

# Iperreali

## Introduzione *non standard* al calcolo differenziale

Liceo scientifico G.B. Grassi di Latina - [www.liceograssilatina.org](http://www.liceograssilatina.org)

© 2023, Gualtiero Grassucci

[gualtiero.grassucci@liceograssilatina.org](mailto:gualtiero.grassucci@liceograssilatina.org)

In collaborazione con le professoresse Annalisa Malusa e Lucilla Galterio



# Analisi non standard

2

- Formalizzata da Abraham Robinson nel 1966 (Robinson, A. - *Non standard analysis* - 1996, Princeton University Press, [www.degruyter.com/document/doi/10.1515/9781400884223/pdf](http://www.degruyter.com/document/doi/10.1515/9781400884223/pdf))
  - Recupera alcuni concetti e scelte dell'analisi proposta da Leibnitz
  - Sul finire degli anni novanta è stata oggetto di un *esperimento* didattico condotta da Giorgio Goldoni (Goldoni, G. - *Il calcolo delle differenze e il calcolo differenziale* - 2014, Amazon fulfillment)
- Il percorso proposto si basa sull'introduzione di un insieme numerico, gli **iperreali**, che estende i reali *aggiungendo* infiniti e infinitesimi

**L'insieme degli iperreali è usato per introdurre il calcolo differenziale in una classe terza del liceo scientifico**

## Analisi non standard

Il laboratorio  
Piano delle attività  
Definizioni  
Microscopi  
Tipologia  
Operazioni  
Il postulato di  
Eudosso  
Un esercizio  
Altre definizioni  
Parte standard  
Alcuni problemi  
Derivata  
Applicazioni  
Una prova di  
verifica  
Comportamento  
agli estremi  
Esponenziali e  
logaritmi  
Equazioni  
differenziali

# Laboratorio introduttivo (pre-percorso)

Questa prima parte introduce la possibilità di definizione di nuovi insiemi numerici

La seconda parte è indispensabile per introdurre le operazioni con gli iperreali e non deve essere sottovalutata

Problemi risolvibili con infiniti e infinitesimi

Quindi gli infinitesimi possono essere utili!

Si deve rinunciare al postulato di Eudosso

L'ultima parte è quella fondamentale: gli strumenti e le competenze apprese a questo punto possono essere usati immediatamente nella didattica curricolare

A questo punto la derivata può essere usata nella didattica curricolare

La verifica delle competenze è in orario curricolare

Ridefinizione del calcolo differenziale in modo *classico*

Al termine del quarto anno e poi nel quinto anno si propone l'analisi classica

Sei ore con *scoperta* di alcune formule di derivazione e di alcune derivate fondamentali (l'applicazione è fondamentale svolta in orario curricolare)

Gli insiemi ottenuti hanno anche più proprietà di  $\mathbb{Z}$

Sei ore con verifica delle proprietà lasciata agli studenti

Sei ore con verifica delle proprietà lasciata agli studenti

Anelli

Campi

Definizione di insiemi numerici

Numerazioni per ...

Classi resto modulo ...

Iperreali

Standard

Infinitesimi e infiniti

Operazioni

Confronti tra iperreali

Calcolo differenziale

Integrazione numerica di equazioni differenziali

Tasso di variazione, velocità, ...

Tangente a una curva

Differenziale

Derivata

Regole di derivazione e derivate fondamentali

Applicazione del calcolo differenziale al grafico delle funzioni

# Iperreali

Introduzione di un nuovo insieme numerico

## Problemi

Gli iperreali aiutano a risolvere problemi

## Derivata

La derivata di una funzione

## Applicazioni

Applicazioni alla geometria analitica, alla fisica e allo studio di funzioni

## Ritorno a *Hyperreal mountain*

Funzioni esponenziali e logaritmiche

## Valutazione

Cosa ne pensano studentesse e studenti

# Definizioni

6



Useremo  $x, y, z, \dots$  per indicare un numero qualunque

- **Standard**  $a, b, c, \dots$  i numeri reali
- **Infinitesimi**  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  numeri più piccoli di qualunque numero standard positivo:  $|\varepsilon| < x \ \forall x > 0 \text{ standard}$ 
  - lo zero è minore di ogni numero standard positivo: è l'unico numero standard infinitesimo
- **Finiti**, minori di almeno un numero standard:  $|x| < a$  per almeno un  $a > 0$  standard
  - quindi gli infinitesimi sono finiti
- **Infiniti**  $A, B, C, \dots$  numeri maggiori in valore assoluto di ogni numero standard:  $|M| > x \ \forall x > 0 \text{ standard}$ 
  - i numeri standard non sono infiniti (non sono maggiori di tutti gli standard)

Ma anche i numeri standard sono finiti

Piano delle attività

**Definizioni**

Microscopi

Tipologia

Operazioni

Il postulato di

Eudosso

Un esercizio

Altre definizioni

Parte standard

Alcuni problemi

Derivata

Applicazioni

Una prova di  
verifica

Comportamento  
agli estremi

Esponenziali e  
logaritmi

Equazioni  
differenziali

# Iperreali - tipologia

7

I numeri finiti **f** sono i numeri standard (i reali) e gli infinitesimi che essendo minori di ogni standard positivo sono anch'essi finiti

**fni**: finiti non infinitesimi

Lo zero è l'unico numero standard minore di ogni altro standard positivo e quindi è un infinitesimo

Analisi non

**tipologia**

Operazioni  
Il postulato di Eudosso  
Un esercizio  
Altre definizioni  
Parte standard  
Alcuni problemi  
Derivata  
Applicazioni  
Una prova di verifica  
Comportamento agli estremi  
Esponenziali e logaritmi  
Equazioni differenziali

Iperreali

Finiti (**f**)

Infiniti (**I**)  
A,B, ...

Non infinitesimi  
(**fni**)  
a,b, ...

Infinitesimi

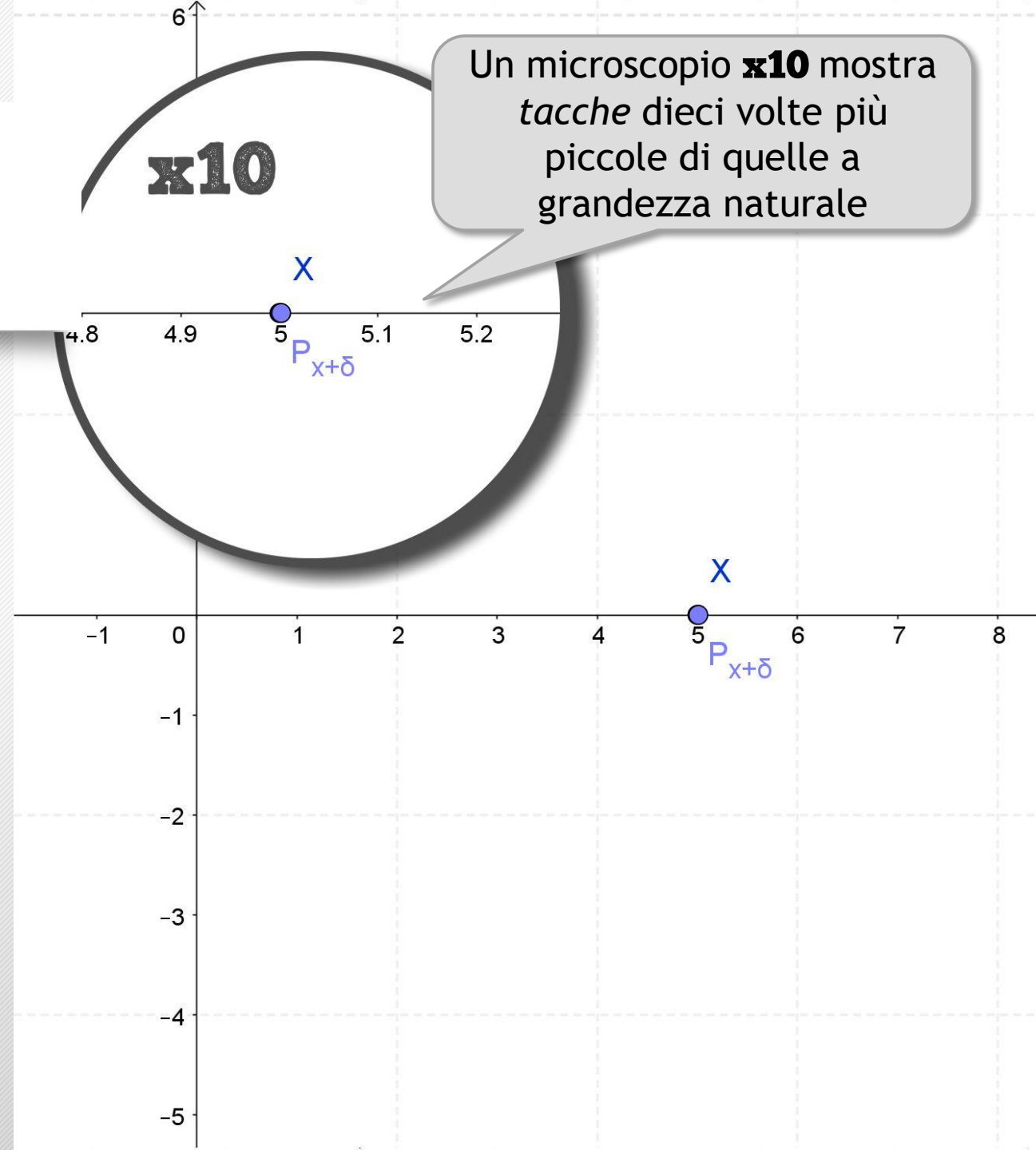
Nulli (**0**)  
zero

Non nulli (**inn**)  
 $\alpha, \beta, \dots$

**inn**: infinitesimi non nulli

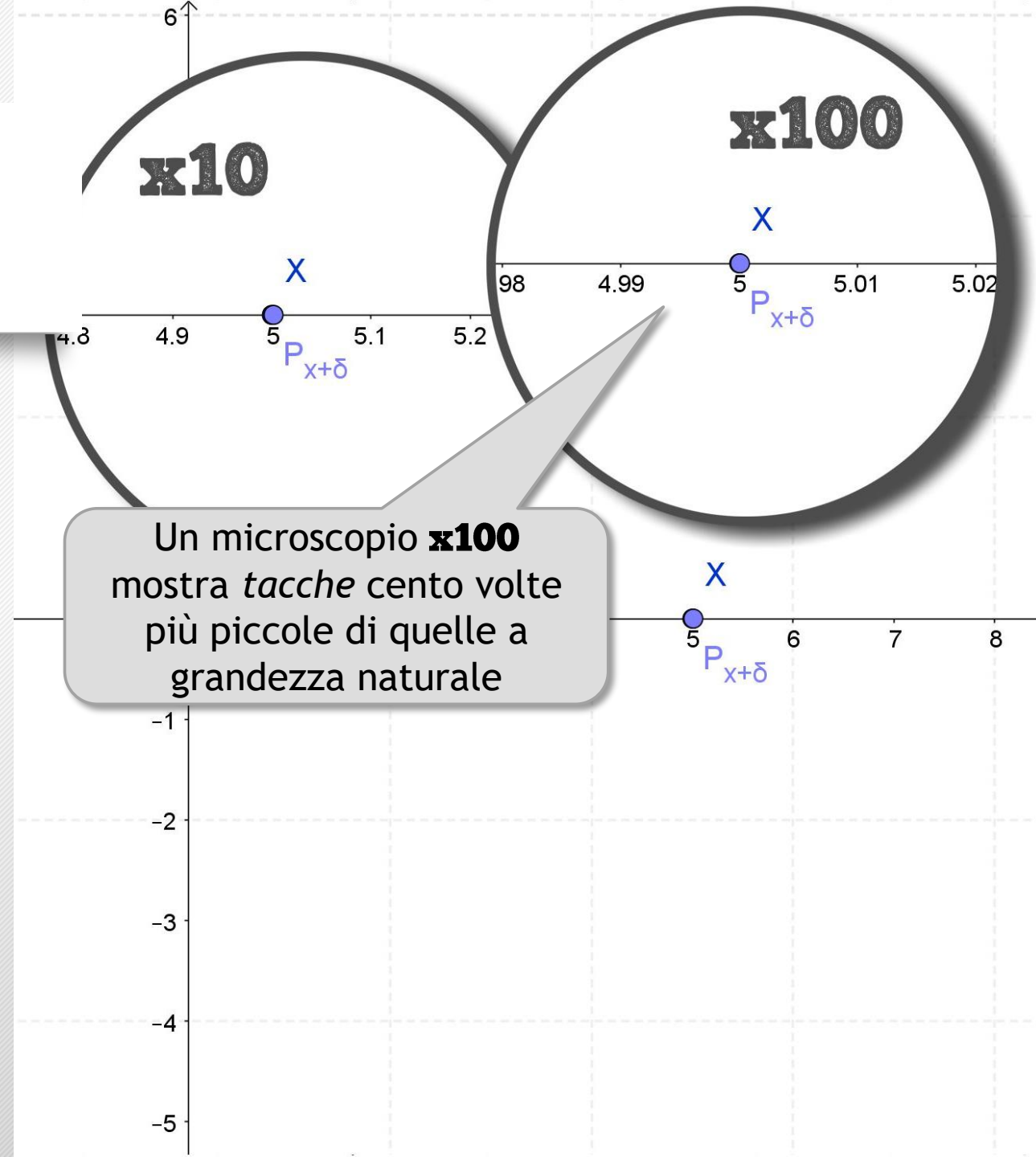
# Microscopi (1)

- Un **microscopio standard  $\times n$**  punta a un numero reale  $x$  e ingrandisce i dintorni di  $n$  volte
- Quindi le *tacche* sull'asse delle ascisse diventano  $x \pm \frac{1}{n}$ ,  $x \pm \frac{2}{n}$ , ...
- Le distanze fra i numeri vicini, ingrandite al microscopio, appaiono uguali alle distanze nelle zone non ingrandite della retta, ma in realtà sono distanze  $n$  volte minori



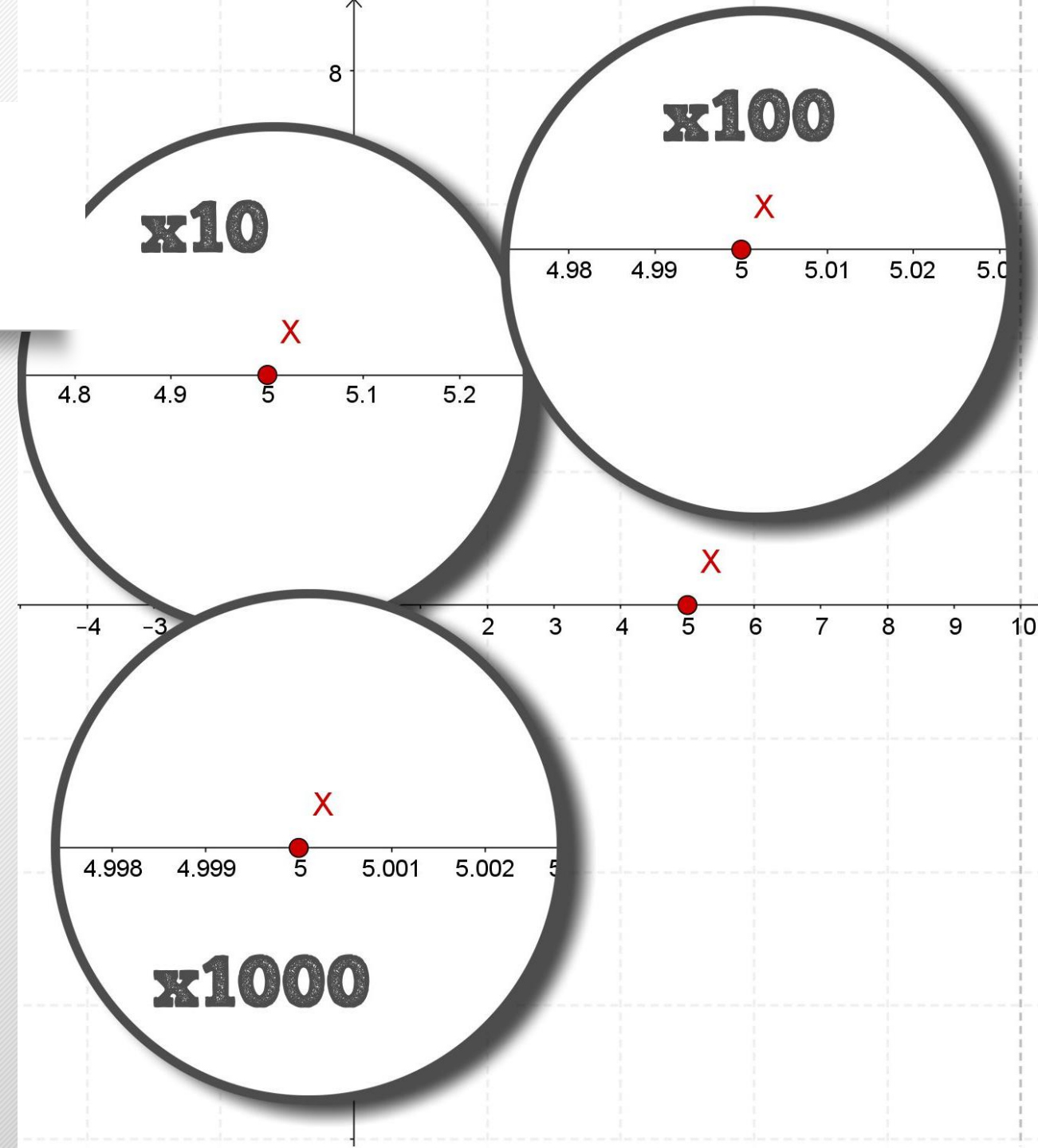
# Microscopi (1)

