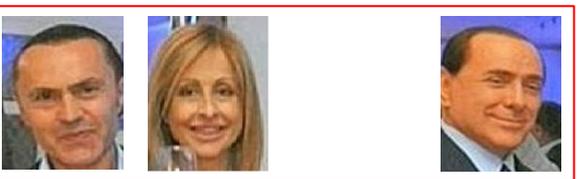
**Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716)**

# # Tutte le foto possibili > # Tutti gli invitati



**Etc.**

# Ogni invitato sceglie una foto ricordo...



# Trovare una foto mancante (senza contare) #1

- Estraggo le foto scelte da tutte le foto possibili....
- Estraggo una delle rimanenti

**Informazione Completa!**



# Trovare una foto mancante (senza contare)

**Domanda:** chi è egocentrico?

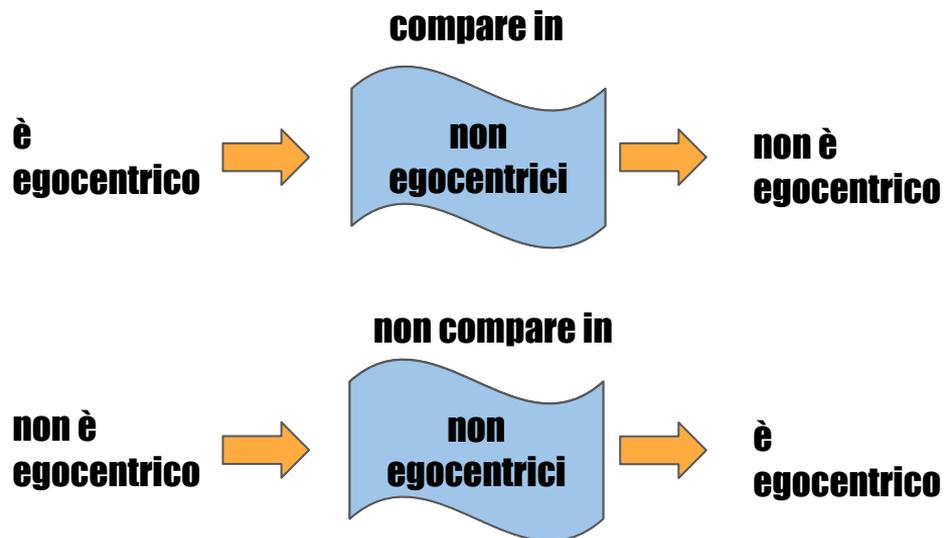


**Manca la foto  
dei non  
egocentrici!**

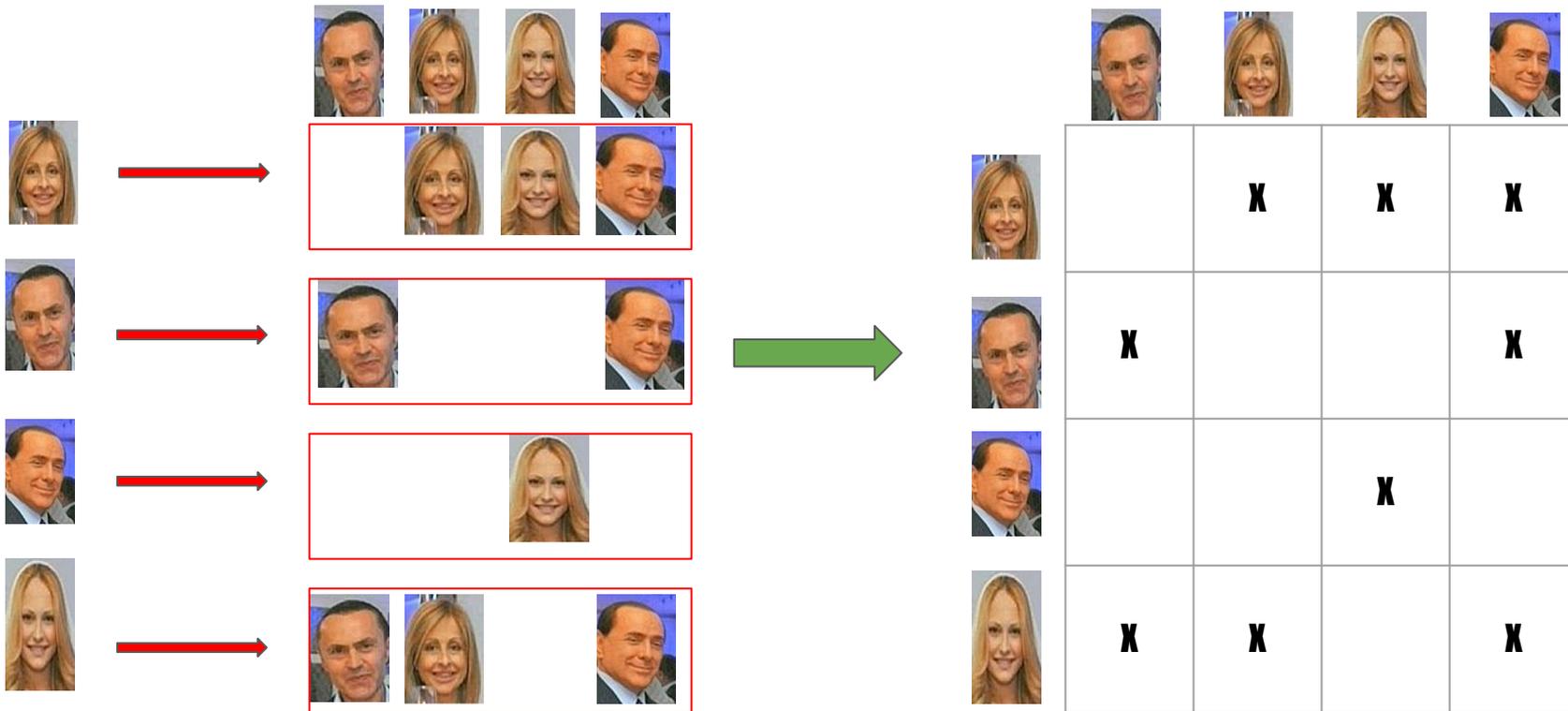


**Mancante!**

# Perché non è stata scelta? (To be AND not to be...)



# Trovare una foto mancante (senza contare)#3



# Trovare una foto mancante (senza contare) #3



	X	X	X
X			X
		X	
X	X		X



X	X	X	X
X	X		X
X	X		



