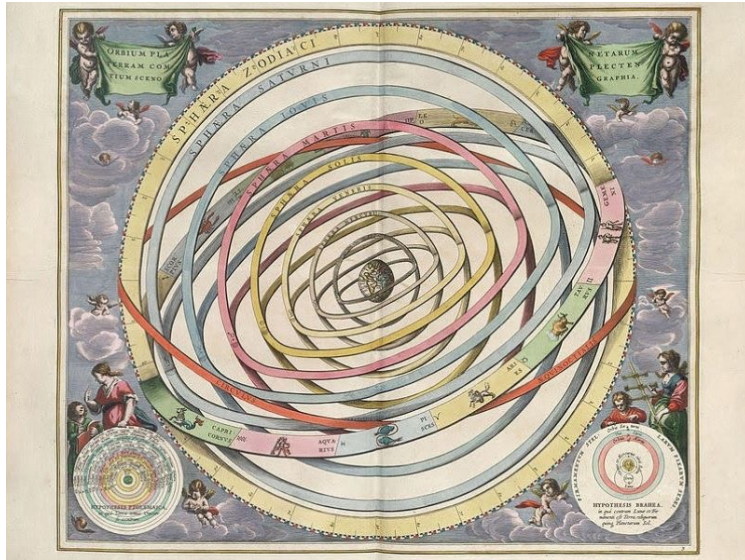




Seminari per le/i docenti
del Liceo Matematico
AA 2022-2023

Sapienza Università di Roma
Dipartimento di Matematica
Dipartimento di Fisica

Andreas Cellarius: Harmonia Macrocosmica seu atlas universalis et novus, totius universi creati cosmographiam generalem, et novam exhibens, Tav. 3 (1660).

Armonie del Mondo

– dalle leggi di Keplero alla meccanica quantistica –

Sergio Caprara



DIPARTIMENTO DI FISICA

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Prologo tra suoni, rumori e sfere celesti ...



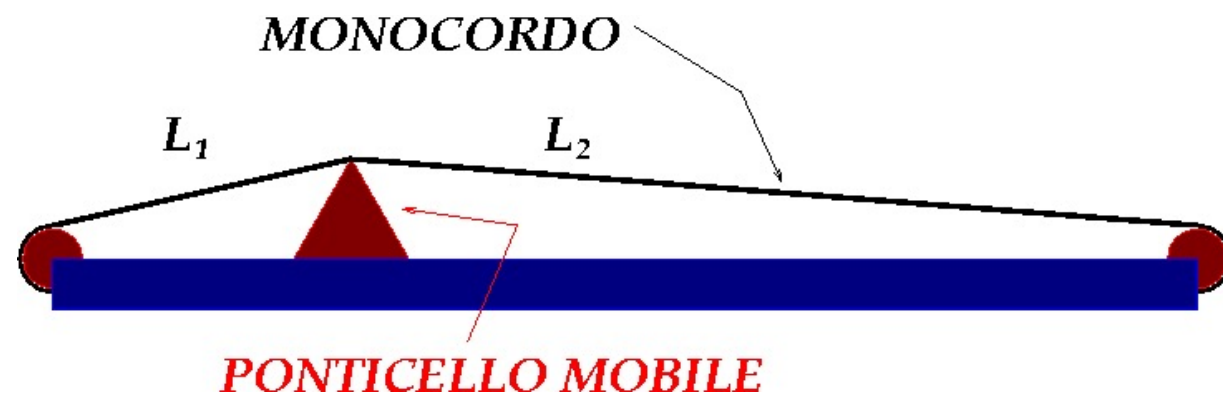
Pitagora di Samo (570-490 a.C.)



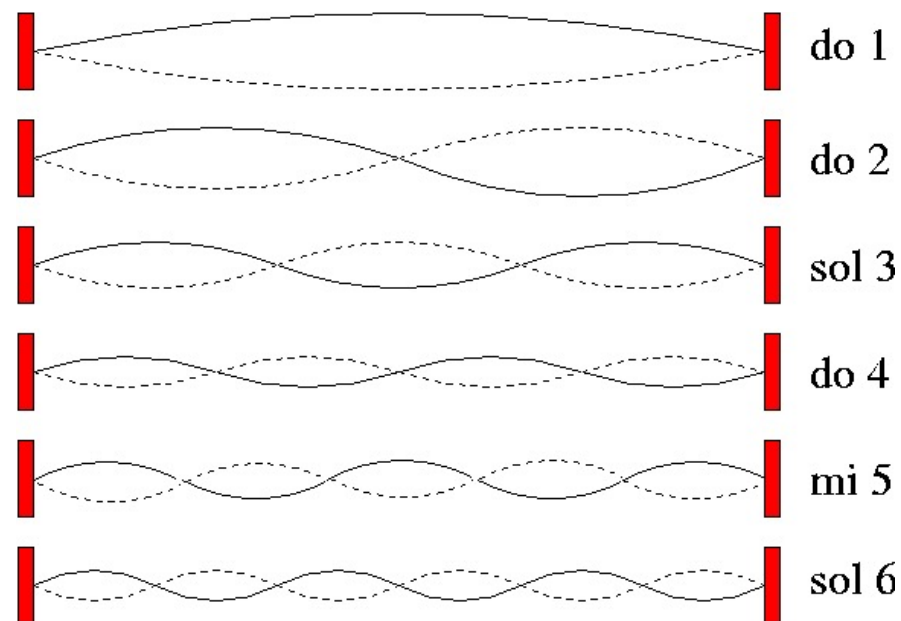
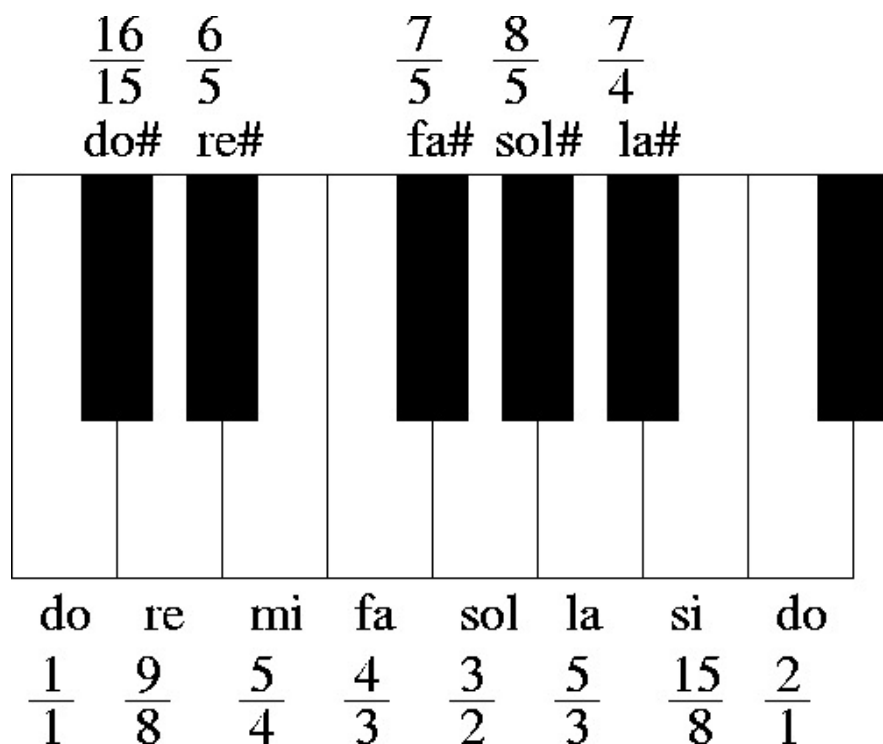
Raffaello Sanzio – Scuola di Atene (part. – ca. 1510)