- Un **microscopio standard  $\times n$**  punta a un numero reale  $x$  e ingrandisce i dintorni di  $n$  volte
- Quindi le *tacche* sull'asse delle ascisse diventano  $x \pm \frac{1}{n}$ ,  $x \pm \frac{2}{n}$ , ...
- Le distanze fra i numeri vicini, ingrandite al microscopio, appaiono uguali alle distanze nelle zone non ingrandite della retta, ma in realtà sono distanze  $n$  volte minori



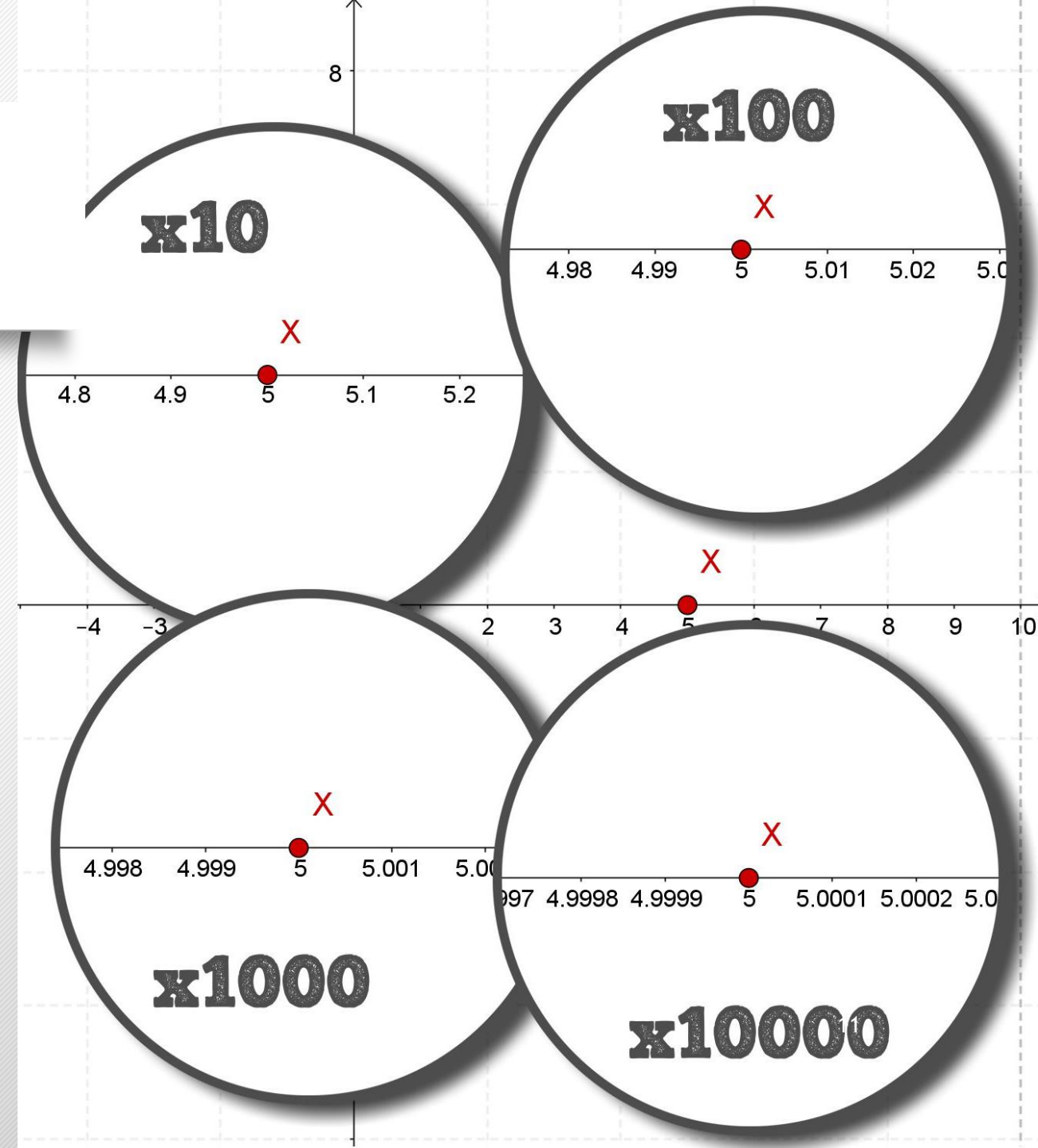
# Microscopi (1)

- Un **microscopio standard  $\times n$**  punta a un numero reale  $x$  e ingrandisce i dintorni di  $n$  volte
- Quindi le *tacche* sull'asse delle ascisse diventano  $x \pm \frac{1}{n}$ ,  $x \pm \frac{2}{n}$ , ...
- Le distanze fra i numeri vicini, ingrandite al microscopio, appaiono uguali alle distanze nelle zone non ingrandite della retta, ma in realtà sono distanze  $n$  volte minori



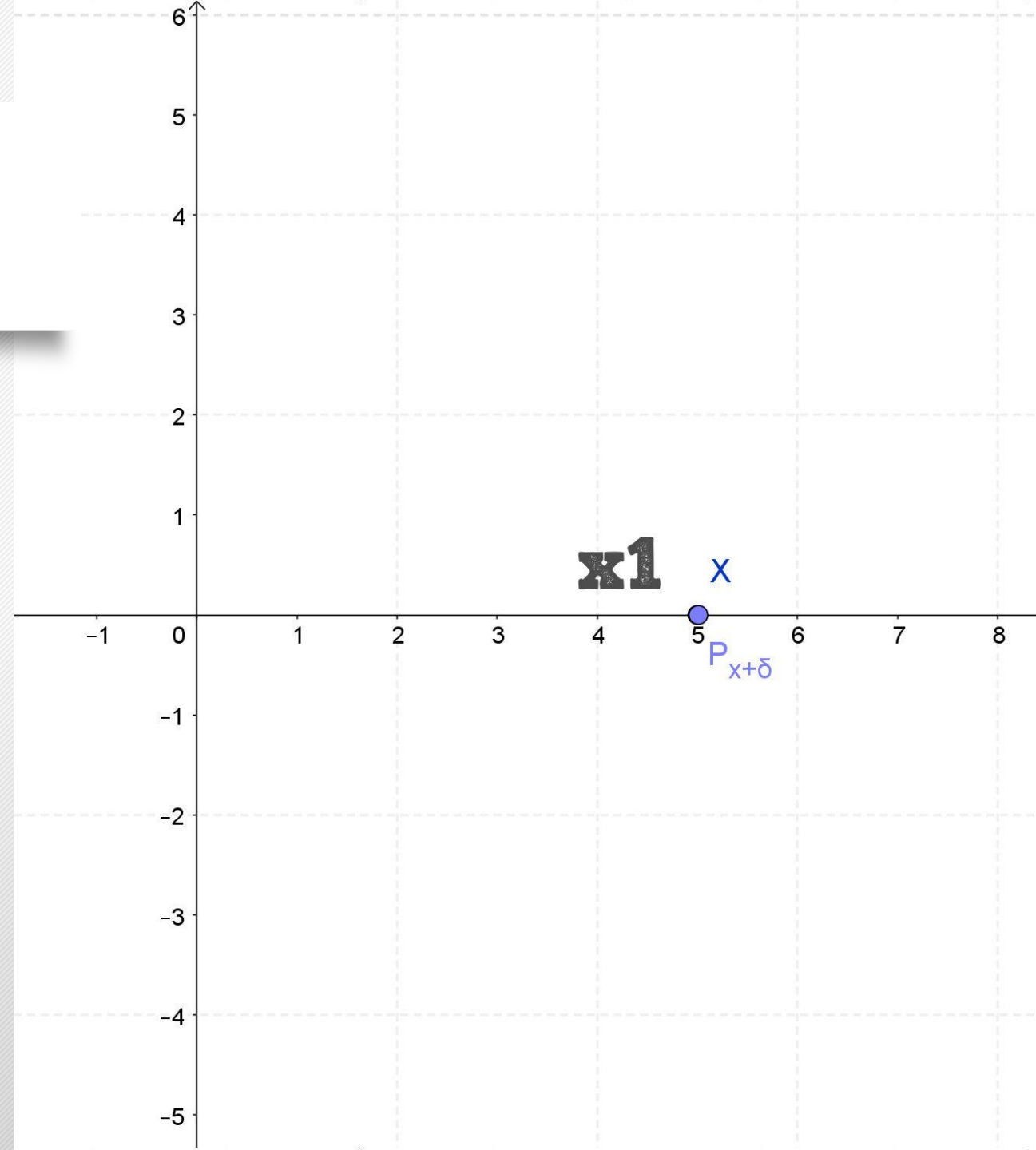
# Microscopi (1)

- Un **microscopio standard  $\times n$**  punta a un numero reale  $x$  e ingrandisce i dintorni di  $n$  volte
- Quindi le *tacche* sull'asse delle ascisse diventano  $x \pm \frac{1}{n}$ ,  $x \pm \frac{2}{n}$ , ...
- Le distanze fra i numeri vicini, ingrandite al microscopio, appaiono uguali alle distanze nelle zone non ingrandite della retta, ma in realtà sono distanze  $n$  volte minori



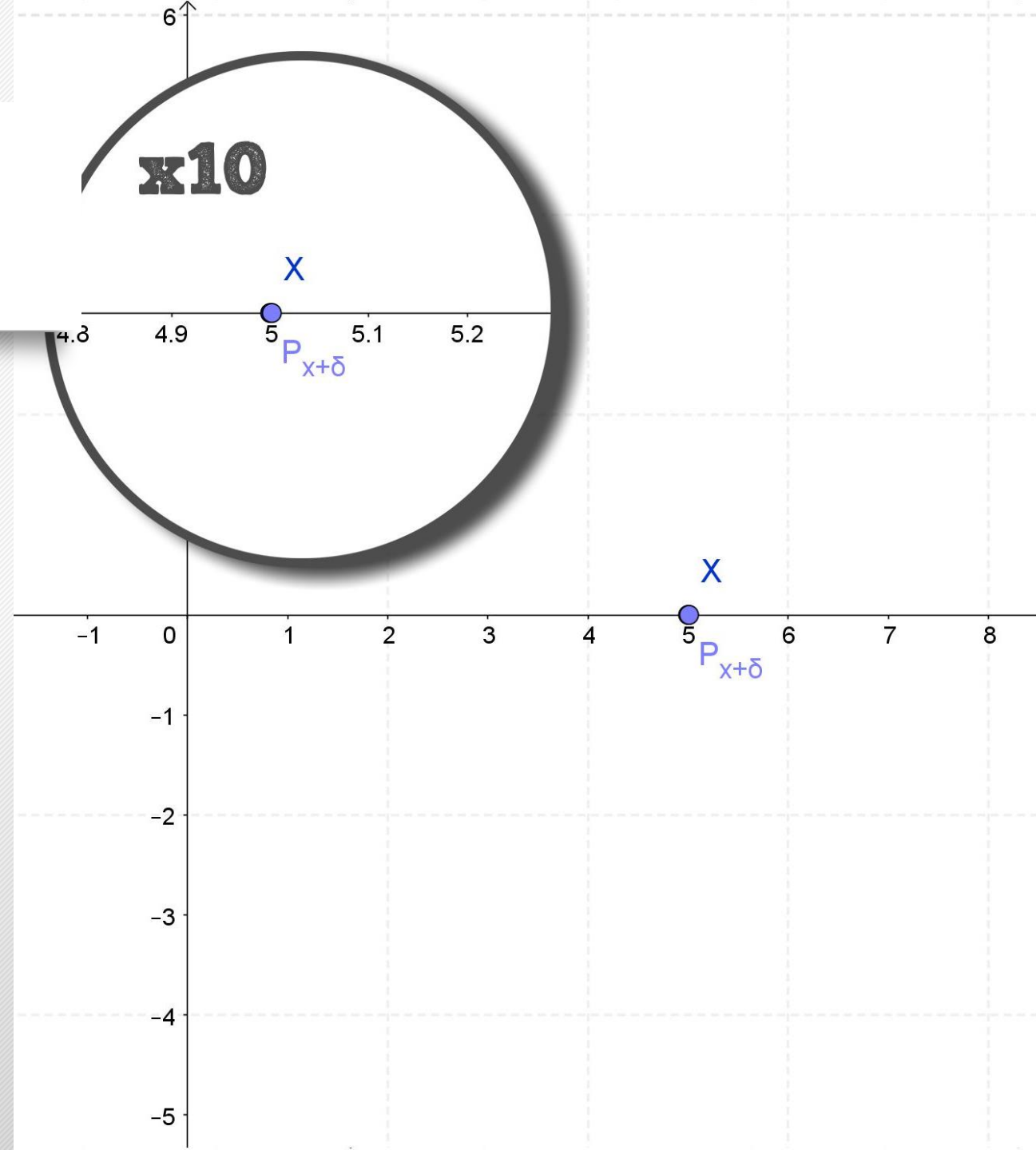
# Microscopi (2)

- Il problema nasce con gli infinitesimi:
  - un infinitesimo è, per definizione, più piccolo di ogni numero reale positivo
- Quindi gli **zoom standard**  $\times n$  non hanno un ingrandimento sufficiente:  
un punto  $x$  e un punto infinitamente vicino  $x + \delta$  resteranno sempre **indistinguibili**