**Mancante!**

**Manca la foto  
della  
Diagonale  
Invertita**

# Diagonalizzazione = Auto-referenza

				
	X			X
		X	X	X
	X	X		X
			X	

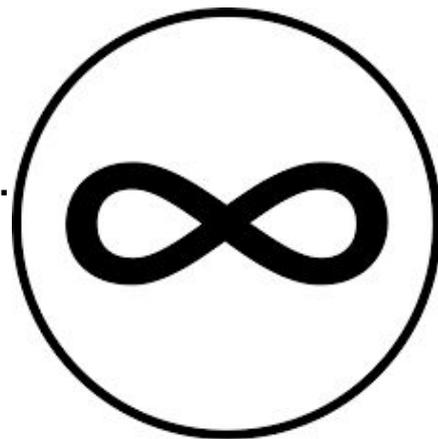
**Diagonale Invertita**  
=  
**Non Egocentrici**



# Never Ending Party

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	■												
2		■											
3			■										
4				■									
5					■								
⋮						■							
⋮							■						
⋮								■					

**Funziona!**  
**La Diagonale Invertita**  
**non è nella Tabella!**



# Esercizi di Fisiognomica

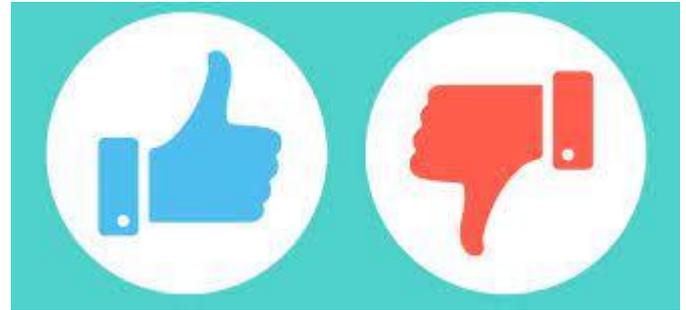
Posso **prevedere** il comportamento di una persona dalle sue caratteristiche fisiche?



**Cesare Lombroso (1835-1909)**

# Like it or not

Posso **prevedere**,  
guardando la foto di A e la foto di B,  
se A mette LIKE o DISLIKE a B?