La *scienza degli armonici* consisteva nel generare tre numeri in una certa proporzione *ascoltando* poi su uno strumento appositamente ideato, il *monocordo*, il suono risultante dalla divisione della corda in due parti che rispettassero la proporzione assegnata. Pitagora osservò che i suoni gradevoli (le *armonie*) corrispondevano a rapporti semplici e costruì una *scala musicale*.

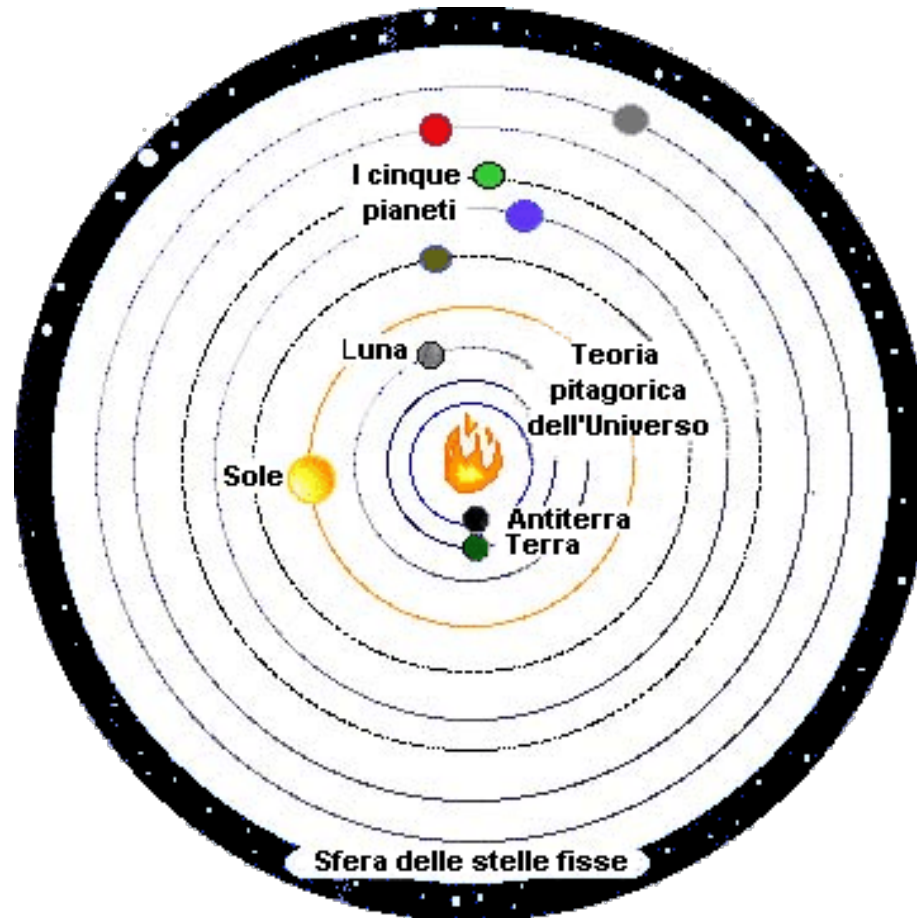
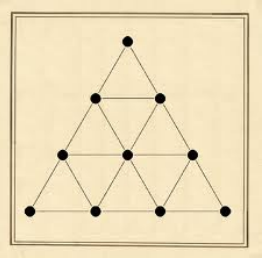
Gli armonici



Rapporti razionali
tra L_1 e L_2



Cosmologia pitagorica



- I pianeti si muovono su **sfere** (forma perfetta).
- I raggi delle sfere stanno fra loro in **rapporti razionali** (come quelli della scala del monocordo).
- Ad ogni pianeta è associata una **nota** e, nel muoversi, il pianeta emette un **suono**.
- $1+2+3+4=10$ **Tètraktys** (numero sacro; dieci opposizioni fondamentali).



Galileo Galilei

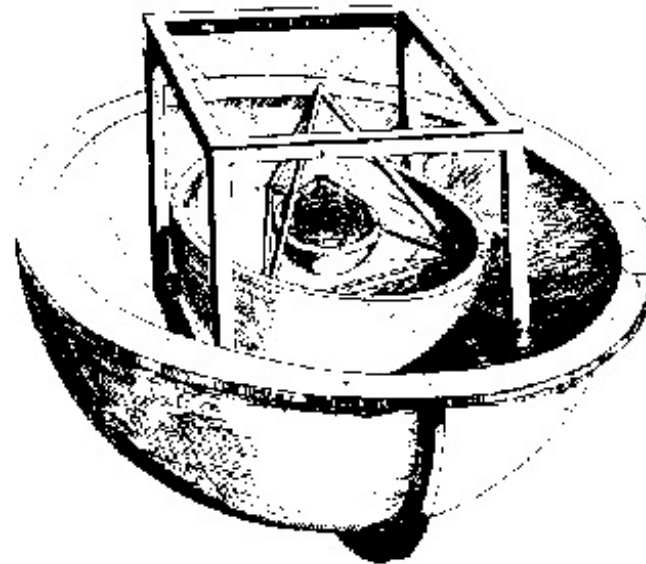
(1564–1642)

...La molestia di queste [le dissonanze] nascerà, credo io, dalle discordi pulsazioni di due diversi suoni che **sproporzionatamente** colpeggiano sopra il nostro timpano, e crudissime saranno le conseguenze quando i tempi delle vibrazioni fossero **incommensurabili**... Consonanti, e con diletto ricevute, saranno quelle coppie di suoni che verranno a percuotere con qualche **ordine** sopra 'l timpano: il quale ordine ricerca, prima, che le percosse fatte dentro all'istesso tempo siano **commensurabili** di numero, acciocché la cartilagine del timpano non abbia a star in continuo tormento d'inflettersi in due diverse maniere per acconsentire ed ubbidire alle sempre discordi battiture...

>> Discorsi e dimostrazioni matematiche attorno a due nuove scienze attinenti alla meccanica e i movimenti locali

Le Armonie del Mondo

Johannes Kepler (1571-1630)



64

Tabularum Rudolphi

Tabula Equationum MARTIS.