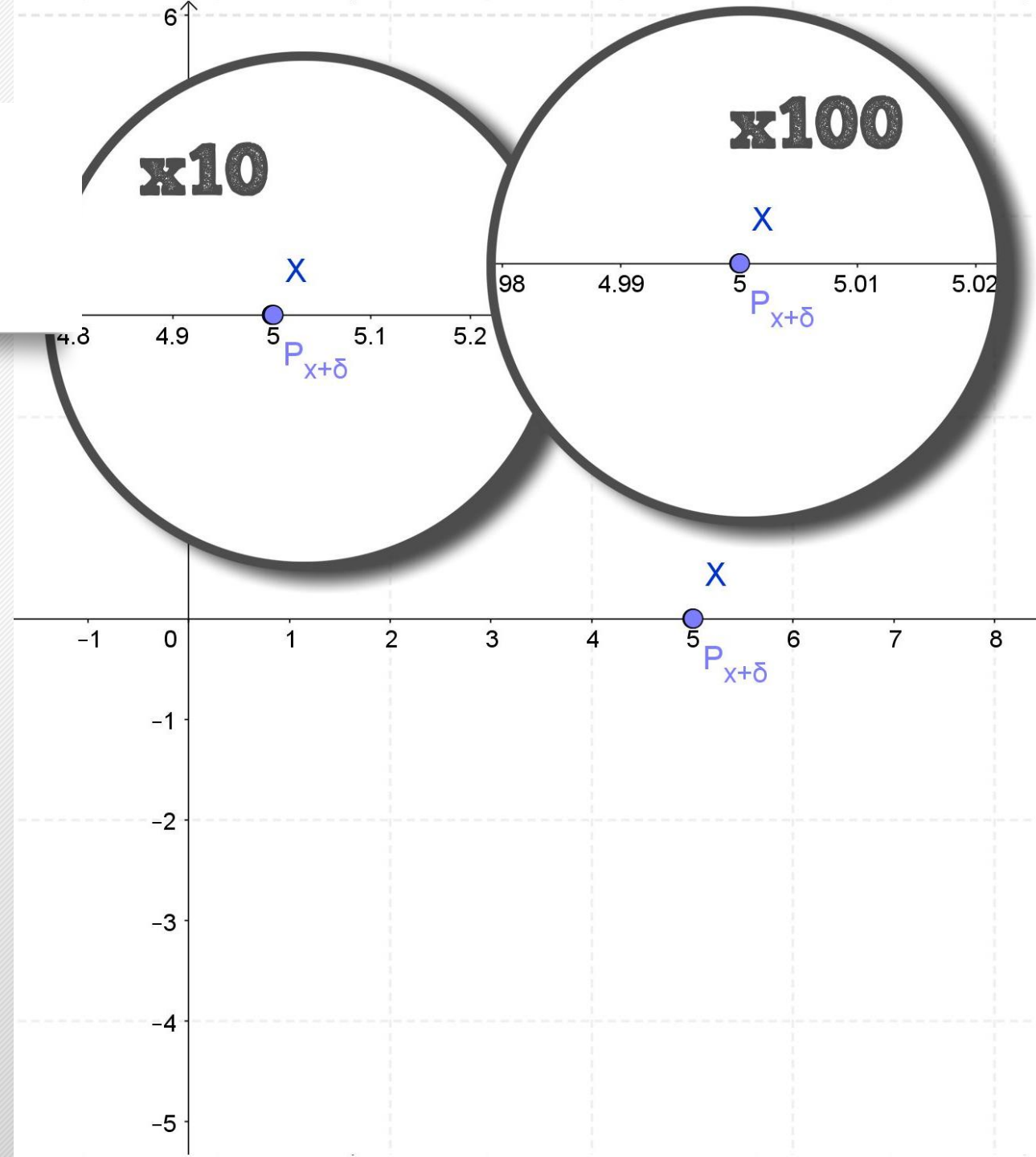
## Microscopi (2)

- Il problema nasce con gli infinitesimi:
  - un infinitesimo è, per definizione, più piccolo di ogni numero reale positivo
- Quindi gli **zoom standard**  $\times n$  non hanno un ingrandimento sufficiente:  
un punto  $x$  e un punto infinitamente vicino  $x + \delta$  resteranno sempre **indistinguibili**



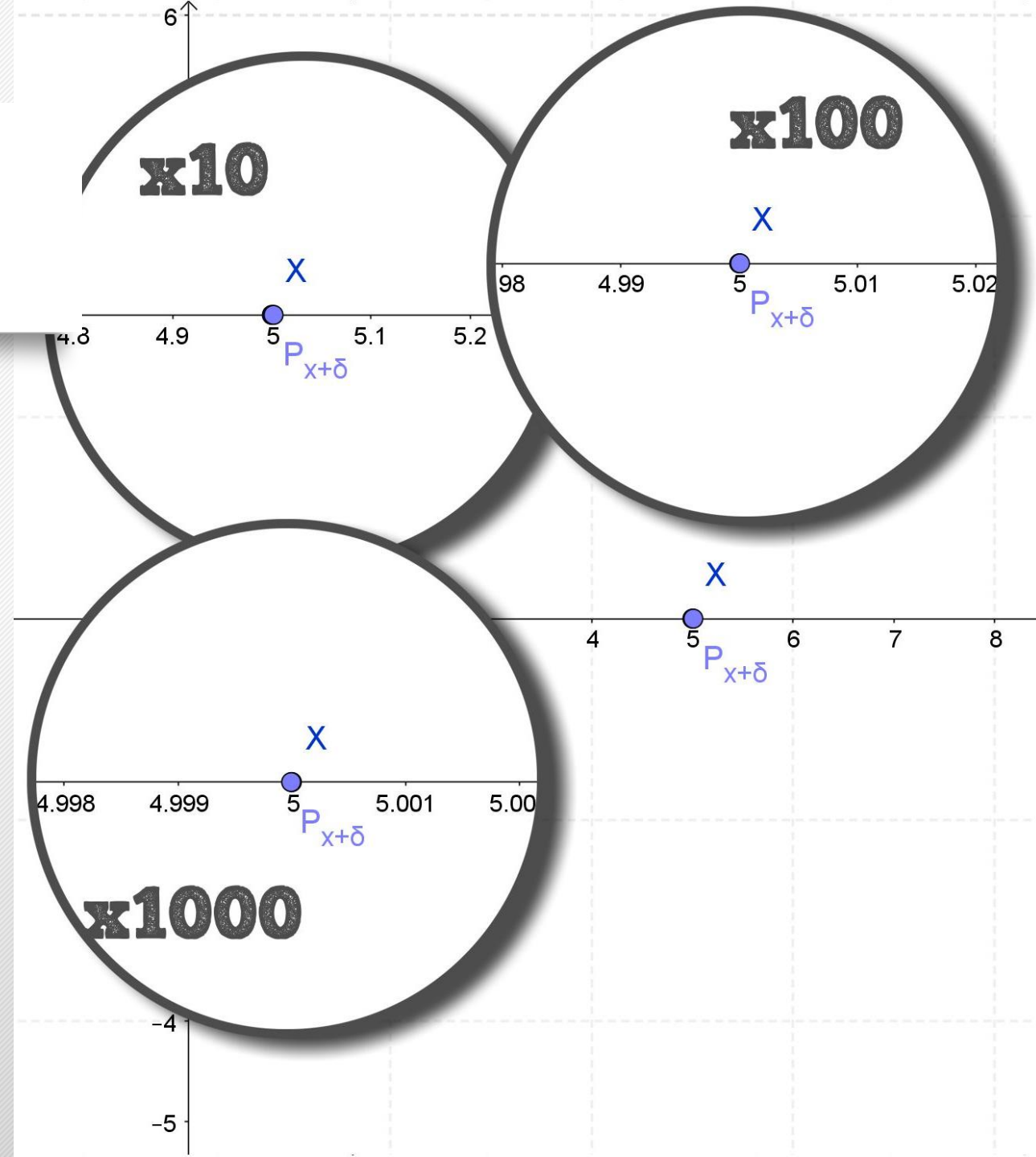
## Microscopi (2)

- Il problema nasce con gli infinitesimi:
  - un infinitesimo è, per definizione, più piccolo di ogni numero reale positivo
- Quindi gli **zoom standard**  $\times n$  non hanno un ingrandimento sufficiente:  
un punto  $x$  e un punto infinitamente vicino  $x + \delta$  resteranno sempre **indistinguibili**



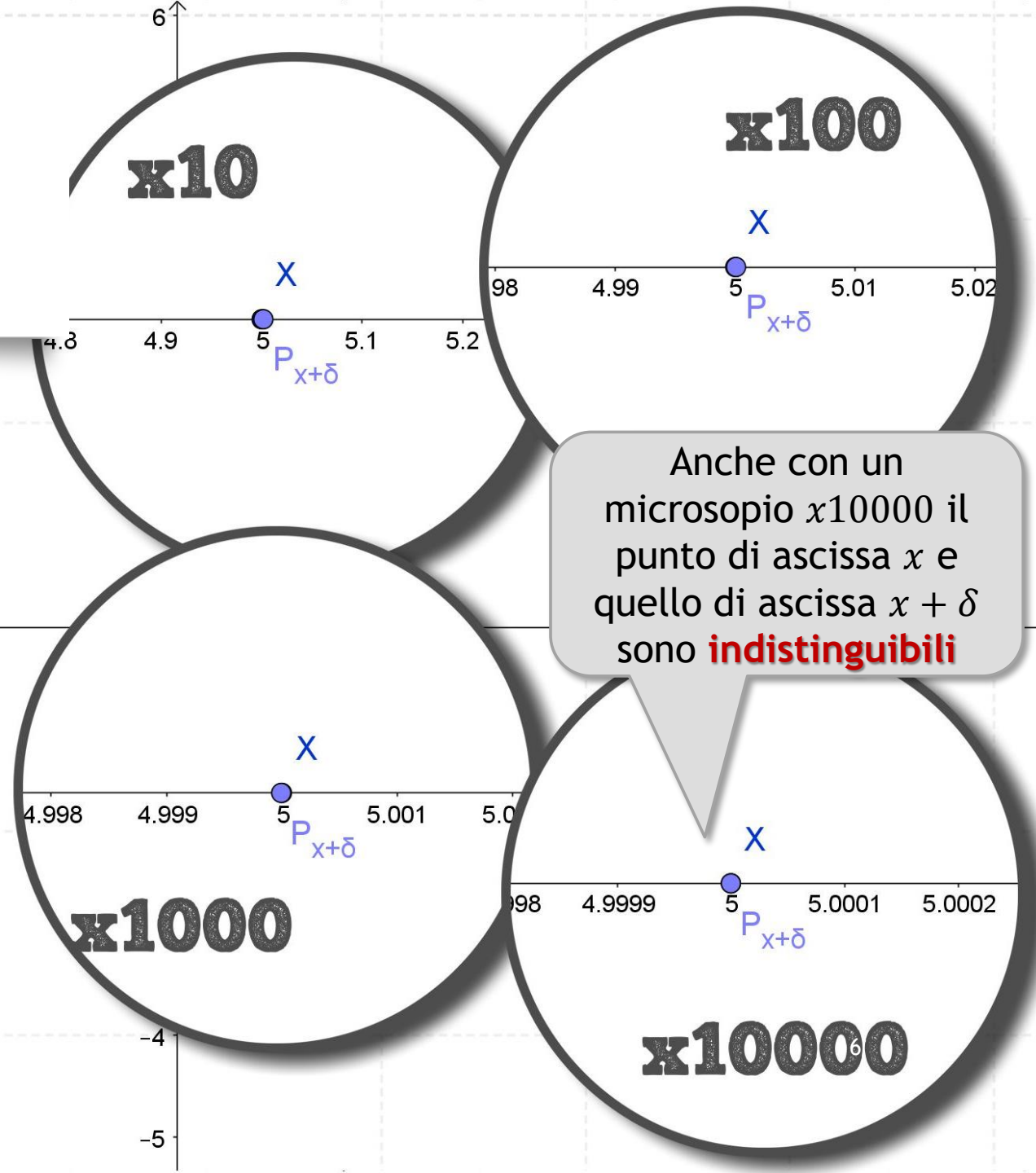
## Microscopi (2)

- Il problema nasce con gli infinitesimi:
  - un infinitesimo è, per definizione, più piccolo di ogni numero reale positivo
- Quindi gli **zoom standard**  $\times n$  non hanno un ingrandimento sufficiente:  
un punto  $x$  e un punto infinitamente vicino  $x + \delta$  resteranno sempre **indistinguibili**



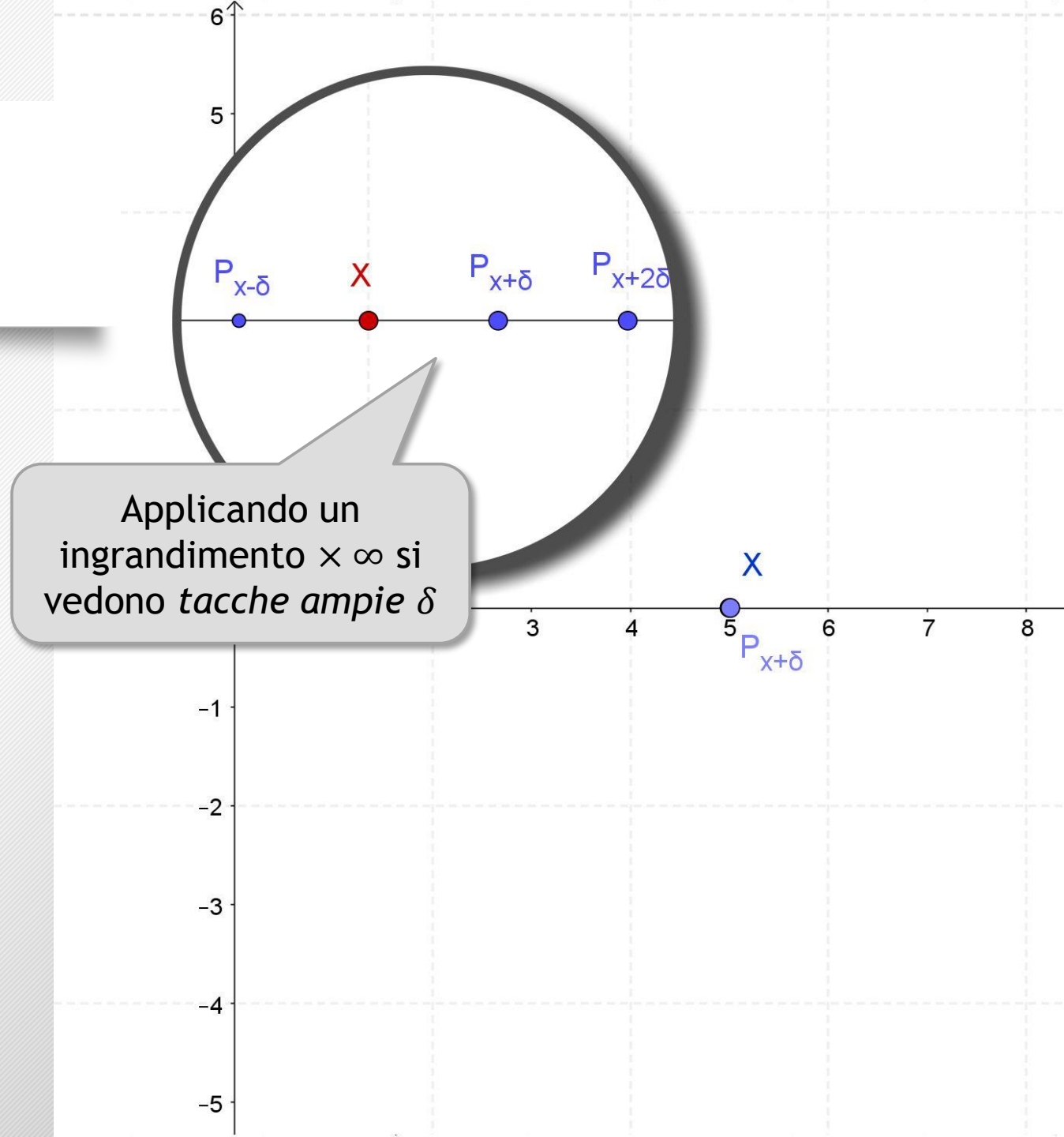
## Microscopi (2)

- Il problema nasce con gli infinitesimi:
  - un infinitesimo è, per definizione, più piccolo di ogni numero reale positivo
- Quindi gli **zoom standard**  $\times n$  non hanno un ingrandimento sufficiente: un punto  $x$  e un punto infinitamente vicino  $x + \delta$  resteranno sempre **indistinguibili**