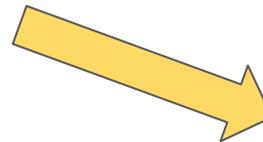
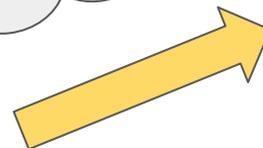
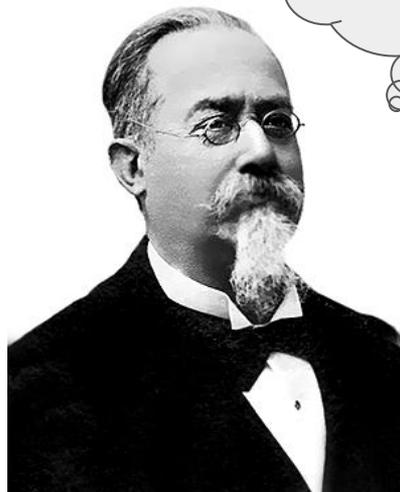




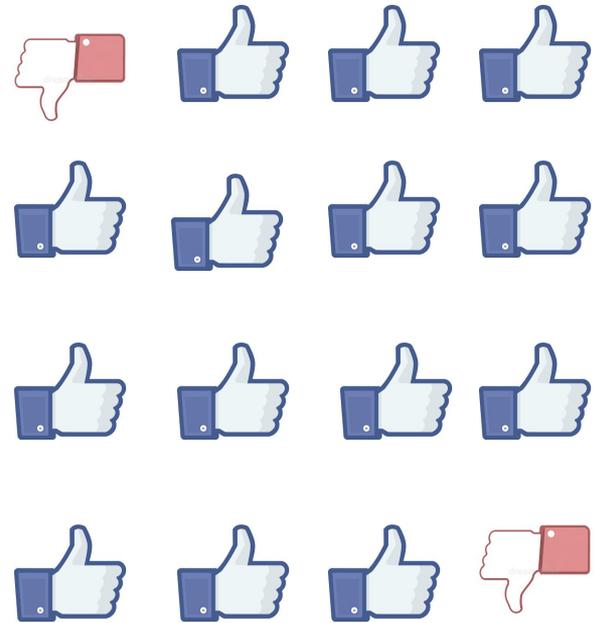
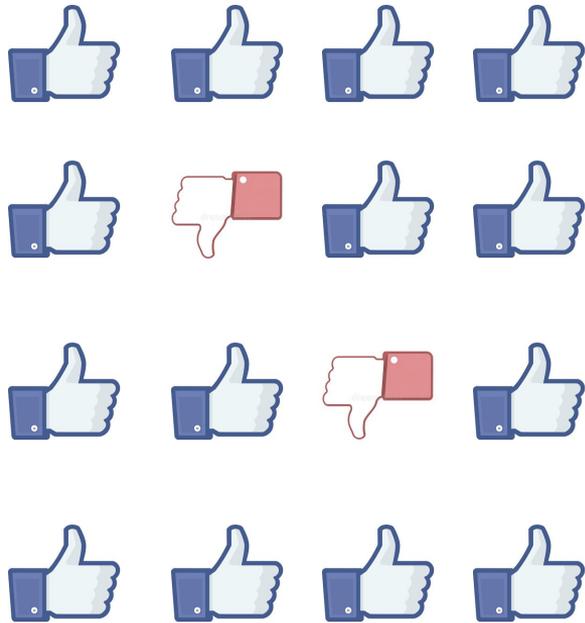




# Il Mago Cesare



# Problemi con la Diagonale

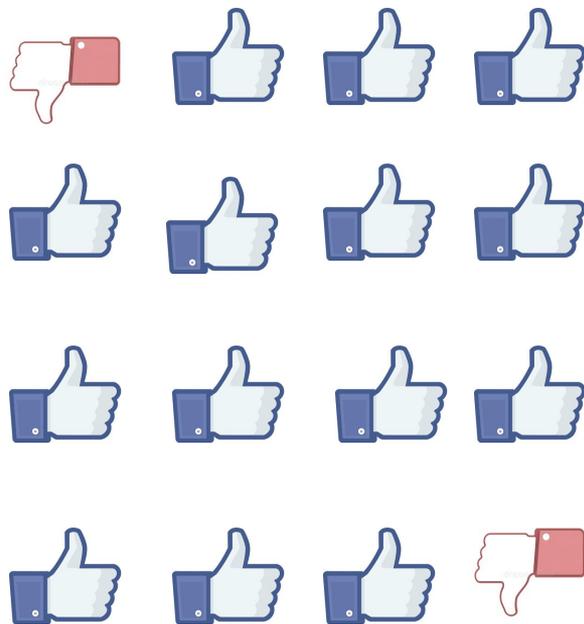


# Problemi con la Diagonale

La Diagonale Invertita **non appartiene alla Tabella.**

Dunque la tabella **non contiene tutti i possibili comportamenti.**

Restringiamo la nostra attenzione **solo ad alcuni comportamenti**, i comportamenti delle Persone Semplici.