Anomalia Eccentrici Cum apogee et perihelii	Intero- rum Cum apogee et perihelii	Anomalia Eccentrici Cum apogee et perihelii	Intero- rum Cum apogee et perihelii	Anomalia Eccentrici Cum apogee et perihelii	Intero- rum Cum apogee et perihelii	Anomalia Eccentrici Cum apogee et perihelii	Intero- rum Cum apogee et perihelii
120	1. 5. 36	115.17.11	145193	150	1. 10. 35	147.12.44	146127
121	1. 5. 42	116.19.52	145193	151	1. 10. 40	148.18.43	146093
122	1. 5. 48	117.22.39	145193	152	1. 10. 45	149.23.44	146059
123	1. 5. 54	118.25.31	145193	153	1. 10. 50	150.28.49	146025
124	1. 6. 00	119.28.29	145193	154	1. 10. 55	151.33.57	145991
125	1. 6. 06	120.31.33	145193	155	1. 11. 00	152.39.09	145957
126	1. 6. 12	121.34.42	145193	156	1. 11. 05	153.44.23	145923
127	1. 6. 18	122.37.56	145193	157	1. 11. 10	154.49.40	145889
128	1. 6. 24	123.41.14	145193	158	1. 11. 15	155.55.00	145855
129	1. 6. 30	124.44.37	145193	159	1. 11. 20	157.00.23	145821
130	1. 6. 36	125.48.06	145193	160	1. 11. 25	158.05.49	145787
131	1. 6. 42	126.51.40	145193	161	1. 11. 30	159.11.17	145753
132	1. 6. 48	127.55.19	145193	162	1. 11. 35	160.16.47	145719
133	1. 6. 54	128.58.59	145193	163	1. 11. 40	161.22.19	145685
134	1. 7. 00	129.62.44	145193	164	1. 11. 45	162.27.53	145651
135	1. 7. 06	130.66.25	145193	165	1. 11. 50	163.33.29	145617
136	1. 7. 12	131.70.11	145193	166	1. 11. 55	164.39.06	145583
137	1. 7. 18	132.74.02	145193	167	1. 12. 00	165.44.45	145549
138	1. 7. 24	133.77.58	145193	168	1. 12. 05	166.50.26	145515
139	1. 7. 30	134.81.59	145193	169	1. 12. 10	167.56.08	145481
140	1. 7. 36	135.86.06	145193	170	1. 12. 15	168.61.52	145447
141	1. 7. 42	136.90.18	145193	171	1. 12. 20	169.67.37	145413
142	1. 7. 48	137.94.35	145193	172	1. 12. 25	170.73.23	145379
143	1. 7. 54	138.98.57	145193	173	1. 12. 30	171.79.11	145345
144	1. 8. 00	139.03.24	145193	174	1. 12. 35	172.85.00	145311
145	1. 8. 06	140.07.57	145193	175	1. 12. 40	173.90.50	145277
146	1. 8. 12	141.12.36	145193	176	1. 12. 45	174.96.41	145243
147	1. 8. 18	142.17.21	145193	177	1. 12. 50	175.02.33	145209
148	1. 8. 24	143.22.11	145193	178	1. 12. 55	176.08.26	145175
149	1. 8. 30	144.27.06	145193	179	1. 13. 00	177.14.21	145141
150	1. 8. 36	145.32.06	145193	180	1. 13. 05	178.20.17	145107

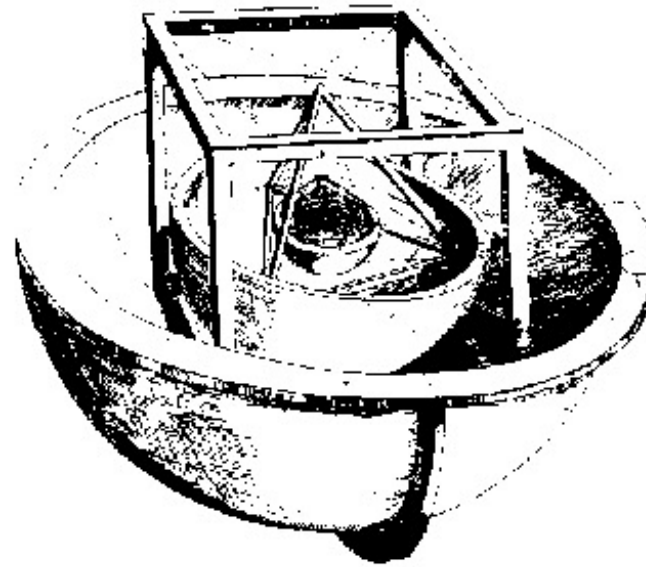
Tab.Lat.

Se si disegnasse una sfera che tocca all'interno il cammino di Saturno, e si inscrivesse un cubo nella sfera, allora la sfera inscritta in quel cubo sarebbe la sfera che descrive il cammino di Giove...

>> *Mysterium Cosmographicum (1596)*

Le Armonie del Mondo

Johannes Kepler (1571-1630)



64

Tabularum Rudolphi

Tabula Equationum MARTIS.

Anomalia Eccentrici Cum Aequatione peripetaphy	Intercum luminis Cum Aequatione peripetaphy	Anomalia Eccentrici Cum Aequatione peripetaphy	Intervalli Cum Aequatione peripetaphy	Anomalia Eccentrici Cum Aequatione peripetaphy	Intercum luminis Cum Aequatione peripetaphy	Anomalia Eccentrici Cum Aequatione peripetaphy	Intervalli Cum Aequatione peripetaphy
120	1. 5. 36	115.17.11	145193	150	1. 10. 35	147.13.44	145193
121	1. 5. 47	116.19.52	145080	151	1. 10. 43	148.18.43	145080
122	1. 5. 59	117.22.39	144871	152	1. 10. 49	149.23.44	144871
123	1. 6. 11	118.25.31	144661	153	1. 10. 55	150.28.49	144661
124	1. 6. 23	119.28.29	144458	154	1. 11. 10	151.33.57	144458
125	1. 6. 34	120.31.23	144255	155	1. 11. 16	152.39. 9	144255
126	1. 6. 46	121.34.42	144055	156	1. 11. 21	153.44.23	144055
127	1. 6. 57	122.37.56	143857	157	1. 11. 26	154.49.40	143857
128	1. 7. 8	123.41.10	143661	158	1. 11. 30	155.55. 0	143661
129	1. 7. 19	124.44.37	143466	159	1. 11. 33	157. 0.23	143466
130	1. 7. 30	125.48. 6	143278	160	1. 11. 38	158. 5.48	143278
131	1. 7. 40	126.51.40	143091	161	1. 11. 42	159.11.17	143091
132	1. 7. 50	127.55.19	142906	162	1. 11. 45	160.16.47	142906
133	1. 8. 1	128.59.23	142724	163	1. 11. 48	161.22.19	142724
134	1. 8. 11	130. 2.52	142545	164	1. 11. 52	162.27.53	142545
135	1. 8. 21	131. 6.45	142370	165	1. 11. 57	163.33.29	142370
136	1. 8. 30	132.10.43	142198	166	1. 12. 1	164.39. 6	142198
137	1. 8. 40	133.14.46	142028	167	1. 12. 5	165.44.45	142028
138	1. 8. 50	134.18.53	141861	168	1. 12. 10	166.50.26	141861
139	1. 9. 1	135.23. 4	141697	169	1. 12. 15	167.56. 8	141697
140	1. 9. 11	136.27.20	141537	170	1. 12. 20	169. 1.52	141537
141	1. 9. 21	137.31.41	141381	171	1. 12. 25	170. 7.37	141381
142	1. 9. 31	138.36. 6	141228	172	1. 12. 30	171.13.24	141228
143	1. 9. 41	139.40.34	141078	173	1. 12. 35	172.19.13	141078
144	1. 9. 51	140.45. 7	140931	174	1. 12. 40	173.25. 0	140931
145	1. 10. 1	141.49.44	140788	175	1. 12. 45	174.30.49	140788
146	1. 10. 11	142.54.24	140649	176	1. 12. 50	175.36.39	140649
147	1. 10. 21	143.59. 8	140513	177	1. 12. 55	176.42.29	140513
148	1. 10. 31	144.64.35	140381	178	1. 13. 0	177.48.19	140381
149	1. 10. 41	145.69.40	140252	179	1. 13. 5	178.54.10	140252
150	1. 10. 51	146.74.53	140127	180	1. 13. 10	180. 0. 0	140127