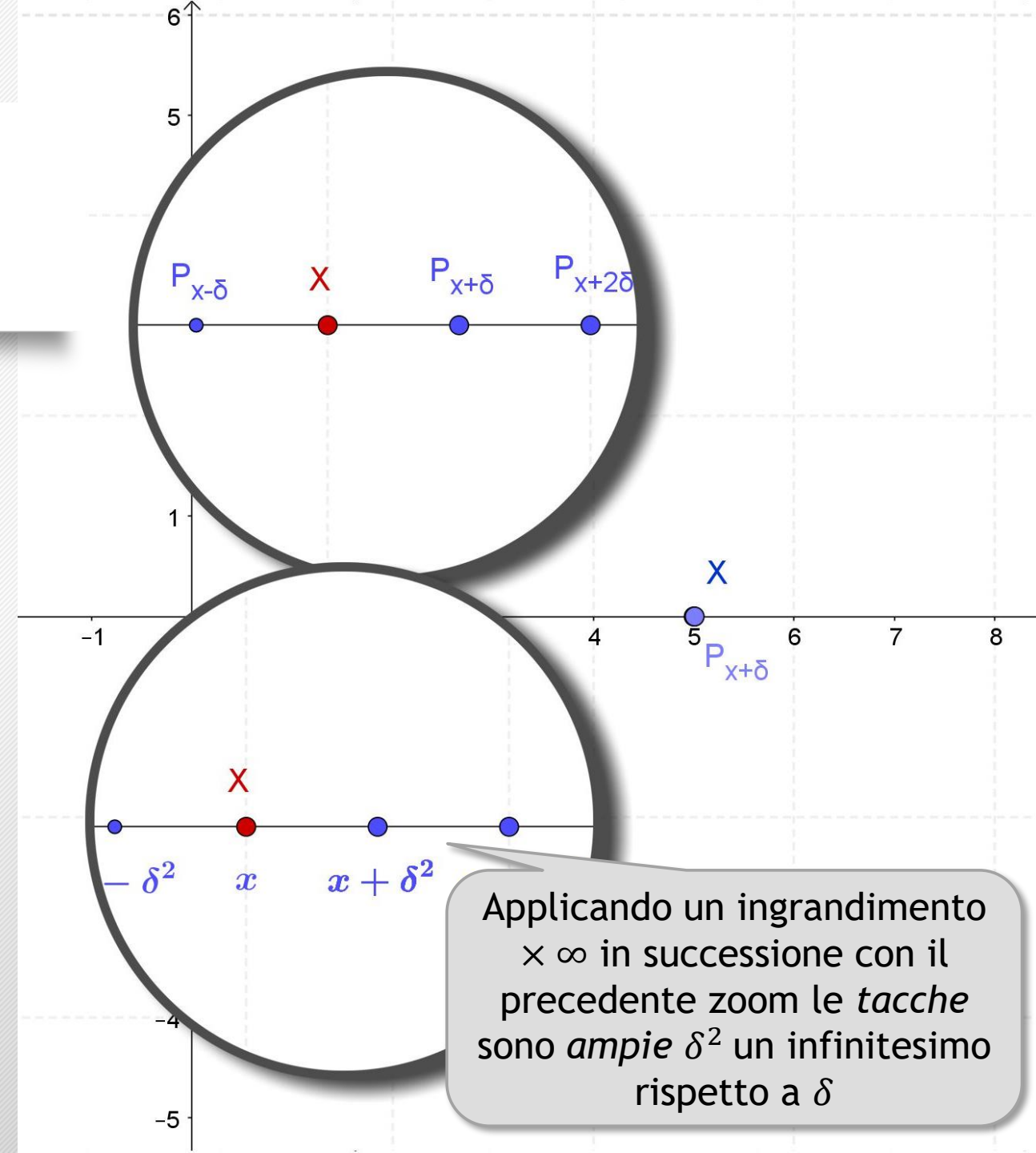
# Microscopi (3)

- Abbiamo bisogno di uno strumento **non standard**
- Un microscopio  $\times \infty$  capace di infiniti ingrandimenti
- Le *tacche* sugli assi saranno allora i multipli dell'infinitesimo in questione
  - i numeri standard non saranno più visibili
- Usando più volte lo zoom  $\times \infty$  potremo vedere numeri che sono infinitesimi anche rispetto a un infinitesimo



# Microscopi (3)

- Abbiamo bisogno di uno strumento **non standard**
- Un microscopio  $\times \infty$  capace di infiniti ingrandimenti
- Le *tacche* sugli assi saranno allora i multipli dell'infinitesimo in questione
  - i numeri standard non saranno più visibili
- Usando più volte lo zoom  $\times \infty$  potremo vedere numeri che sono infinitesimi anche rispetto a un infinitesimo



# Operazioni: la somma

19

La somma di infinitesimi può anche essere nulla:  $\delta + (-\delta) = 0$

La somma di finiti non infinitesimi può anche essere nulla:  $a + (-a) = 0$

| +          | <b>inn</b> | <b>fni</b> | <b>I</b> |
|------------|------------|------------|----------|
| <b>inn</b> | <b>i</b>   | <b>fni</b> | <b>I</b> |
| <b>fni</b> | <b>fni</b> | <b>f</b>   | <b>I</b> |
| <b>I</b>   | <b>I</b>   | <b>I</b>   | <b>?</b> |

La somma di infiniti può essere un infinito ma anche nulla o addirittura un infinitesimo non nullo:  $(N + \varepsilon) + (-N) = \varepsilon$

Analisi non standard  
Il laboratorio  
Piano delle attività  
Definizioni  
Microscopi  
Tipologia  
**Operazioni**  
Il postulato di Eudosso  
Un esercizio  
Altre definizioni  
Parte standard  
Alcuni problemi  
Derivata  
Applicazioni  
Una prova di verifica  
Comportamento agli estremi  
Esponenziali e logaritmi  
Equazioni differenziali

# Operazioni: il prodotto

Il prodotto di un infinito per un infinitesimo non nullo può anche essere un finito non infinitesimo:  $M \cdot \frac{1}{M} = 1 \dots$

... ma anche un infinitesimo non nullo:  $M \cdot \frac{1}{M^2} = \frac{1}{M} \dots$

| $\times$   | <b>inn</b> | <b>fni</b> | <b>I</b> |
|------------|------------|------------|----------|
| <b>inn</b> | <b>inn</b> | <b>inn</b> | <b>?</b> |
| <b>fni</b> | <b>inn</b> | <b>fni</b> | <b>I</b> |
| <b>I</b>   | <b>?</b>   | <b>I</b>   | <b>I</b> |

| $x$        | $1/x$      |
|------------|------------|
| <b>inn</b> | <b>I</b>   |
| <b>fni</b> | <b>fni</b> |
| <b>I</b>   | <b>inn</b> |

... o un infinito:  

$$M^2 \cdot \frac{1}{M} = M$$

20

Analisi non standard  
 Il laboratorio  
 Piano delle attività  
 Definizioni  
 Microscopi  
 Tipologia  
**Operazioni**  
 Il postulato di Eudosso  
 Un esercizio  
 Altre definizioni  
 Parte standard  
 Alcuni problemi  
 Derivata  
 Applicazioni  
 Una prova di verifica  
 Comportamento agli estremi  
 Esponenziali e logaritmi  
 Equazioni differenziali

# Il postulato di Eudosso-Archimede

22

- Il postulato di Eudosso-Archimede può essere espresso in una di queste due forme:
  - Dati due segmenti diversi, esiste sempre un multiplo del minore che supera il maggiore
  - Dati due segmenti diversi, esiste sempre un sottomultiplo del maggiore che è più piccolo del minore
- In pratica: è sempre possibile esprimere la lunghezza di un segmento con un numero intero, un multiplo o un sottomultiplo dell'unità di misura scelta (non necessariamente razionale)
- Il postulato esclude l'esistenza di infiniti e infinitesimi

**Per definire gli iperreali dobbiamo rinunciare a questo assioma!**

Analisi non  
standard  
Il laboratorio  
Piano delle attività  
Definizioni  
Microscopi  
Tipologia  
Operazioni  
**Il postulato di  
Eudosso**  
Un esercizio  
Altre definizioni  
Parte standard  
Alcuni problemi  
Derivata  
Applicazioni  
Una prova di  
verifica  
Comportamento  
agli estremi  
Esponenziali e  
logaritmi  
Equazioni  
differenziali

# Un esercizio

23



- Consideriamo l'espressione  $\frac{x^2-5x+6}{x-2}$ :
  - se calcolata per  $x = 2$  è impossibile (numeratore e denominatore sono entrambi nulli)
- Proviamo a calcolarla per  $x = 2 + \alpha$  che è un numero infinitamente vicino a 2 :
$$\frac{(2 + \alpha)^2 - 5(2 + \alpha) + 6}{2 + \alpha - 2} = \frac{4 + 4\alpha + \alpha^2 - 10 - 5\alpha + 6}{\alpha} = \frac{\alpha^2 - \alpha}{\alpha}$$
- A questo punto possiamo raccogliere e semplificare:  $\frac{\alpha(\alpha-1)}{\alpha} = \alpha - 1$
- Il risultato è **infinitamente vicino** a  $-1$

In pratica, senza un microscopio non standard  $\times \infty$  i due numeri  $\alpha - 1$  e  $-1$  sono **indistinguibili**

Analisi non standard  
Il laboratorio  
Piano delle attività  
Definizioni  
Microscopi  
Tipologia  
Operazioni  
Il postulato di Eudosso  
**Un esercizio**  
Altre definizioni  
Parte standard  
Alcuni problemi  
Derivata  
Applicazioni  
Una prova di verifica  
Comportamento agli estremi  
Esponenziali e logaritmi  
Equazioni differenziali

# Ordinamento di infinitesimi (1)



24

- $\varepsilon$  è **un infinitesimo di ordine superiore** rispetto a  $\delta$  se  $\varepsilon/\delta$  è un infinitesimo (o se  $\delta/\varepsilon$  è un infinito) :  $\varepsilon = \mathbf{o}(\delta)$ 
  - p.es.:  $\varepsilon^3$  è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a  $\varepsilon^2 + 5\varepsilon$  infatti
$$\frac{\varepsilon^3}{\varepsilon^2 + 5\varepsilon} = \frac{\varepsilon^3}{\varepsilon^3 \left( \frac{1}{\varepsilon} + \frac{5}{\varepsilon^2} \right)} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon} + \frac{5}{\varepsilon^2}}$$
che è un infinitesimo perché  $1/\varepsilon$  e  $5/\varepsilon^2$  sono infiniti
- Due infinitesimi  $\varepsilon, \delta$  sono dello stesso ordine se  $\varepsilon/\delta = a$

Analisi non  
standard  
Il laboratorio  
Piano delle attività  
Definizioni  
Microscopi  
Tipologia  
Operazioni  
Il postulato di  
Eudosso  
Un esercizio  
**Altre definizioni**  
Parte standard  
Alcuni problemi

Dove  $a$  è uno  
standard

verifica  
Comportamento  
agli estremi  
Esponenziali e  
logaritmi  
Equazioni  
differenziali

# Ordinamento di infinitesimi (2)



25

- $\varepsilon$  è **un infinitesimo di ordine inferiore** rispetto a  $\delta$  se  $\varepsilon/\delta$  è un infinito (o se  $\delta/\varepsilon$  è un infinitesimo) :  $\delta = o(\varepsilon)$ 
  - p.es.:  $\varepsilon^2 + 5\varepsilon$  è un infinitesimo di ordine inferiore rispetto a  $\varepsilon^3$  infatti
$$\frac{\varepsilon^2 + 5\varepsilon}{\varepsilon^3} = \frac{\varepsilon^3 \left( \frac{1}{\varepsilon} + \frac{5}{\varepsilon^2} \right)}{\varepsilon^3} = \frac{1}{\varepsilon} + \frac{5}{\varepsilon^2}$$
che è un infinito perché  $1/\varepsilon$  e  $5/\varepsilon^2$  sono infiniti
- Quindi  $\varepsilon > \delta$  se  $\delta = o(\varepsilon)$

Analisi non  
standard  
Il laboratorio

Non c'è una  
simbologia  
specifica per  
*ordine inferiore*

Eudosso  
Un esercizio  
**Altre definizioni**  
Parte standard  
Alcuni problemi  
Derivata  
Applicazioni  
Una prova di  
verifica  
Comportamento  
agli estremi  
Esponenziali e  
logaritmi  
Equazioni  
differenziali

# Parte standard

26

- Se  $x$  è un numero iperreale si può scrivere come  $x = s + \beta$  dove:
  - $s$  è la sua **parte standard**  $s = \text{std}(x)$  (anche pari a zero quando il numero è un infinitesimo)
  - $\beta$  è la sua **parte infinitesima** (anche nulla quando  $x$  è un numero standard)
- È importante notare che, se  $x, y$  sono due iperreali:
  - $\text{std}(x + y) = \text{std}(x) + \text{std}(y)$
  - La somma delle parti infinitesime è ancora un infinitesimo
- Esempio  $3 + \delta$  quindi:
  - $\text{std}(3 + \delta) = 3$
  - $\delta$  è la parte infinitesima di  $3 + \delta$

Analisi non  
standard  
Il laboratorio  
Piano delle attività  
Definizioni  
Microscopi  
Tipologia  
Operazioni  
Il postulato di  
Eudosso  
Un esercizio  
Altre definizioni  
**Parte standard**  
Alcuni problemi  
Derivata  
Applicazioni  
Una prova di  
verifica  
Comportamento  
agli estremi  
Esponenziali e  
logaritmi  
Equazioni  
differenziali

# Iperreali

Introduzione di un nuovo insieme numerico

## Problemi

Gli iperreali aiutano a risolvere problemi

## Derivata

La derivata di una funzione

## Applicazioni

Applicazioni alla geometria analitica, alla fisica e allo studio di funzioni

## Ritorno a *Hyperreal mountain*

Funzioni esponenziali e logaritmiche

## Valutazione

Cosa ne pensano studentesse e studenti

# Un problema



28

- Vogliamo determinare l'ascissa del vertice di una parabola di equazione  $y = ax^2 + bx + c$  (con asse parallelo all'asse delle ordinate)
- Il vertice della parabola è caratterizzato dal fatto di essere l'unico punto per il quale un microscopio ci mostra un segmento di tangenza orizzontale

Usando un linguaggio orientato agli infinitesimi, questo significa che **se ci spostiamo di un tratto infinitesimo dall'ascissa del vertice, allora la variazione di ordinata è un infinitesimo di ordine superiore allo spostamento infinitesimo in ascissa**

Analisi non standard  
Il laboratorio  
Piano delle attività  
Definizioni  
Microscopi  
Tipologia  
Operazioni  
Il postulato di Eudosso  
Un esercizio  
Altre definizioni  
Parte standard  
**Alcuni problemi**  
Derivata  
Applicazioni  
Una prova di verifica  
Comportamento agli estremi  
Esponenziali e logaritmi  
Equazioni differenziali