# Persone Semplici

**Assunzione 1:** Il comportamento di una Persona Semplice può essere emulato.

**Assunzione 2:** Si possono contare tutte le **Persone Semplici** usando i numeri naturali 1, 2, 3, 4, ...

**Assunzione 3:** Ogni persona semplice ha accesso a una lista delle foto di tutte le **Persone Semplici** (Facebook).

Ma in base a  $1+3$  lo è!

**Aut Aut:**

La **Diagonale Invertita** non è una **Persona Semplice!**

**oppure**

La lista non contiene tutte le **Persone Semplici!**

Ma in base a 2 le contiene!

# Le Persone Semplici possono essere indifferenti

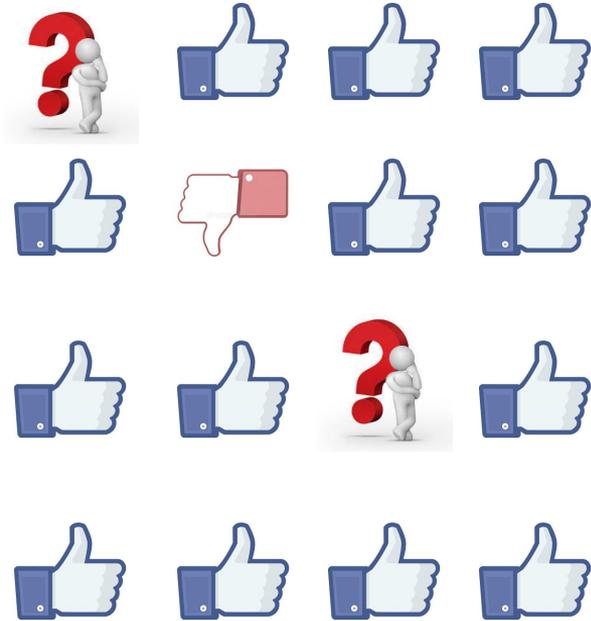


**Giudicano (entro un tempo finito)**



**Non giudicano**

# Chi va con lo zoppo impara a zoppicare...



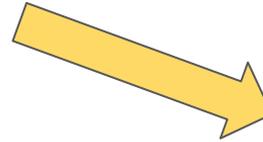
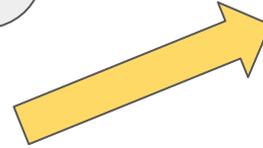
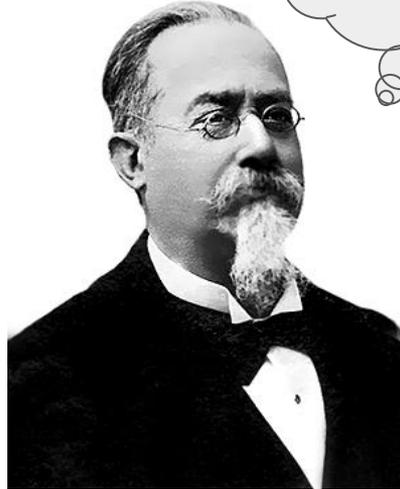
**Emulare indifferenza  
è essere indifferenti**



**La Diagonale Invertita  
non è una Persona Semplice!**

**Non è un problema!**

# Il Mago Cesare



# Meet Diago



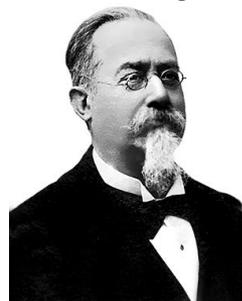
**I am not what I am**

# Diago si comporta così: chiede a Cesare e fa il contrario!

Giudico  
Salvini?



Salvini  
giudica  
Salvini?



YES

NO

Comportamento  
di Diago:





X

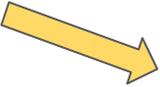
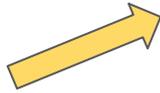
Giudico  
X?

X

X



X  
giudica  
X?



YES

NO



# Diago manda in crisi il Mago Cesare

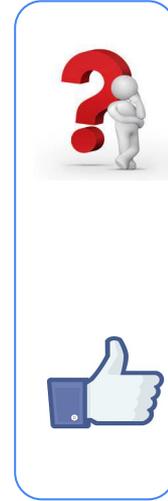
Giudico Diago?



Diago giudica Diago?