Tab.Lat.

raggi di Keplero e circonferenze osservate:

$$R_{\text{Saturno}} = \sqrt{3/2}$$

$$R_{\text{Giove}} = 1/2$$

$$\Rightarrow R_{\text{Saturno}} / R_{\text{Giove}} = \sqrt{3} \approx 1.732$$

$$C_{\text{Saturno}} = 56.47 \text{ au}$$

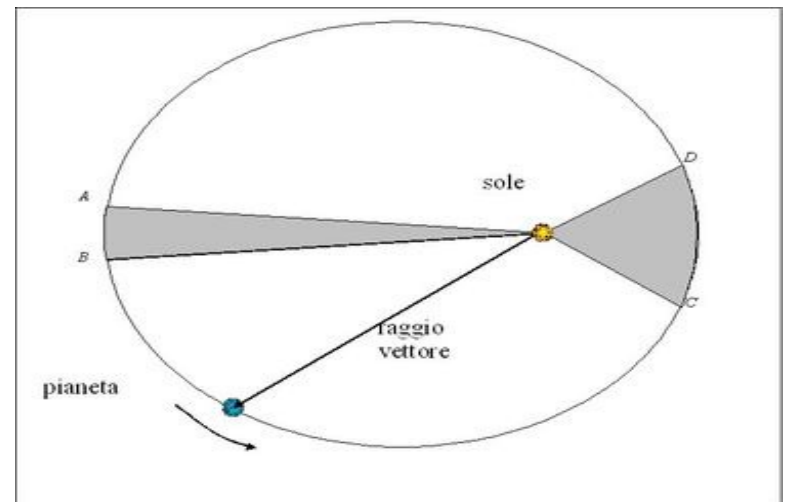
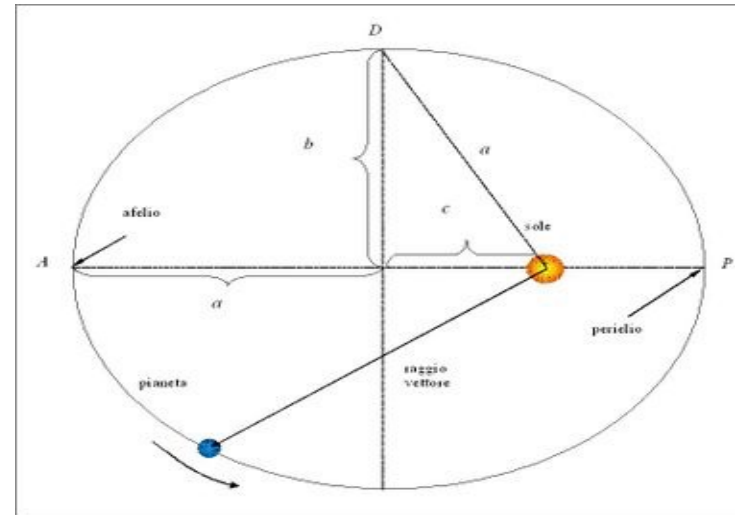
$$C_{\text{Giove}} = 32.67 \text{ au}$$

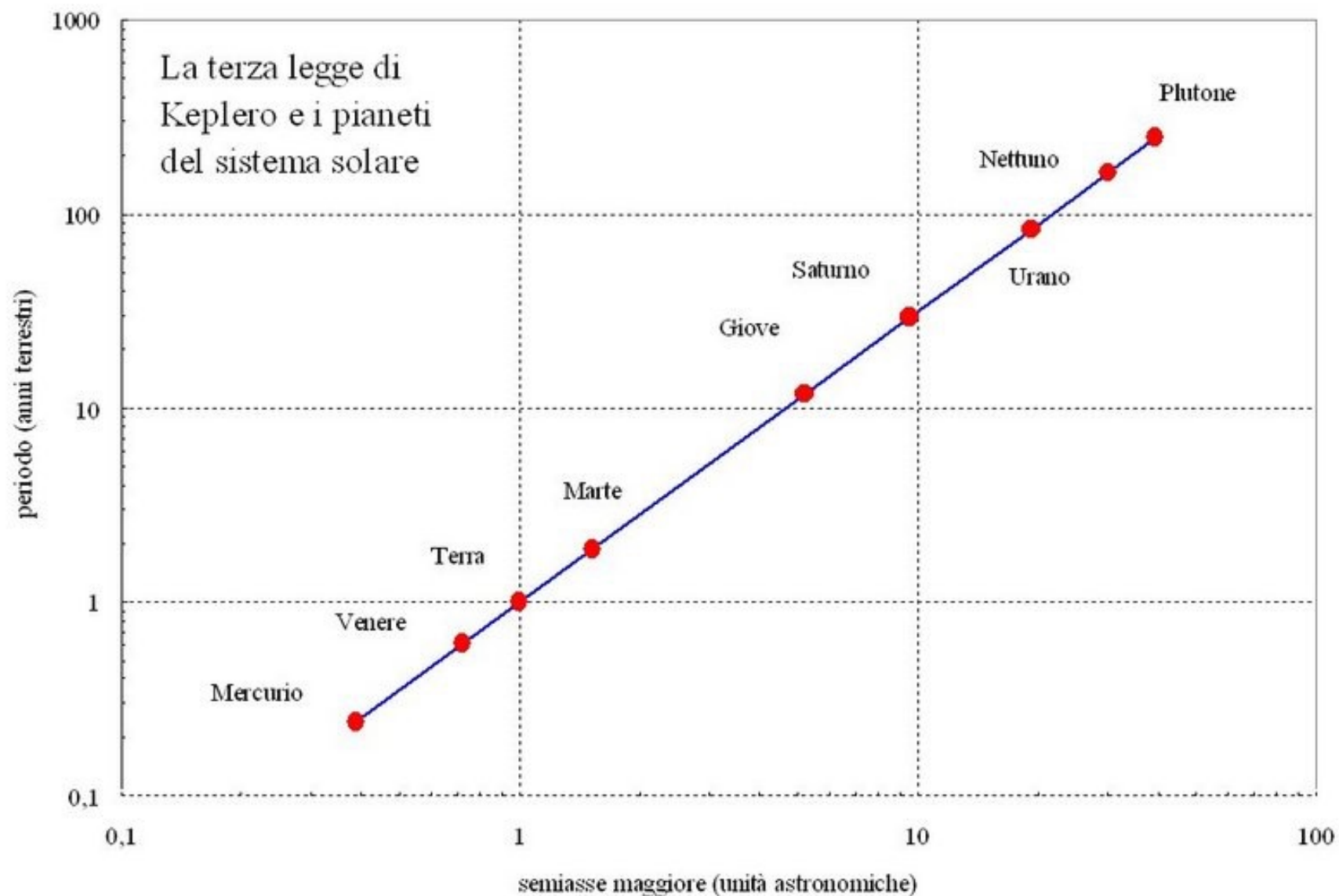
$$\Rightarrow C_{\text{Saturno}} / C_{\text{Giove}} \approx 1.728$$