# Operativamente (1) ...

- Se  $dx = (x + \delta) - x = \delta$  con  $\delta$  infinitesimo

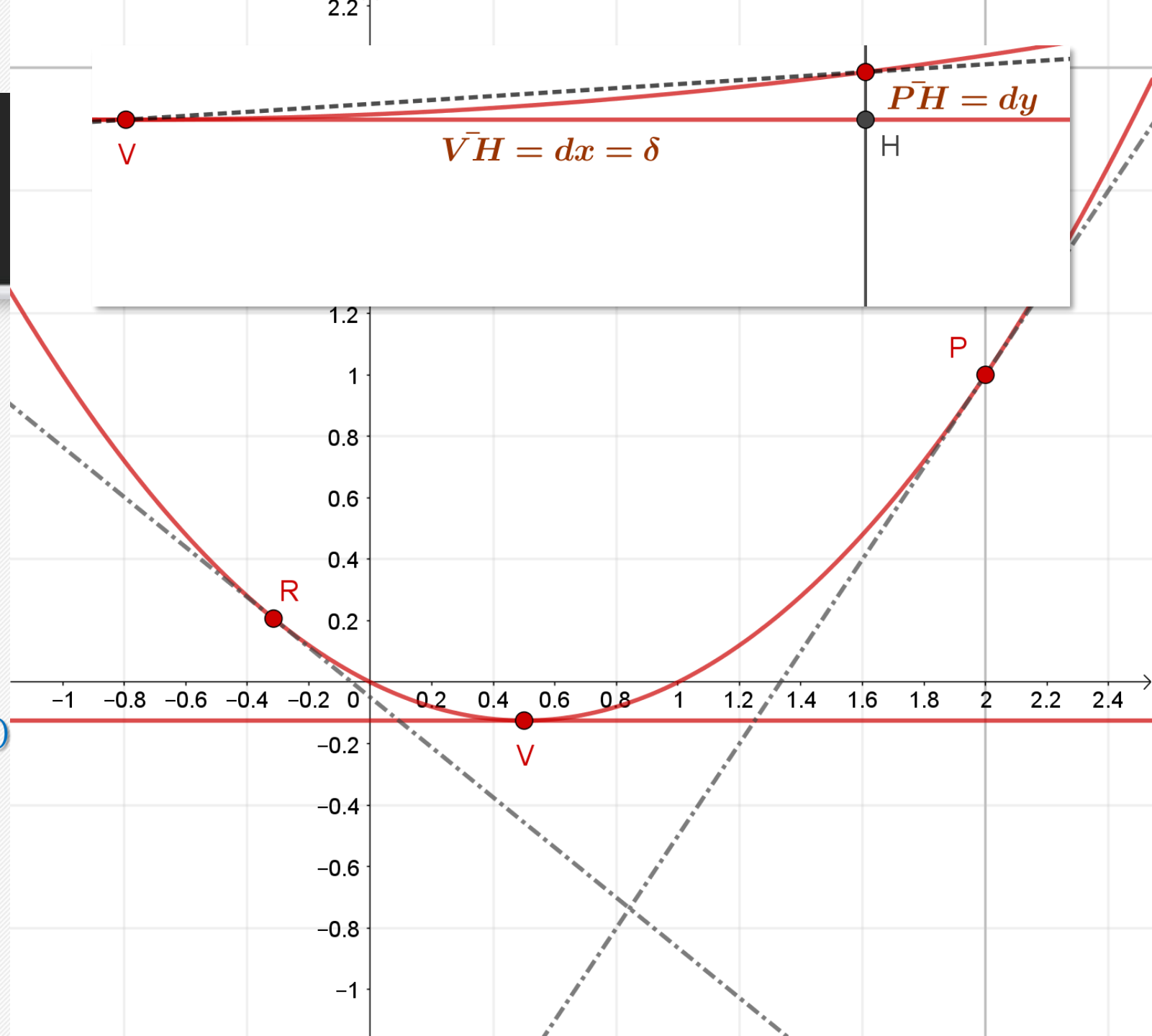
- La variazione dell'ordinata è

$dy = y(x + \delta) - y(x)$  da cui:

$$a(x + \delta)^2 + b(x + \delta) + c - (ax^2 + bx + c)$$

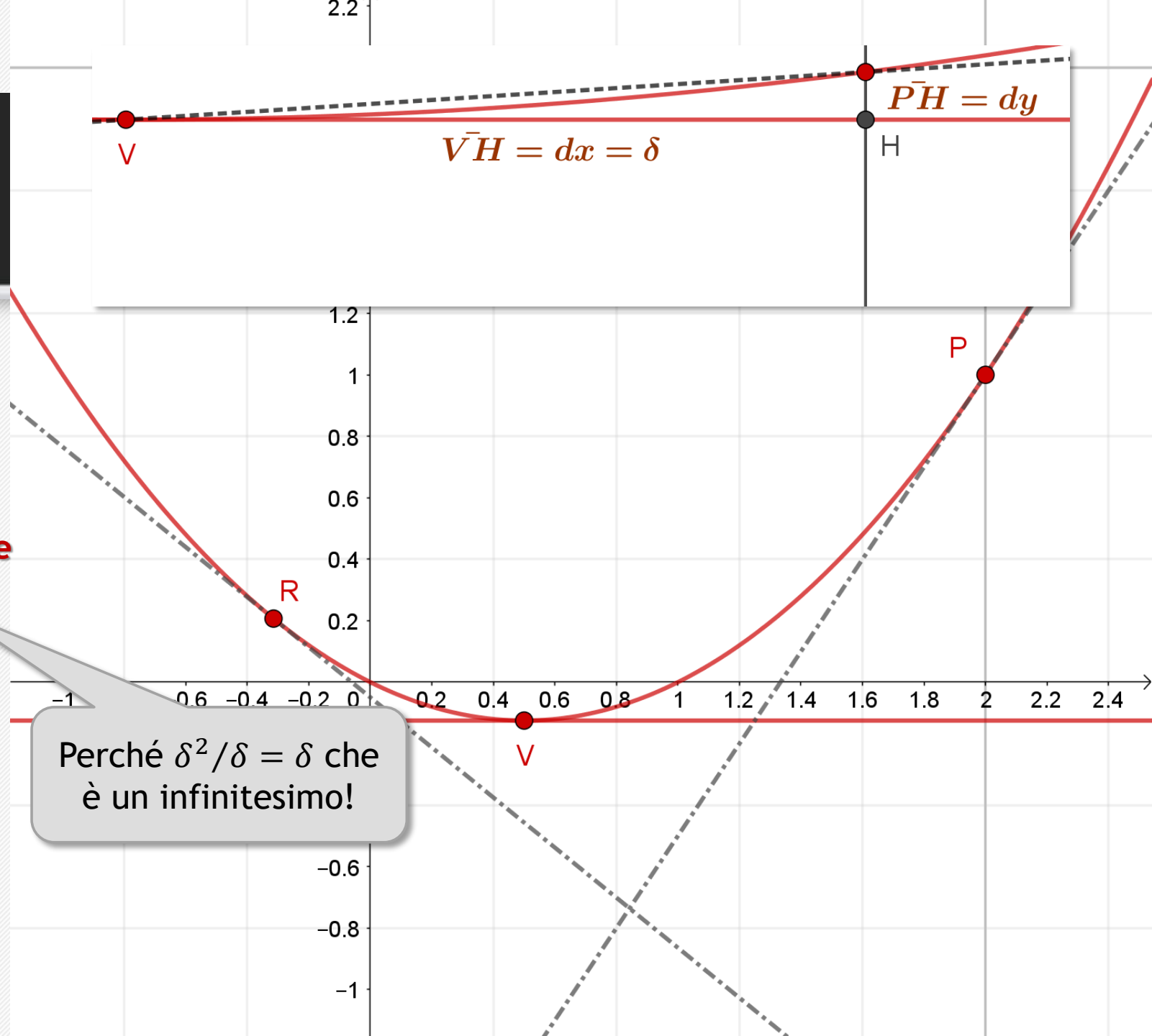
- e quindi:

$$2ax\delta + \delta^2 + b\delta = (2ax + b)\delta + \delta^2$$



## Operativamente (2) ...

- Il termine  $(2ax + b)\delta$  è un infinitesimo **dello stesso ordine** di  $\delta = dx$
- Il termine  $\delta^2$  è un infinitesimo **di ordine superiore** rispetto a  $\delta = dx$
- Quindi, perché la  $x$  sia l'ascissa del vertice dovrebbe *scompare* il termine  $(2ax + b)\delta$
- Quindi  $2ax + b = 0$  da cui  $x = -\frac{b}{2a}$



# Un secondo problema



31

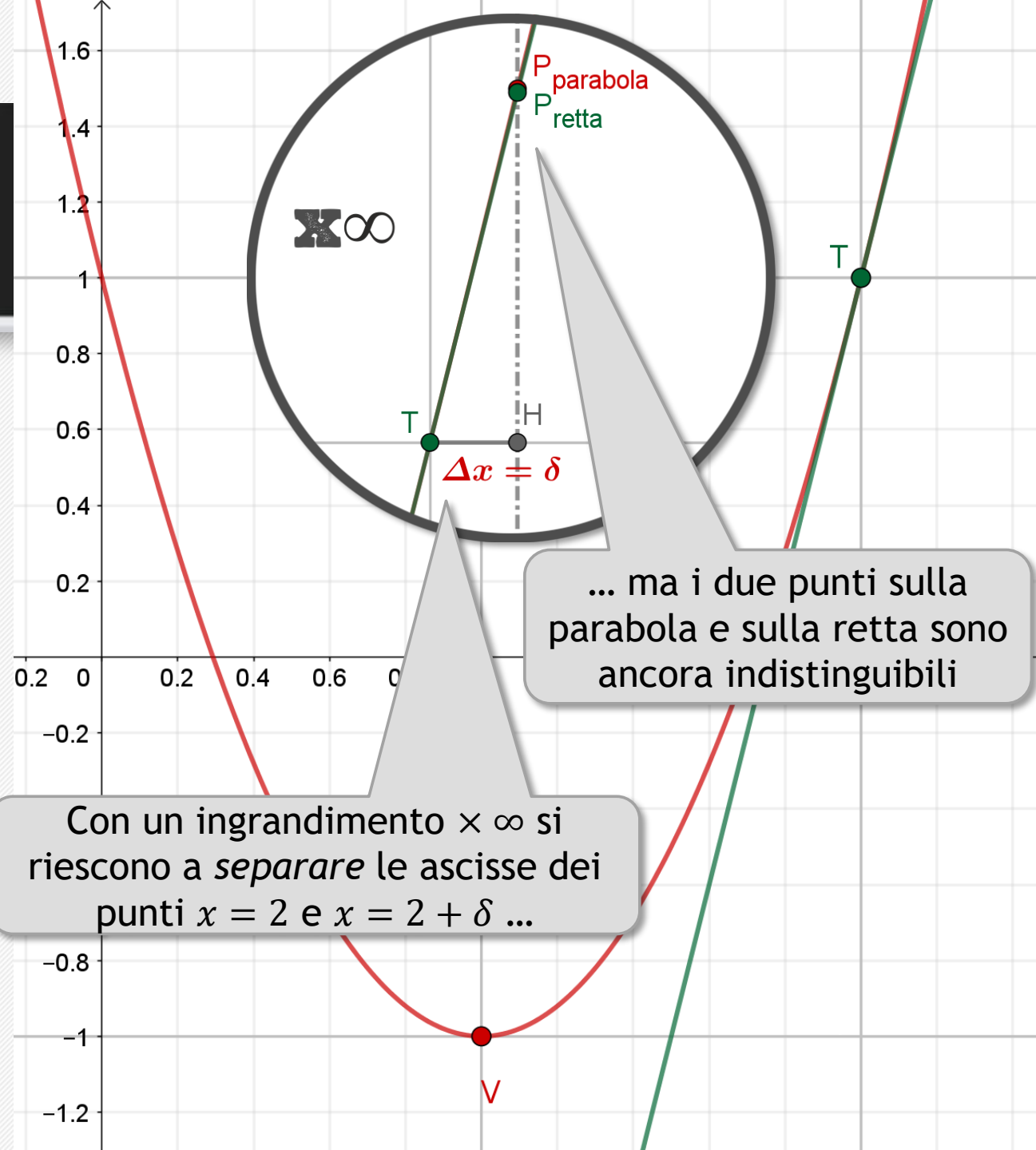
- Vogliamo determinare la tangente alla parabola  $y = 2x^2 - 4x + 1$  nel suo punto  $T(2,1)$
- La tangente è l'unica retta per la quale la differenza tra la sua ordinata (la retta) e quella della funzione (la parabola), in un punto a distanza infinitesima dal punto di contatto, risulta essere **un infinitesimo di ordine superiore** rispetto all'incremento infinitesimo in ascissa
- In altre parole, **spostandoci di un infinitesimo** dal punto di contatto, **retta tangente e parabola sono infinitamente vicine**

Più vicine di quanto lo siano  $x + \delta$  e  $x$

Analisi non  
standard  
Il laboratorio  
Piano delle attività  
Definizioni  
Microscopi  
Tipologia  
Operazioni  
Il postulato di  
Eudosso  
Un esercizio  
Altre definizioni  
Parte standard  
**Alcuni problemi**  
Derivata  
Applicazioni  
Una prova di  
verifica  
Comportamento  
agli estremi  
Esponenziali e  
logaritmi  
Equazioni  
differenziali

# Operativamente (1) ...

- La retta passante per  $T(2,1)$  è  $y = mx - 2m + 1$
- Consideriamo il punto di ascissa  $2 + \delta$  con  $\delta$  infinitesimo:
  - l'ordinata della retta in  $2 + \delta$  è
$$m(2 + \delta) - 2m + 1 = 2m + m\delta - 2m + 1 = \mathbf{m\delta + 1}$$
  - l'ordinata della parabola in  $2 + \delta$  è
$$2(2 + \delta)^2 - 4(2 + \delta) + 1 = 8 + 8\delta + 2\delta^2 - 8 - 4\delta + 1 = \mathbf{4\delta + 2\delta^2 + 1}$$



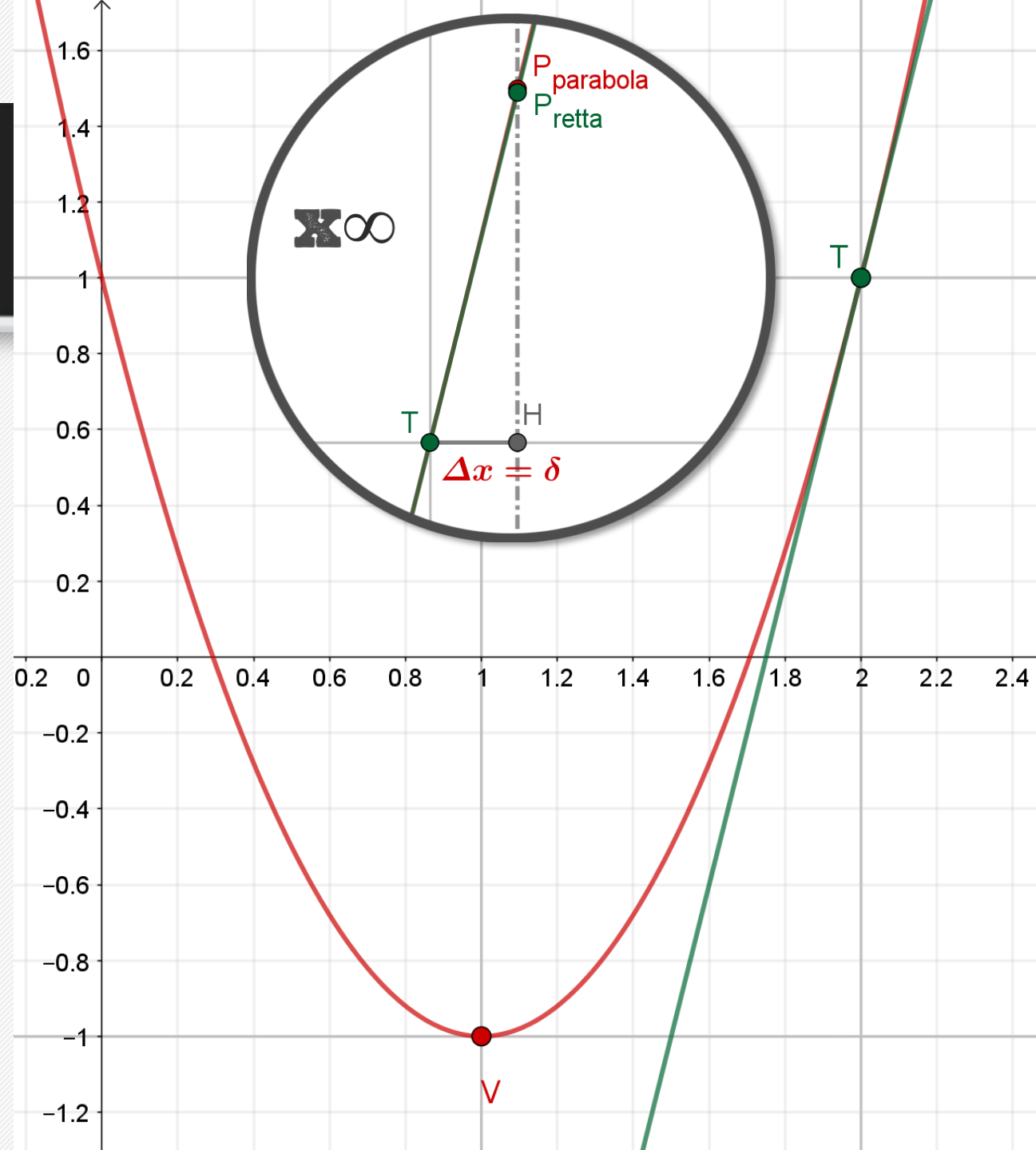
# Operativamente (2) ...