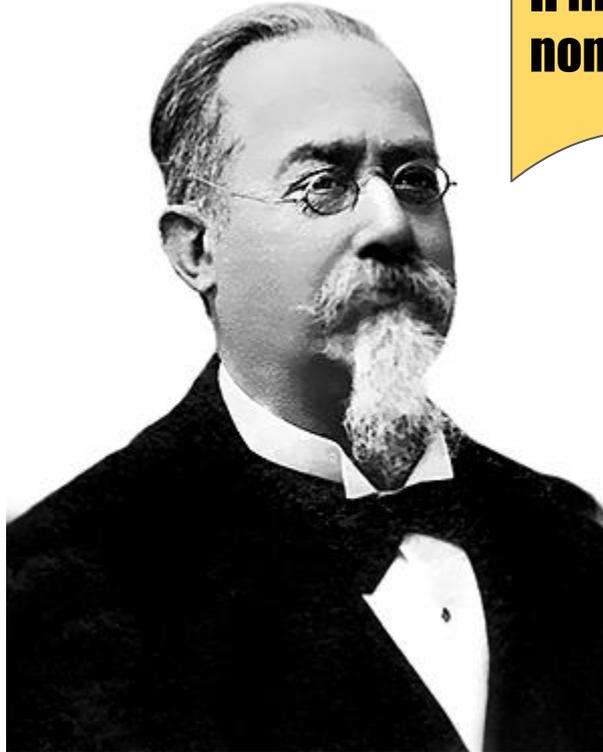


Comportamento di Diago su Diago



Comportamento predetto da Cesare

**Cosa concludere?**

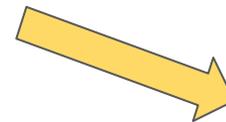
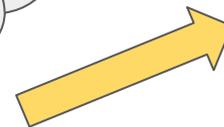
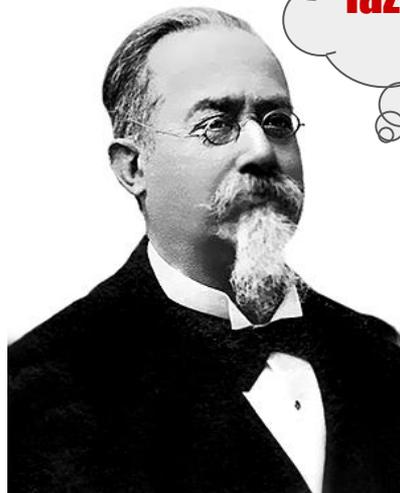


**Il mago Cesare  
non è una Persona Semplice!**

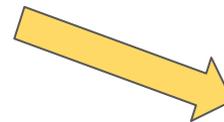
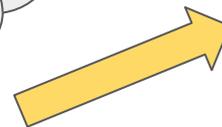
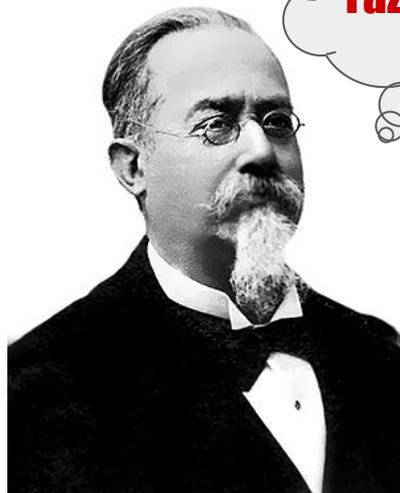


**Auto-Confutazione  
della  
Fisiognomica!**

# Cesare ci riprova

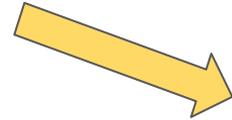
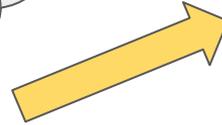
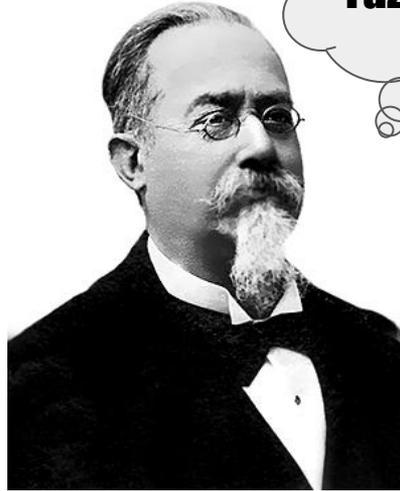


# Cesare ci riprova



# Cesare ci riprova

**X**



# Role models



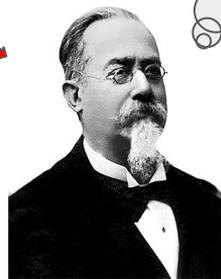
**Martin Luther King**



**David Duke**

# Diago 2.0

Come mi comporto con Meloni e Darboe?



Meloni è razzista?

YES

NO

Mi comporto come



con



Mi comporto come



con



# Diago 2.0



X

Y



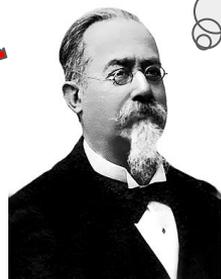
YES

NO



# Diago è razzista?

Come mi comporto con Diago e Darboe?