differenza 2‰ !!!

Leggi di Keplero (1)

- L'orbita descritta da un pianeta è un'ellisse di cui il sole occupa uno dei due fuochi (1608).
- Il raggio vettore che unisce il centro del sole con il centro del pianeta descrive aree uguali in tempi uguali (1609).





Leggi di Keplero (2)

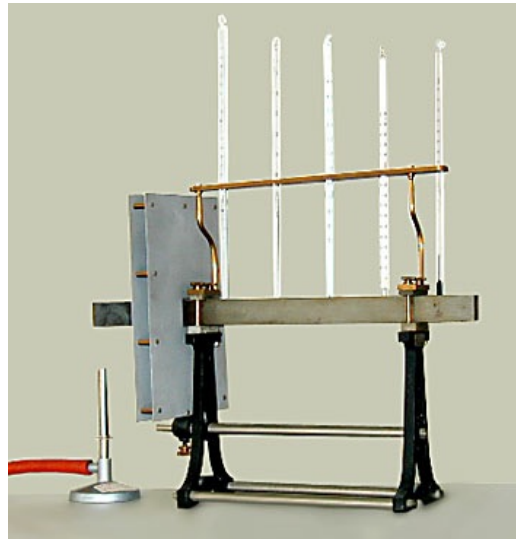
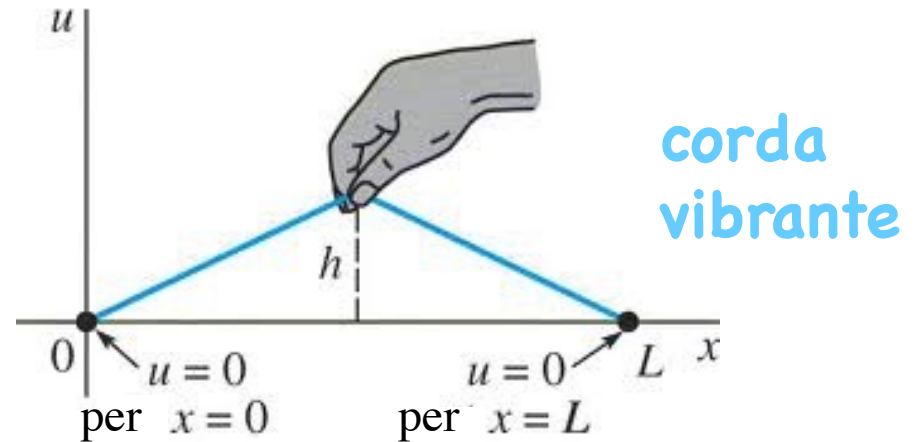
... e se vi interessa conoscere l'esatto momento, [la legge] fu concepita mentalmente l'8 marzo in questo anno 1618, ma sottomessa al calcolo in maniera sfortunata e dunque rifiutata come falsa; vi tornai finalmente il 15 maggio e, adottando una nuova linea d'attacco, scacciai l'oscurità dalla mia mente. Così forte era l'accordo fra il mio lavoro di 17 anni sui dati di **Brahe** ed il presente studio, che cospiravano assieme, che all'inizio pensai di sognare e di aver assunto la conclusione fra le mie ipotesi fondamentali. Ma è assolutamente certo ed esatto che la proporzione fra i periodi di due qualsivoglia pianeti è esattamente la **proporzione sesquialtera** della loro distanza media.

>> Libro V - Harmonice mundi

J. B. J. Fourier (1768–1830), le onde, il calore

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) = v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t)$$

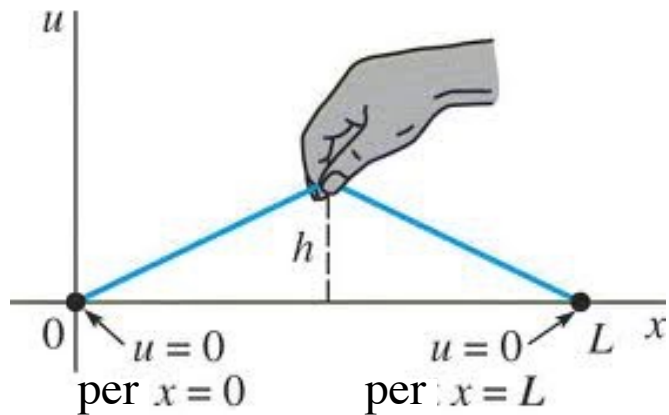
velocità di propagazione



sbarra conduttrice
con temperature diverse
agli estremi

$$\frac{\partial}{\partial t} T(x, t) = \kappa \frac{\partial^2}{\partial x^2} T(x, t)$$

coefficiente di diffusione



corda pizzicata

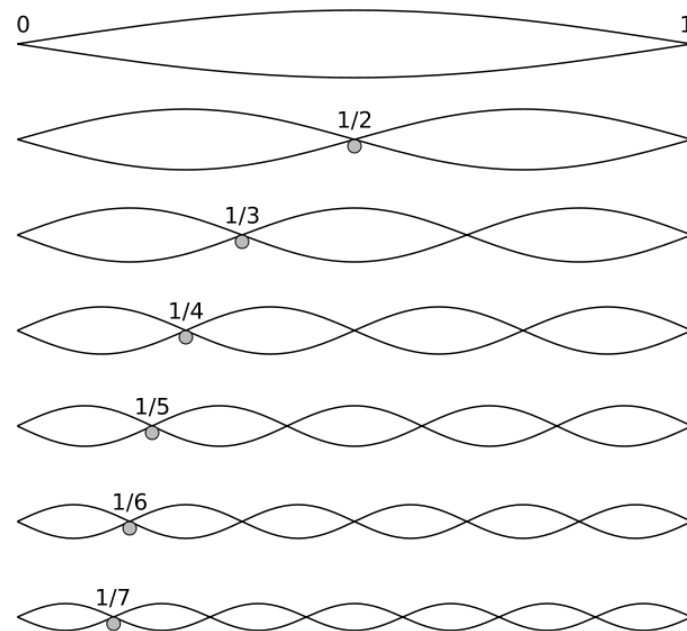
$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) = v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t)$$