- La differenza tra ordinata della parabola e della retta è:

$$4\delta + 2\delta^2 + 1 - (m\delta + 1) = (4 - m)\delta + 2\delta^2$$

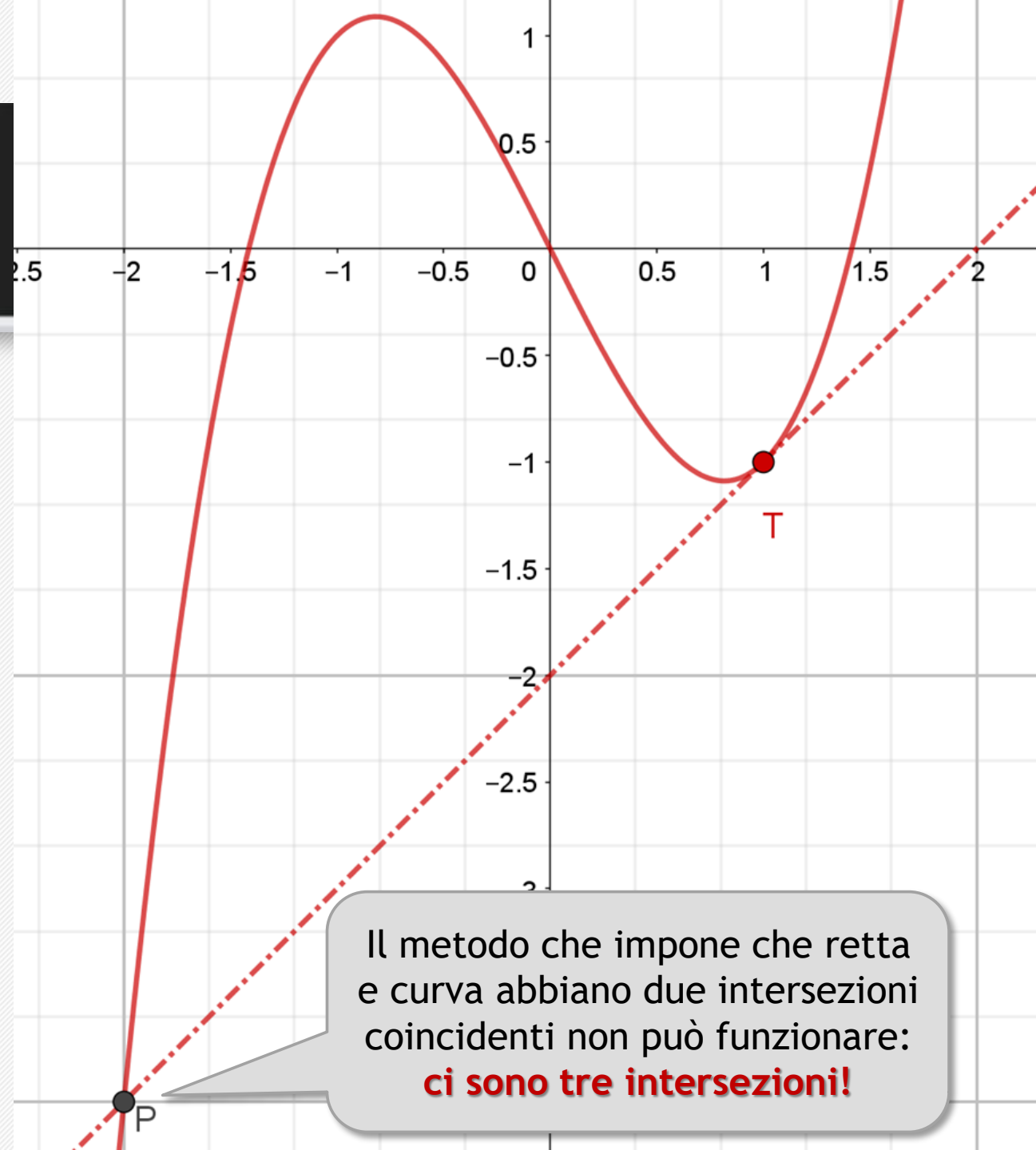
- Perché questa differenza sia un infinitesimo di ordine superiore rispetto all'incremento dell'ascissa deve essere  $(4 - m) = 0$
- Ma allora  $m = 4$  è la pendenza della retta tangente
- Quindi la retta tangente ha equazione

$$y = 4x - 7$$



# Tangente a una cubica (1)

- Trovare la tangente alla cubica di equazione  $y = x^3 - 2x$  nel suo punto  $T(1, -1)$
- La retta per  $T$ :  $y = mx - m - 1$
- Consideriamo il punto di ascissa  $1 + \delta$  con  $\delta$  infinitesimo:
  - l'ordinata della retta in  $1 + \delta$  è  
 $m(1 + \delta) - m - 1 = m + m\delta - m - 1 = \mathbf{m\delta - 1}$
  - l'ordinata della cubica in  $1 + \delta$  è  
 $(1 + \delta)^3 - 2(1 + \delta) = \mathbf{\delta + 3\delta^2 + \delta^3 - 1}$

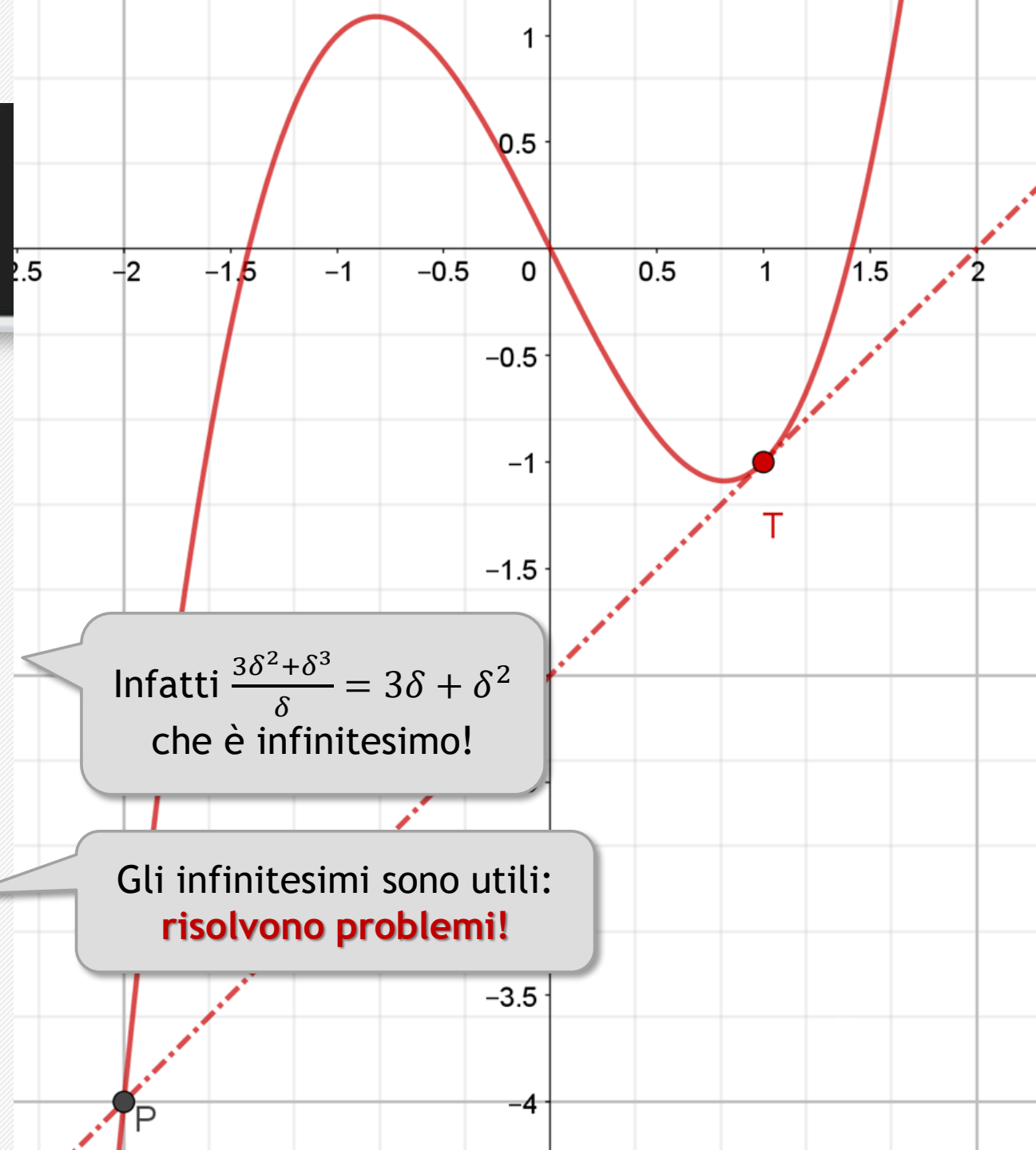


# Tangente a una cubica (2)

- La differenza di ordinate è:

$$\begin{aligned}\delta + 3\delta^2 + \delta^3 - 1 - (m\delta - 1) &= \\ &= (1 - m)\delta + 3\delta^2 + \delta^3\end{aligned}$$

- $3\delta^2$  e  $\delta^3$  sono infinitesimi di ordine superiore a  $\delta$  quindi è sufficiente che  $(1 - m) = 0$  per cui  $m = +1$
- L'equazione della retta tangente è  $y = x - 2$



# Qui o dappertutto?

- È bene far notare che il metodo del discriminante in questo esempio non potrebbe funzionare:
  - la retta tangente in  $T$  ha due intersezioni con la curva
  - due coincidenti in  $T$  e un'altra in  $P$
- Infatti il metodo del discriminante richiede che la retta tangente e la curva abbiano due sole intersezioni (coincidenti) in tutto il dominio
- Ma il metodo che abbiamo usato **lavora solo localmente**: in punti infinitamente vicini al punto di tangenza

Il metodo che usa gli infinitesimi richiede che la variazione delle ordinate sia di un infinitesimo di ordine superiore rispetto alla variazione delle ascisse ...



... variazioni calcolate per due punti **infinitamente vicini** quindi il processo non è *disturbato* dalla presenza dell'ulteriore intersezione!

Analisi non standard  
Il laboratorio  
Piano delle attività  
Definizioni  
Microscopi  
Tipologia  
Operazioni  
Il postulato di Eudosso  
Un esercizio  
Altre definizioni  
Parte standard

Esponenziali e logaritmi  
Equazioni differenziali

# Un terzo problema

37

- Abbiamo un punto materiale che si muove di moto rettilineo uniforme con velocità iniziale  $v_0$  e accelerazione  $a > 0$  a partire da una posizione  $s_0$
- L'equazione del moto sarà  $s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + s_0$ , vogliamo calcolare la velocità istantanea  $v$
- Per definizione la velocità istantanea sarà:

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = \frac{s(t + dt) - s(t)}{(t + dt) - t}$$

Ricordiamo che la velocità media è  $v_{media} = \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{(t+\Delta t) - t}$  ma in questa espressione  $dt$  è un infinitesimo

Usando un linguaggio orientato agli infinitesimi, è il rapporto tra la variazione dello spazio e il tempo trascorso **per un intervallo di tempo infinitesimo  $dt$**

Analisi non standard  
Il laboratorio  
Piano delle attività  
Definizioni  
Microscopi  
Tipologia  
Operazioni  
Il postulato di Eudosso

Una prova di verifica  
Comportamento agli estremi  
Esponenziali e logaritmi  
Equazioni differenziali

# Operativamente

Gli infinitesimi continuano  
a **risolvere problemi!**

38

- La posizione del punto all'istante  $t$  è  $s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + s_0$
- La posizione all'istante  $t + \alpha$ , dove  $\alpha$  è un tempo infinitesimo, è:  
$$s(t + \alpha) = \frac{1}{2}a(t + \alpha)^2 + v_0(t + \alpha) + s_0 = \frac{1}{2}at^2 + aat + \frac{1}{2}a\alpha^2 + v_0t + v_0\alpha + s_0$$

- per cui:

$$s(t + \alpha) - s(t) = \frac{1}{2}at^2 + \color{red}{aat} + \color{red}{\frac{1}{2}a\alpha^2} + v_0t + \color{red}{v_0\alpha} + s_0 - \frac{1}{2}at^2 - v_0t - s_0$$

- ma allora:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\alpha(at + v_0) + \frac{1}{2}a\alpha^2}{\alpha} = at + v_0 + \frac{1}{2}a\alpha$$

- Considerato che  $\alpha$  è un infinitesimo:

$$\color{red}{v(t) = \text{std} \left( at + v_0 + \frac{1}{2}a\alpha \right) = at + v_0}$$

... che è proprio la legge  
della velocità in un moto  
uniformemente accelerato

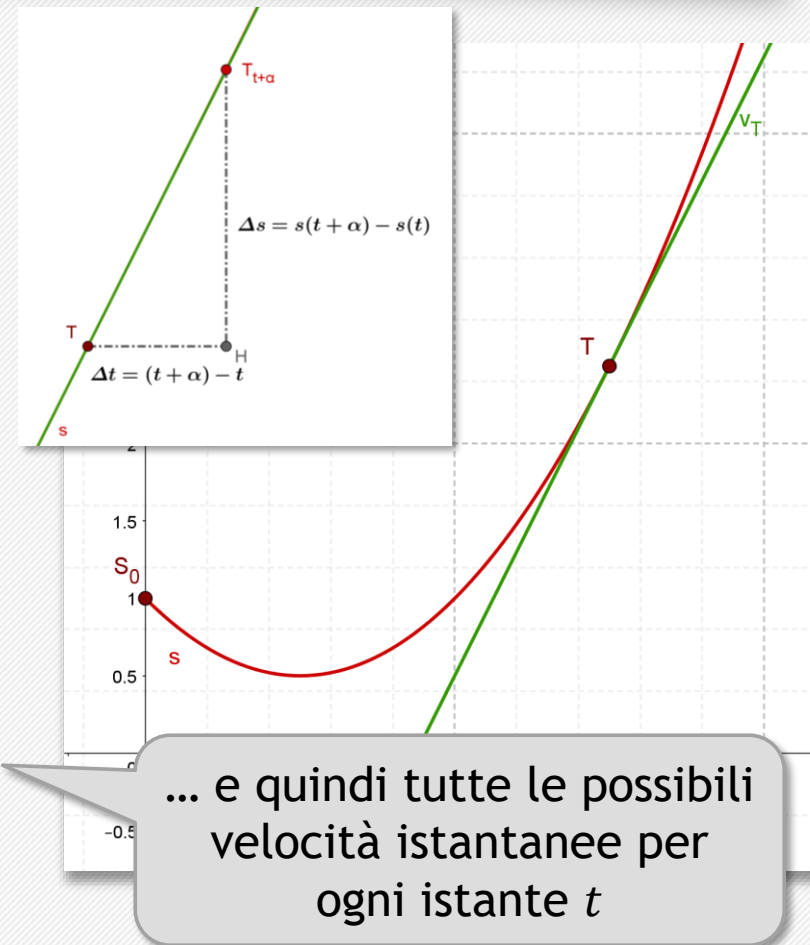
Analisi non  
standard  
Il laboratorio  
Piano delle attività  
Definizioni  
Microscopi  
Tipologia  
Operazioni  
Il postulato di  
Eudosso  
Un esercizio  
Altre definizioni  
Parte standard  
**Alcuni problemi**  
Derivata  
Applicazioni

logarithm  
Equazioni  
differenziali

# Abbiamo fatto molto di più!

39

- In realtà la soluzione è molto più *ricca* di quanto possa sembrare a prima vista:
  - **$\text{std } \frac{ds}{dt}$**  è il **tasso di variazione istantaneo** dello spazio (variazione rispetto al tempo)
  - Se rappresentiamo  $s(t)$  su un piano cartesiano il tasso di variazione istantaneo corrisponde al coefficiente angolare della retta tangente
  - Ma abbiamo risolto questo problema per un istante (per un'ascissa)  $t$  qualunque, quindi, in un certo senso:
- Abbiamo trovato **tutti i coefficienti angolari delle tangenti** alla  $s(t)$  per ogni possibile  $t \in \mathbb{R}$



Analisi non standard  
Il laboratorio  
Piano delle attività  
Definizioni  
Microscopi  
Tipologia  
Operazioni  
Il postulato di Eudosso  
Un esercizio  
Altre definizioni  
Parte standard  
**Alcuni problemi**  
Derivata  
Applicazioni  
Una prova di verifica  
Comportamento agli estremi  
Esponenziali e logaritmi  
Equazioni differenziali

# Riproviamo

40

- Vogliamo trovare la tangente a una parabola  $y = ax^2 + bx + c$  nel punto  $x$  generico con lo stesso metodo:

$$dy = y(x + \delta) - y(x) = (2ax + b)\delta + a\delta^2$$

- Quindi:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(2ax + b)\delta + a\delta^2}{\delta} = 2ax + b + a\delta$$

Ricordiamo  
che  $dx = \delta$

- Tenendo conto che  $\delta$  è infinitesimo abbiamo  $\frac{dy}{dx} \sim 2ax + b$  o meglio, che il coefficiente angolare è  **$m = \text{std} \frac{dy}{dx} = \text{std}(2ax + b + a\delta) = 2ax + b$**

**Al variare di  $x$  questa espressione fornisce il coefficiente angolare della tangente alla parabola nel suo punto di ascissa  $x$ !**

Attenzione: per un  
ascissa  $x$  qualsiasi!