Diago è razzista?

YES

NO

Mi comporto come



con



Mi comporto come



con

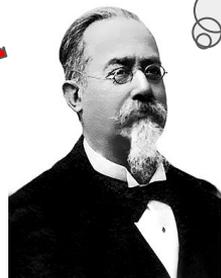


# Diago è razzista?

Come mi comporto con Diago e Darboe?



Y



Diago è razzista?

YES

NO

Mi comporto come



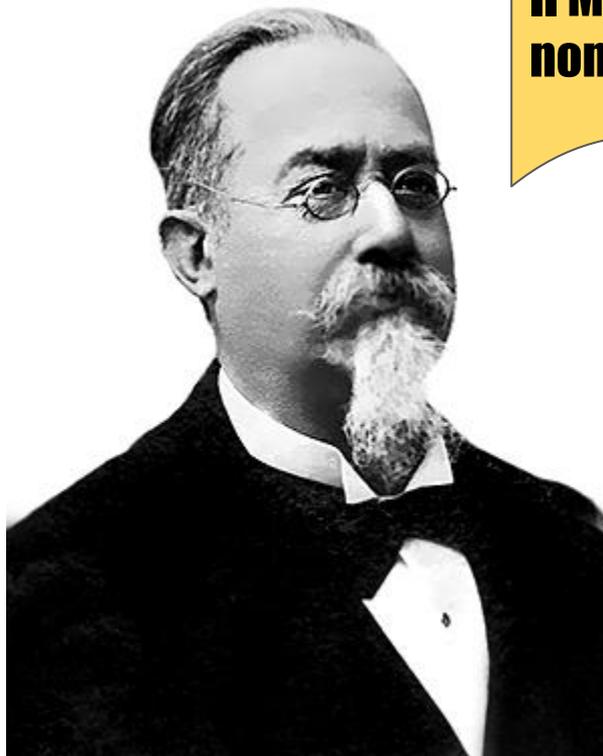
con Y

Mi comporto come



con Y

**Cosa concludere?**



**Il Mago Cesare 2.0  
non è una Persona Semplice!**

# Persone Semplici = Programmi

**Assunzione 1:** Un programma può emulare il comportamento di un altro programma su un input arbitrario.

**Assunzione 2** I programmi sono tanti quanti i numeri naturali.

**Assunzione 3** Un programma può consultare una lista di tutti i programmi.

**Basta eseguirlo!**

**I programmi sono liste finite di istruzioni**

**Si possono generare tutte le liste di istruzioni**

# Tirando le fila...

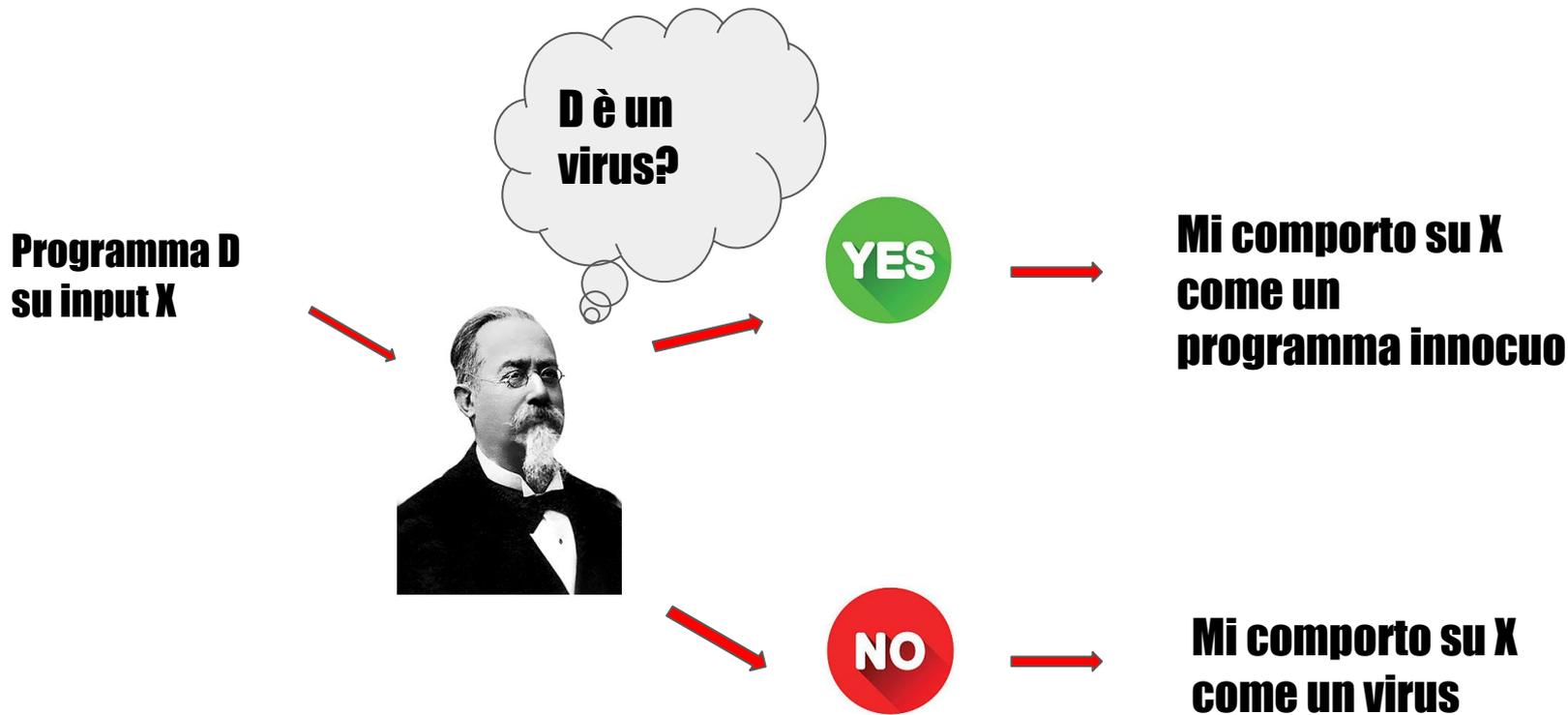
**Teorema 1.** Non è possibile che tutti i programmi diano una risposta su tutti gli input.