$$u(x, t) = C \sin(kx) \cos(\omega t)$$

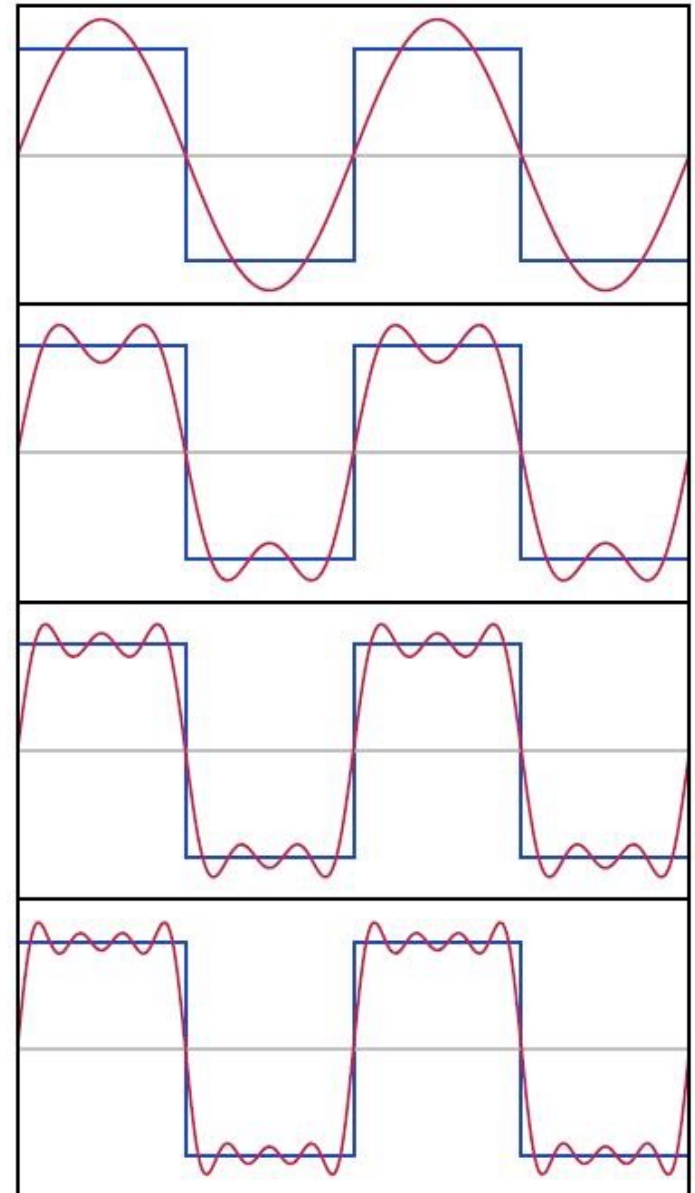
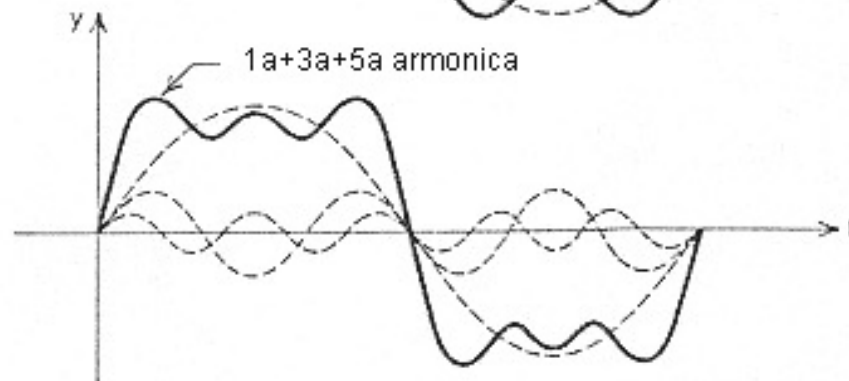
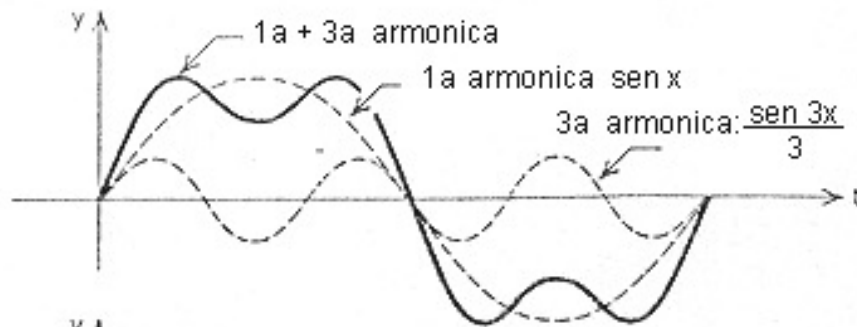
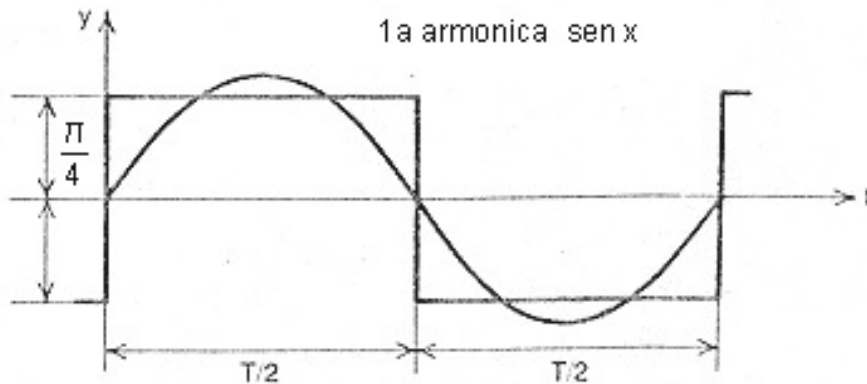
$$\omega = vk$$



$$\begin{aligned}\omega_{mi*} &= 82.40 \text{ Hz} \\ \omega_{la} &= 110.00 \text{ Hz} \\ \omega_{re} &= 146.80 \text{ Hz} \\ \omega_{sol} &= 196.00 \text{ Hz} \\ \omega_{si} &= 246.90 \text{ Hz} \\ \omega_{mi} &= 329.60 \text{ Hz}\end{aligned}$$