Analisi non  
standard  
Il laboratorio  
Piano delle attività  
Definizioni  
Microscopi  
ologia  
erazioni  
ostulato di  
Ladosso  
Un esercizio  
Altre definizioni  
Parte standard  
**Alcuni problemi**  
Derivata  
Applicazioni  
Una prova di  
verifica  
Commentato  
ni  
ali e  
differenziali

# Ragioniamoci un po' su

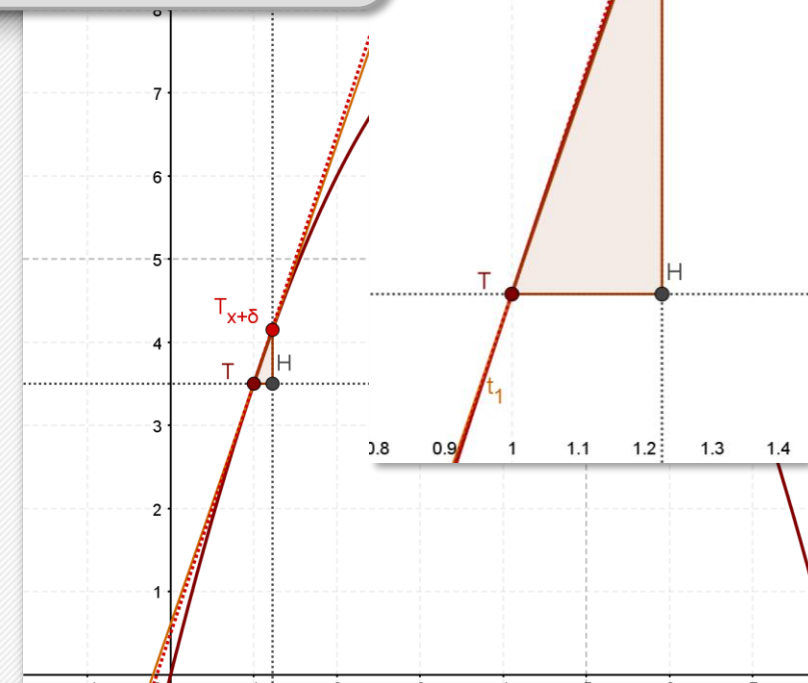
- Il **tasso di variazione medio** è il rapporto  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  tra i due punti di una parabola di ascissa  $x$  e  $x + \Delta x$
- Il **tasso di variazione**  $\text{std} \frac{dy}{dx}$  è questo rapporto calcolato tra due punti distanti un infinitesimo  $\delta$

**Equivale al coefficiente angolare della retta tangente nel punto  $x$**

- Abbiamo calcolato il tasso di variazione  $\text{std} \frac{dy}{dx} = 2ax + b$  per una parabola generica  $y = ax^2 + bx + c$

**Questa formula si può usare in una miriade di problemi sulle parabole!**

Potremmo quasi dire il **tasso di variazione istantaneo**



Con  $dy$  indichiamo la variazione infinitesima della  $y$  corrispondente alla variazione infinitesima  $dx = \delta$  della  $x$

## Iperreali

Introduzione di un nuovo insieme numerico

## Problemi

Gli iperreali aiutano a risolvere problemi

## Calcolo differenziale

La derivata di una funzione

## Applicazioni

Applicazioni alla geometria analitica, alla fisica e allo studio di funzioni

## Ritorno a *Hyperreal mountain*

Funzioni esponenziali e logaritmiche

## Valutazione

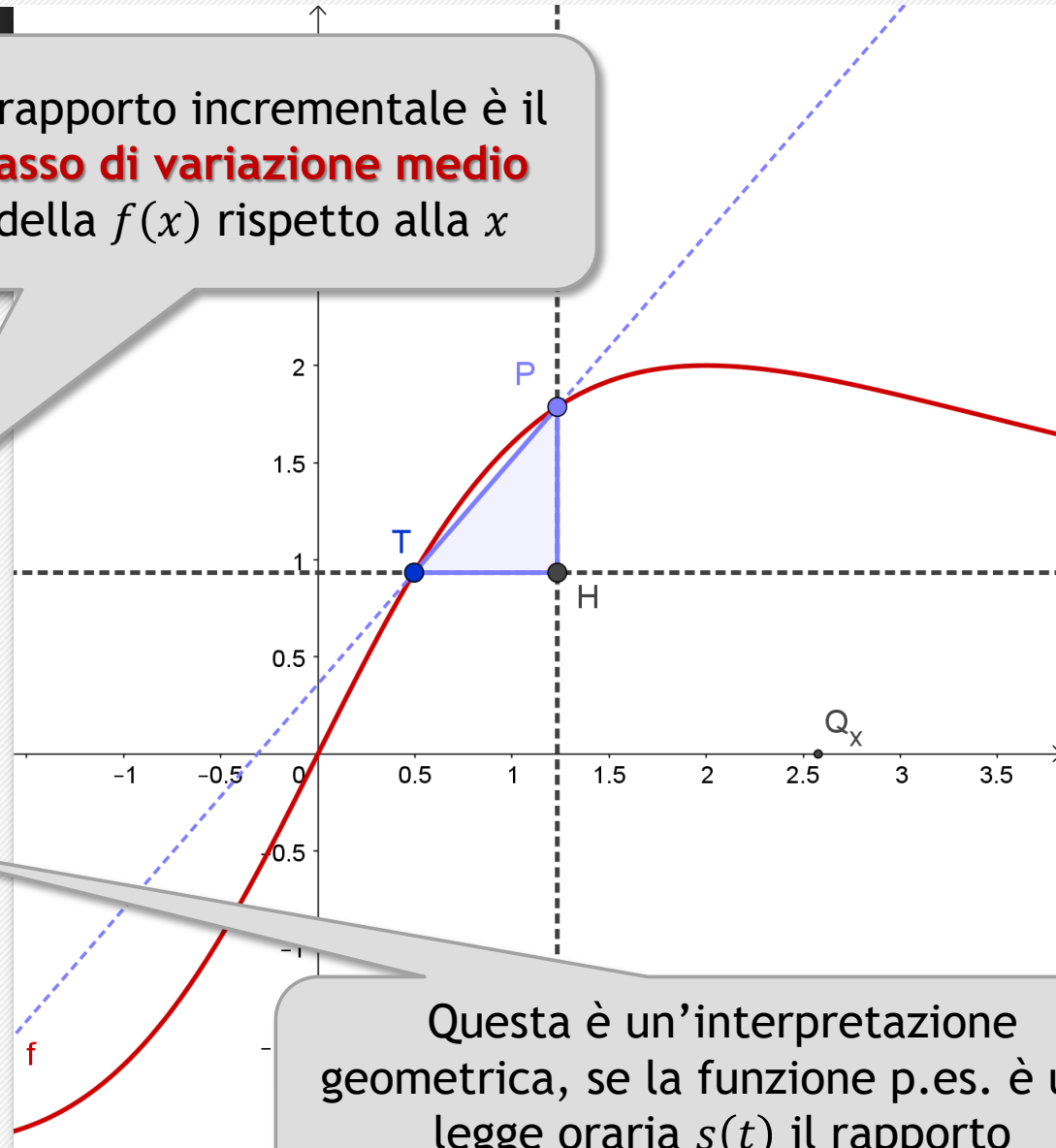
Cosa ne pensano studentesse e studenti

## Generalizziamo: rapporto incrementale

- Sia  $y = f(x)$  una funzione qualsiasi e sia  $x$  appartenente al dominio della funzione
- Il **rapporto incrementale** della funzione  $f(x)$  nel punto  $x$  è
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{x + \Delta x - x}$$
- Il rapporto incrementale corrisponde al coefficiente angolare della retta che passa per i punti della curva di ascissa  $x$  e  $x + \Delta x$  ...

... e ora immaginiamo di scegliere  $\Delta x$  infinitesimo ...

Il rapporto incrementale è il **tasso di variazione medio** della  $f(x)$  rispetto alla  $x$



Questa è un'interpretazione geometrica, se la funzione p.es. è una legge oraria  $s(t)$  il rapporto incrementale  $\Delta s / \Delta t$  è la velocità media

# Derivata

Più precisamente,  $f'(x) = \text{std} \frac{df(x)}{dx}$  è la **derivata della  $f(x)$  fatta rispetto alla  $x$**

- Se calcoliamo il rapporto incrementale per variazioni infinitesime dell'ascissa abbiamo il **rapporto differenziale  $df(x)/dx$**
- Il tasso di variazione istantaneo della funzione è  $\text{std} \left( \frac{df(x)}{dx} \right)$  se:
  - il rapporto  $\frac{df(x)}{dx}$  ha un valore finito
  - la parte standard di  $\frac{df(x)}{dx}$  non dipende da  $dx$
- La **derivata** di una funzione  $f(x)$  in un punto  $x$  appartenente al dominio di  $f(x)$  è  **$f'(x) = Df(x) = \text{std} \left( \frac{df(x)}{dx} \right)$**  se sono rispettate le due condizioni indicate qui sopra

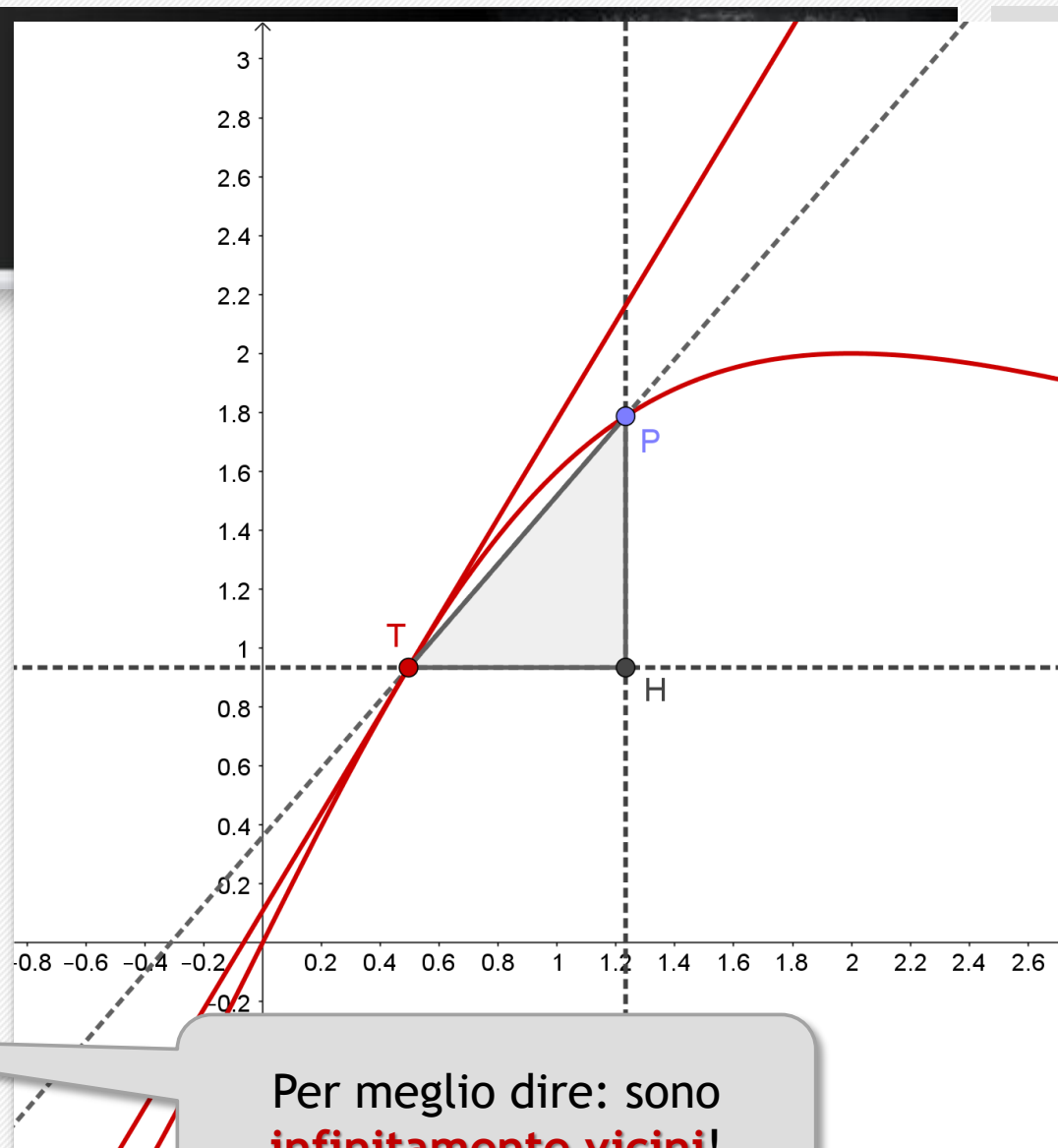
**La derivata  $f'(x)$  è una funzione ricavata dalla  $f(x)$  che fornisce punto per punto il tasso di variazione istantaneo della funzione!**

Analisi non  
standard  
Laboratorio  
Piano delle attività  
Definizioni  
Microscopi  
Tipologia  
Operazioni  
Il postulato di  
Eudosso  
Un esercizio  
Altre definizioni  
Parte standard  
Alcuni problemi  
**Derivata**  
Applicazioni  
Una prova di  
verifica  
Comportamento  
agli estremi  
Esponenziali e  
logaritmi  
Equazioni  
differenziali

# Significato geometrico

- Sia  $y = f(x)$  una funzione qualsiasi e sia  $x$  appartenente al dominio della funzione
- La **derivata** della funzione  $f(x)$  nel punto  $x_0$  è il coefficiente angolare della funzione nel punto di ascissa  $x_0$ , infatti:
  - le due ascisse  $x_0$  e  $x_0 + dx$  sono **indistinguibili**
  - le due ordinate  $f(x_0 + dx)$  e  $f(x_0)$  sono anch'essi **indistinguibili**
- Quindi i due punti  $T(x_0, f(x_0))$  e  $P(x_0 + dx, f(x_0 + dx))$  coincidono

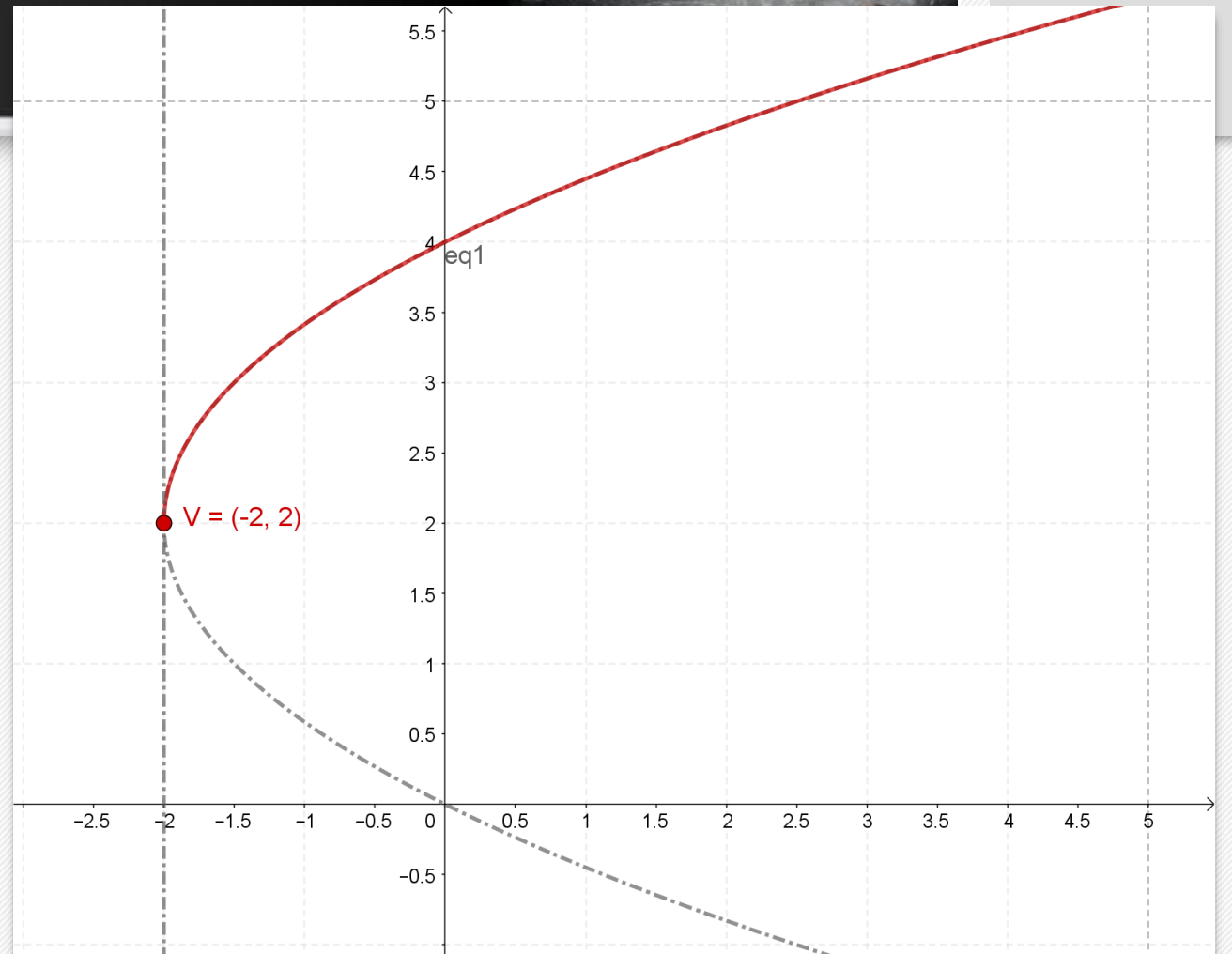
**La retta che passa per  $T$  e  $P$  è la tangente alla curva in  $T$ !**



Per meglio dire: sono **infinitamente vicini**!