**Teorema 2.** Non esiste un programma che prevede se un programma su un input dà una risposta o no.

**Teorema 3.** Nessuna proprietà non-banale del comportamento input/output di un programma può essere prevista correttamente da un programma.



# Non esiste un antivirus universale



**Il programma D (come Diago) è autoreferenziale!**

# Autoreferenzialità inevitabile

**Teorema di Kleene:**

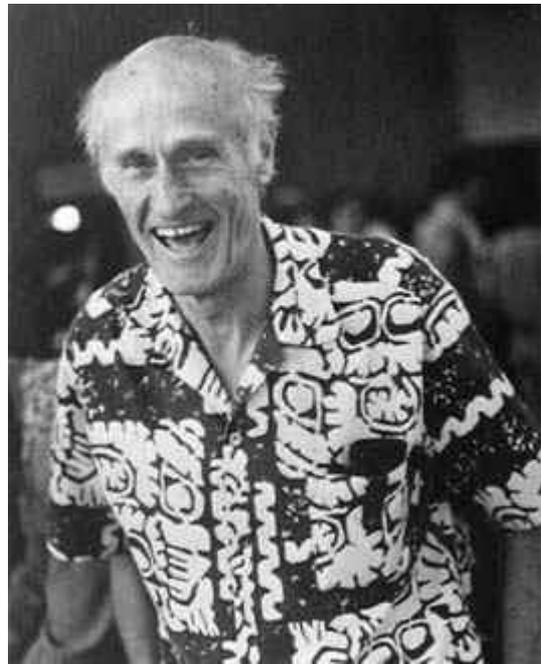
Per ogni programma **P**

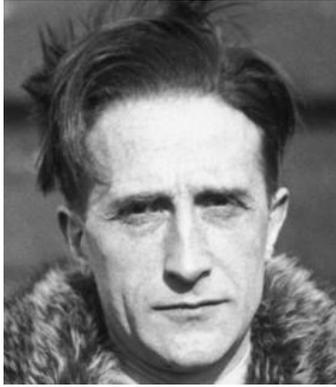
Esiste un programma **A** che si comporta così:

Su un input **X**,

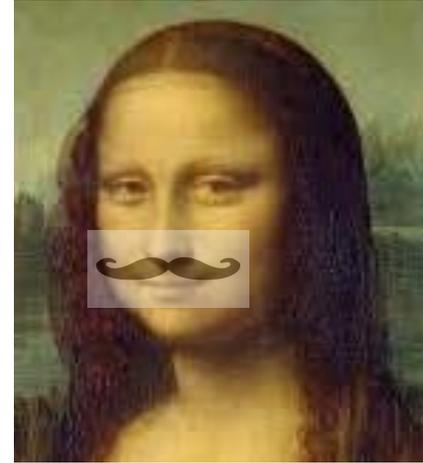
**A** emula **P** su input **A** e **X**.