analisi armonica di un'onda quadra



$$\frac{\partial}{\partial t} T(x, t) = \kappa \frac{\partial^2}{\partial x^2} T(x, t)$$

$$T(x, t) = T_{\infty}(x) + C e^{-\Gamma t} \sin(kx)$$

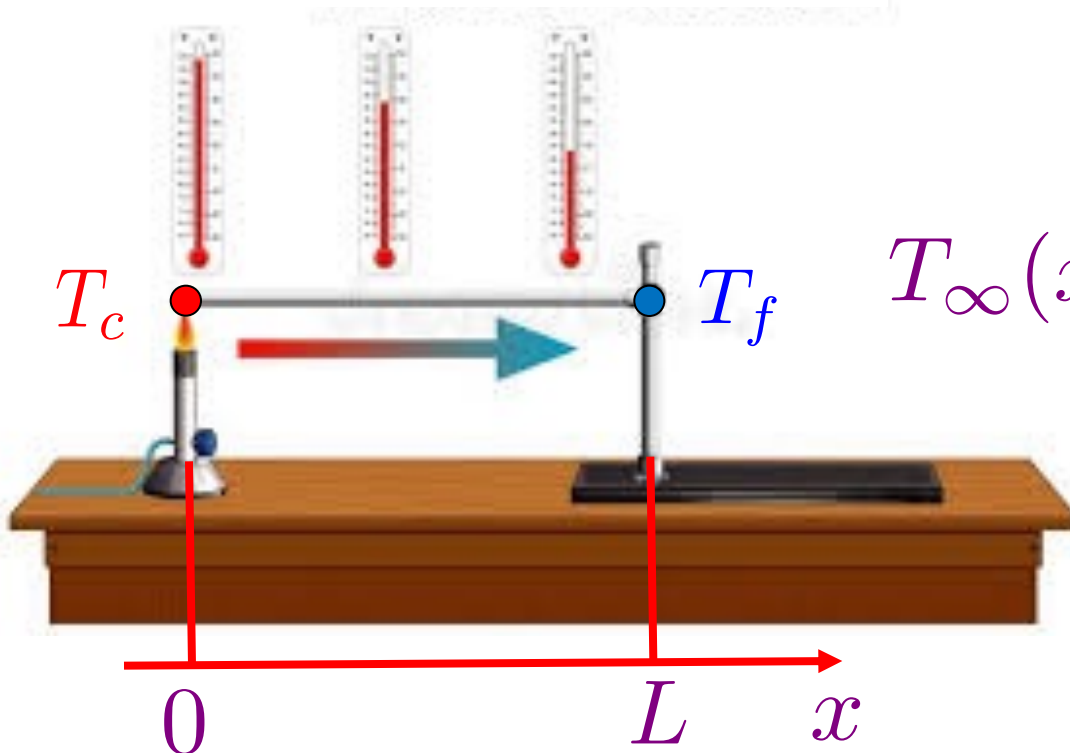
$$\Gamma = \kappa k^2$$

Conduzione del calore

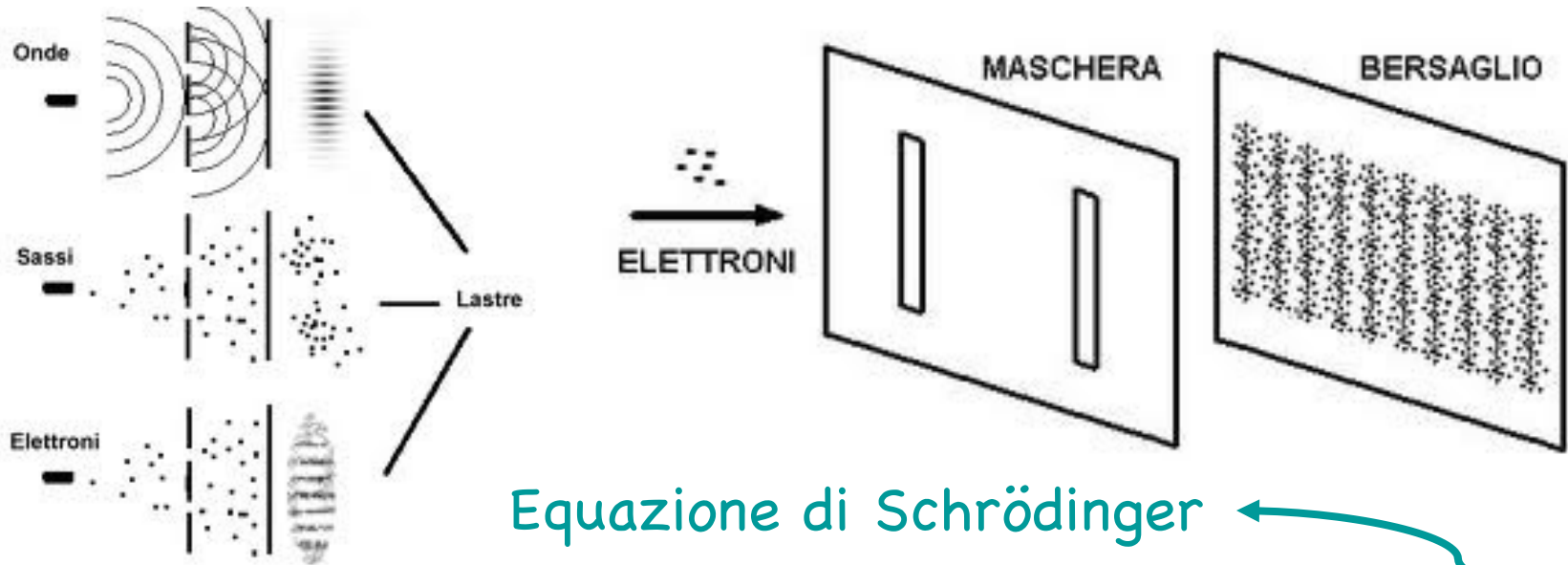
stato stazionario

$$T_{\infty}(x) = T_c + \frac{T_f - T_c}{L} x$$

funzione
armonica



E. Schrödinger (1887–1961), la meccanica quantistica e la funzione d'onda



Equazione di Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x, t)$$

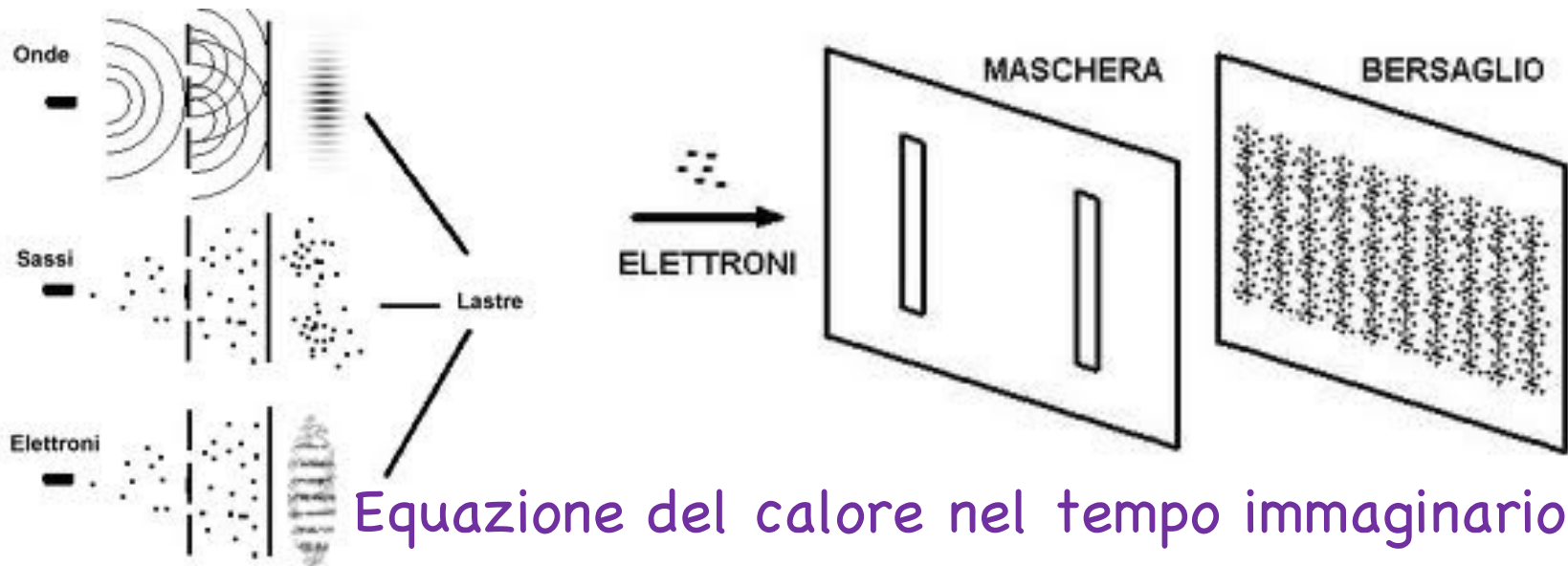
costante di Planck

massa

funzione d'onda



E. Schrödinger (1887–1961), la meccanica quantistica e la funzione d'onda



Equazione del calore nel tempo immaginario



$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x, t)$$

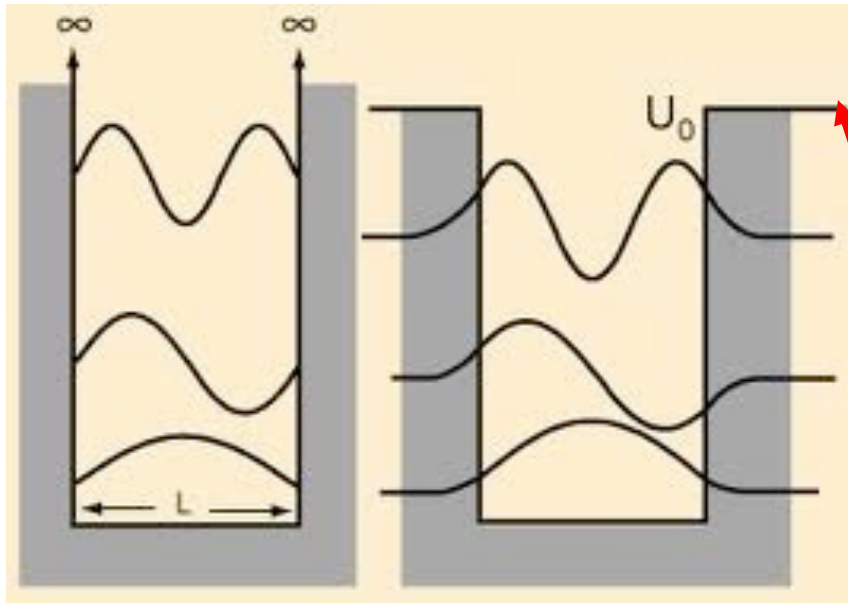
Diagrammatic annotations for the equation:

- A purple bracket under $i\hbar$ points to the text "costante di Planck".
- A teal bracket under $2m$ points to the text "massa".
- A red bracket under $\psi(x, t)$ points to the text "funzione d'onda".
- A teal line connects the text "Equazione del calore nel tempo immaginario" to the equation.

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x, t) + \underbrace{V(x)}_{\text{Energia potenziale}} \psi(x, t)$$

Buca rettangolare

Energia potenziale



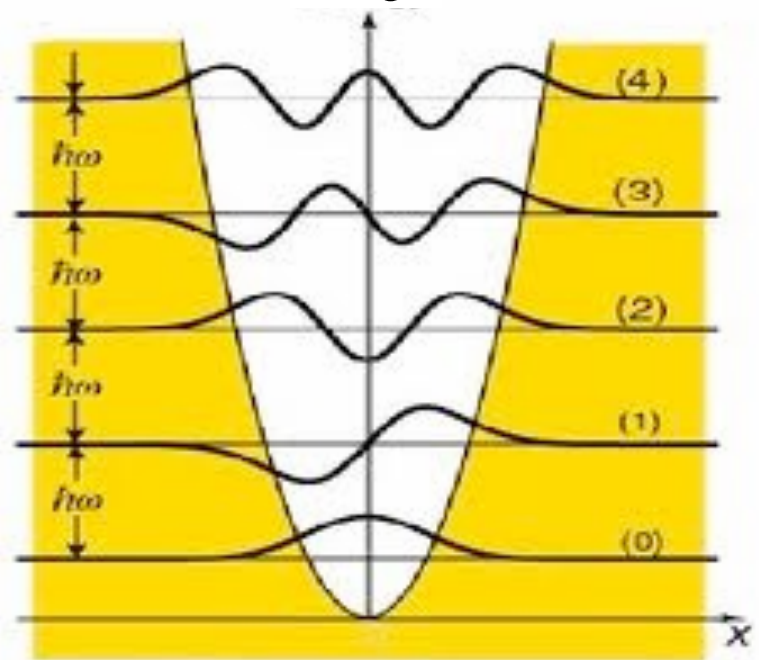
$$V(x) = 0, \quad 0 < x < L$$

$$V(x) = \infty, \quad \text{altrove}$$

$$[V(x) = U_0, \quad \text{altrove}]$$

Oscillatore armonico

Energia



$$V(x) = \frac{1}{2} k x^2$$

Considerazioni conclusive

- Per i pitagorici la realtà si conforma alla **matematica**.
- La **filosofia pitagorica** esercita una forte **influenza** sul pensiero scientifico.
- Gradualmente, la matematica diventa lo **strumento** per descrivere le regolarità dei **fenomeni naturali**.
- L'**analisi armonica** è un esempio della possibilità di svelare **regolarità nascoste**.