$$A(X) = P(A, X)$$





## Il Programma Duchamp





## Il Programma Duchamp

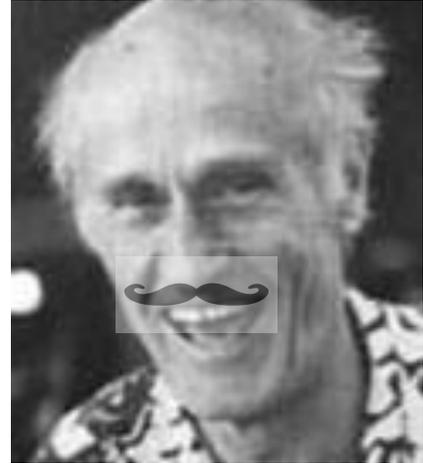
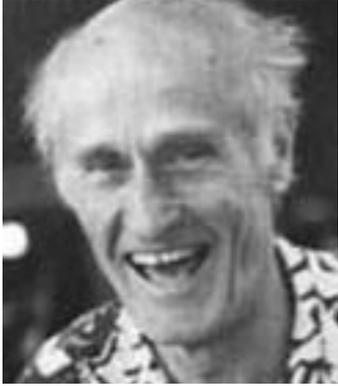




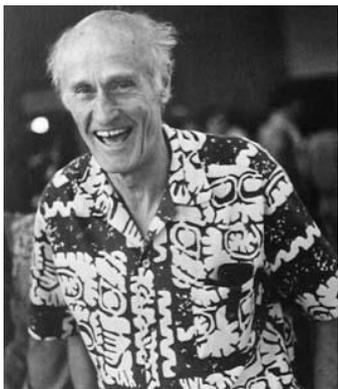
## Il Programma Duchamp

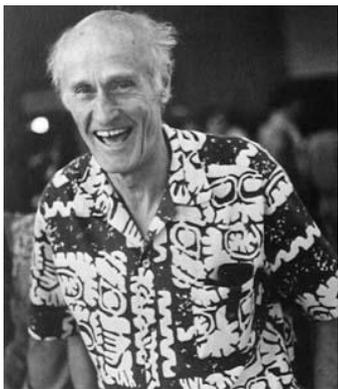


## Il Kleene di Duchamp

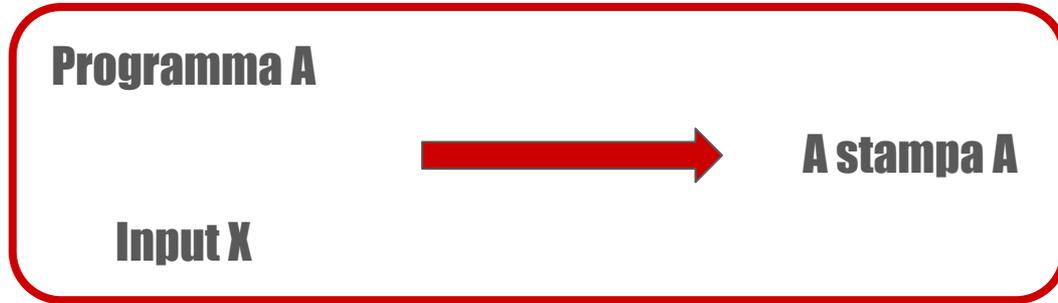
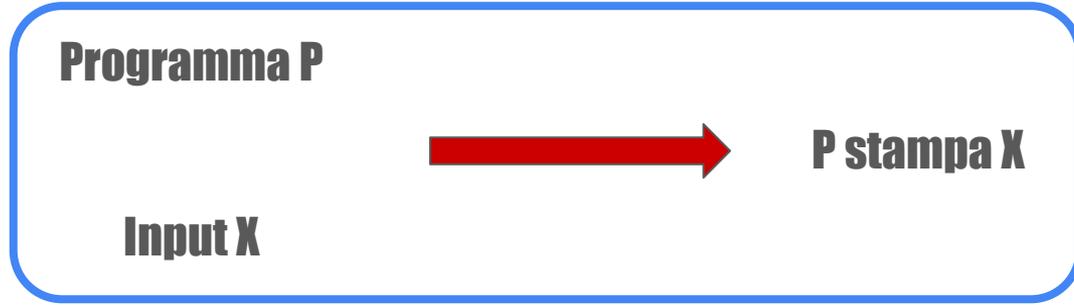








# Un programma che stampa se stesso...



## Più formalmente...

```
main(){char*s="main(){char*s=%c%s%c;printf(s,34,s,34);}";printf(s,34,s,34);}
```



```
main(){char*s="main(){char*s=%c%s%c;printf(s,34,s,34);}";printf(s,34,s,34);}
```

**Grazie!**