## Attenzione alle condizioni (1)

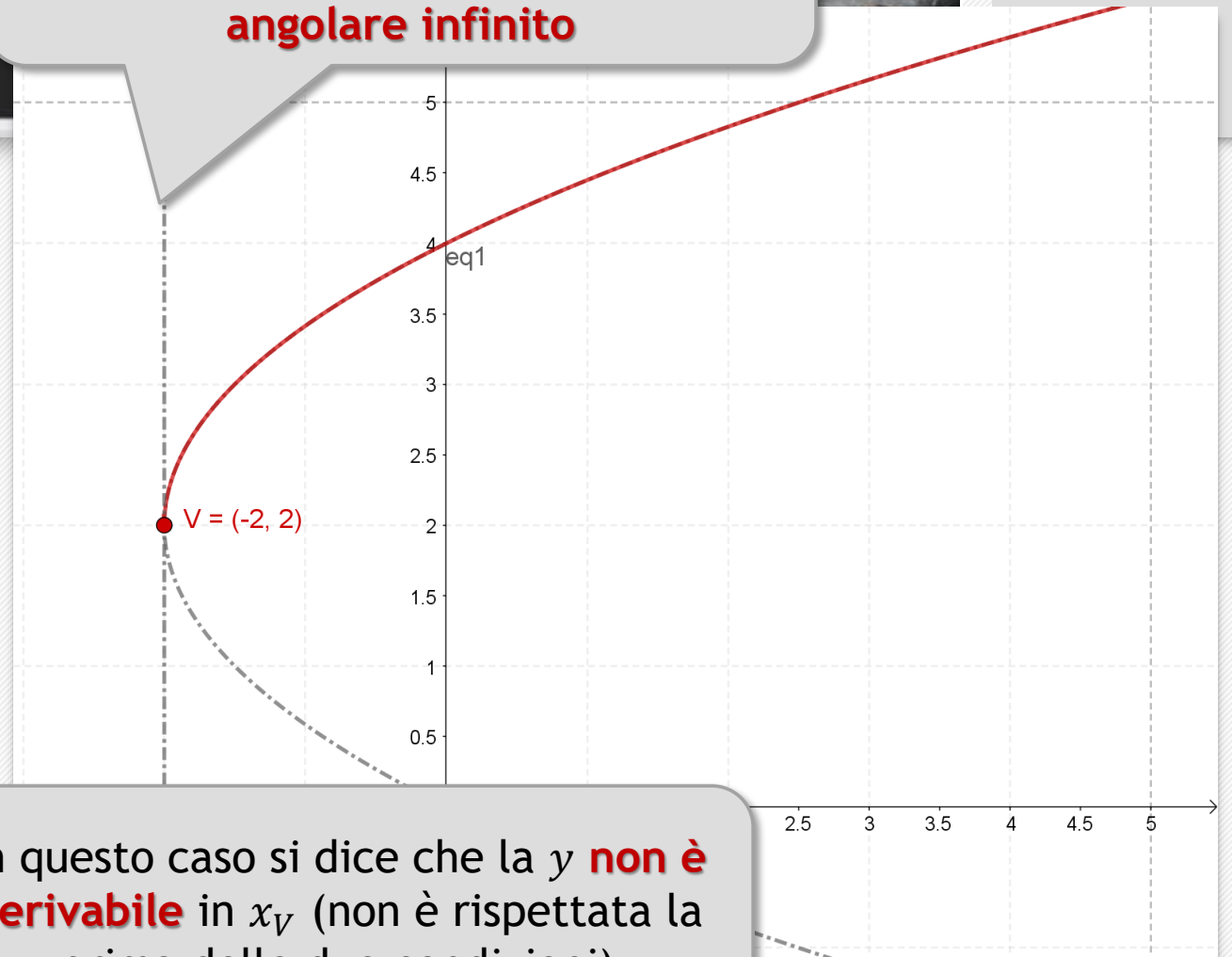
- Si deve prestare attenzione alle due condizioni di esistenza:
  - il rapporto  $\frac{df(x)}{dx}$  ha un valore finito
  - la parte standard di  $\frac{df(x)}{dx}$  non dipende da  $dx$
- Vogliamo calcolare la derivata alla curva nel punto di ascissa  $x_V = -2$  (nel vertice)



## Attenzione alle condizioni (2)

- Calcoliamo la derivata della semiparabola  $y = 2 + \sqrt{4 + 2x}$ 
$$\frac{dy}{dx} = \frac{2dx}{dx(\sqrt{4 + 2(x + dx)} + \sqrt{4 + 2x})}$$
- Da cui  $y' = \text{std} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{4+2x}}$
- Se ora calcoliamo la derivata per  $x = -2$  si ha  $y'(-2) = 1/\sqrt{0}!!!$

La retta tangente nel vertice della parabola (di ascissa  $x_V = -2$ ) è verticale, quindi **ha un coefficiente angolare infinito**



In questo caso si dice che la  $y$  **non è derivabile** in  $x_V$  (non è rispettata la prima delle due condizioni)

## Iperreali

Introduzione di un nuovo insieme numerico

## Problemi

Gli iperreali aiutano a risolvere problemi

## Calcolo differenziale

La derivata di una funzione

## Applicazioni

Applicazioni alla geometria analitica, alla fisica e allo studio di funzioni

## Ritorno a *Hyperreal mountain*

Funzioni esponenziali e logaritmiche

## Valutazione

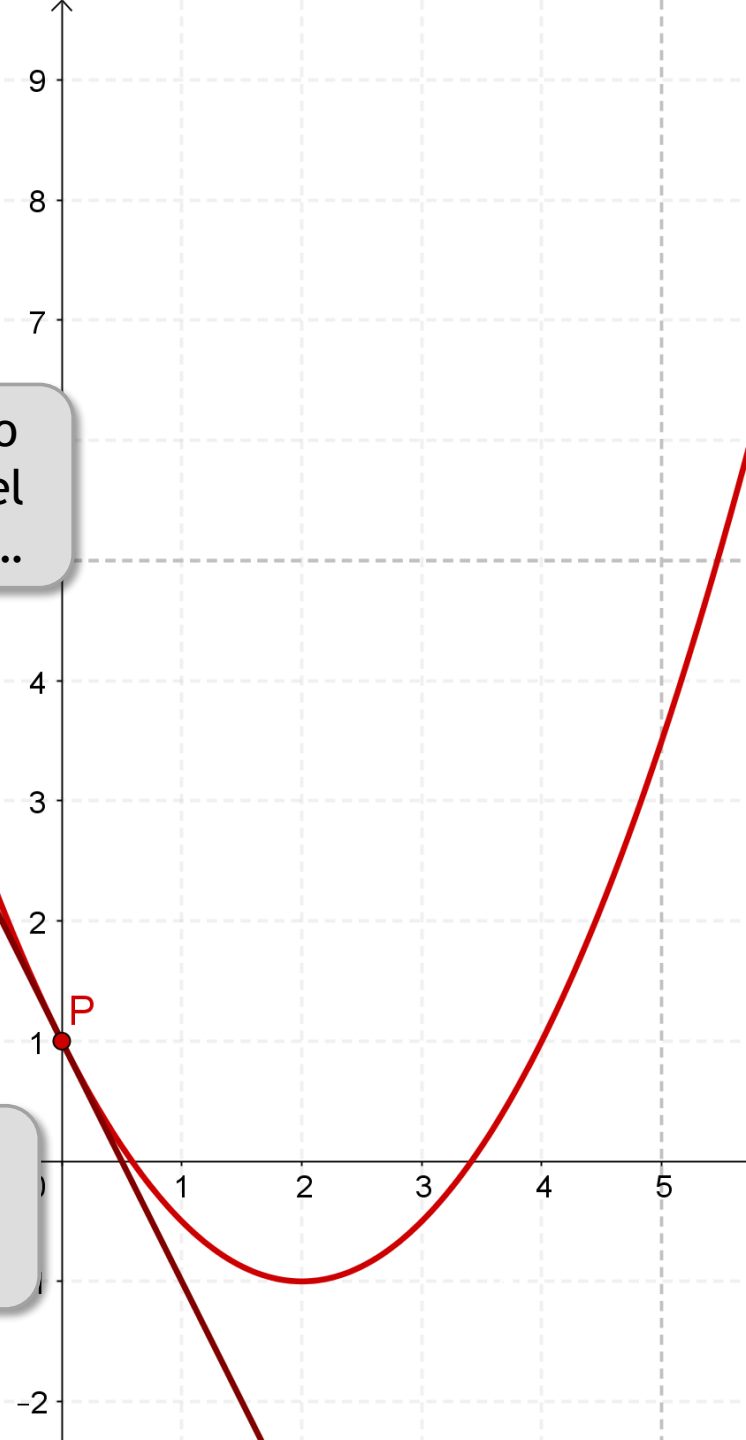
Cosa ne pensano studentesse e studenti

# Quando si può usare la derivata (1)

- Equazione della tangente alla parabola  
 $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$  **nel suo punto**  $P$  di ascissa nulla
- Calcoliamo l'ordinata di  $P$ :  $y_P = y(0) = 1$ 
  - la generica retta passante per  $P$  è  $y = mx + 1$
- Il coefficiente angolare della retta tangente è la derivata della funzione nell'ascissa del punto, quindi:
  - la derivata è  $y' = \frac{1}{2} \cdot 2x - 2 = x - 2$
  - la derivata calcolata nell'ascissa del punto  $P$  è  
$$y'(0) = (x - 2)\Big|_{x=0} = -2$$
- La retta tangente è allora  $t: y = -2x + 1$

Qui calcoliamo  
la **funzione** nel  
punto  $x_P = 0$  ...

... mentre qui  
calcoliamo la  
**derivata** in  $x_P = 0$

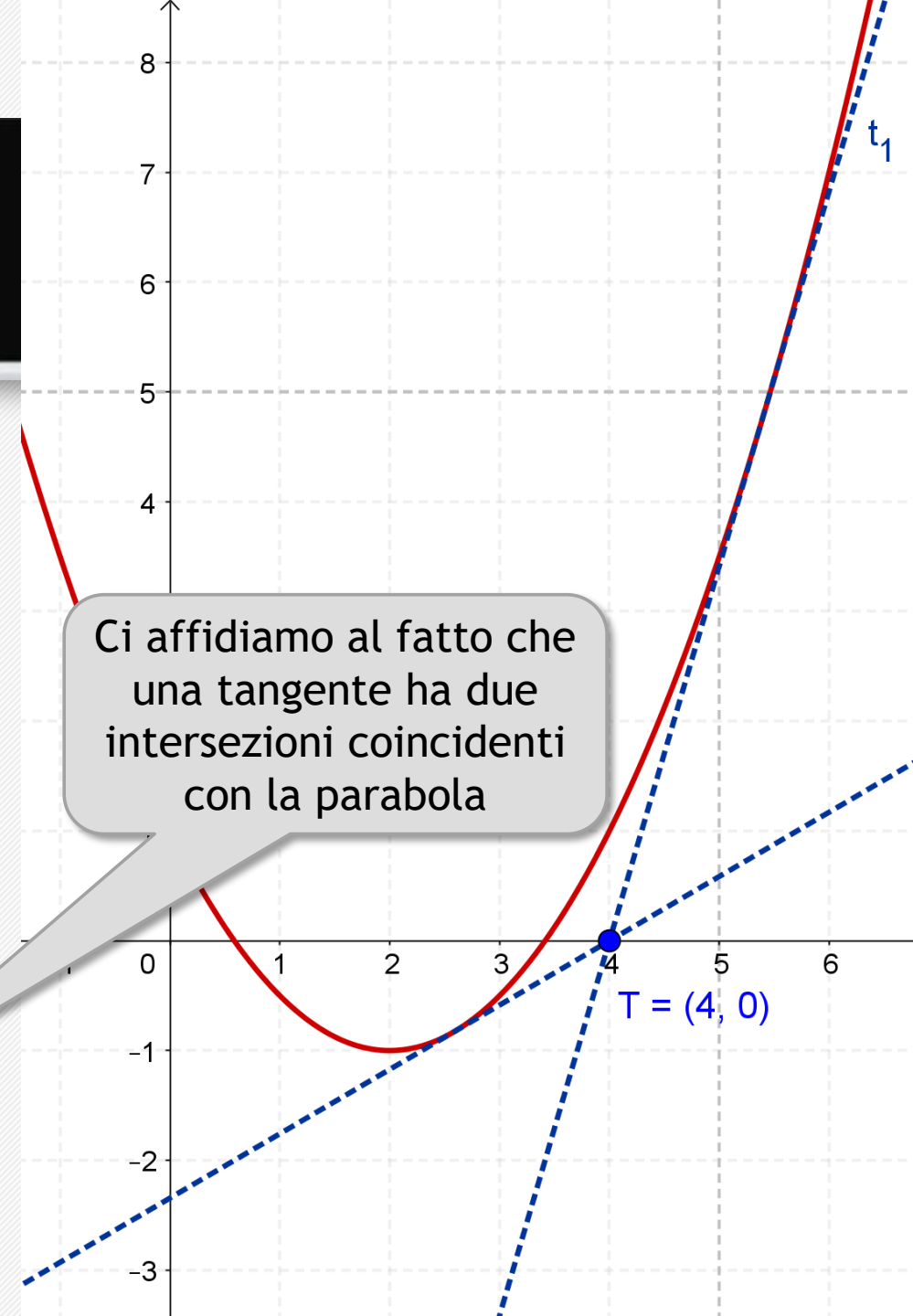


# Quando non si può usare la derivata

- Equazione della tangente alla parabola  $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$  tracciate da  $T(4,0)$
- La derivata fornisce il coefficiente angolare in un punto della curva

**per poterla usare dobbiamo conoscere le coordinate del punto di tangenza (o almeno la sua ascissa)**

- In questo caso non conosciamo il punto di tangenza e quindi non ci rimane che il metodo analitico:
  - equazione della retta per  $T$ :  $y = m(x - 4)$
  - sistema con l'equazione della parabola  $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$
  - imporre che il discriminante dell'equazione sia nullo!

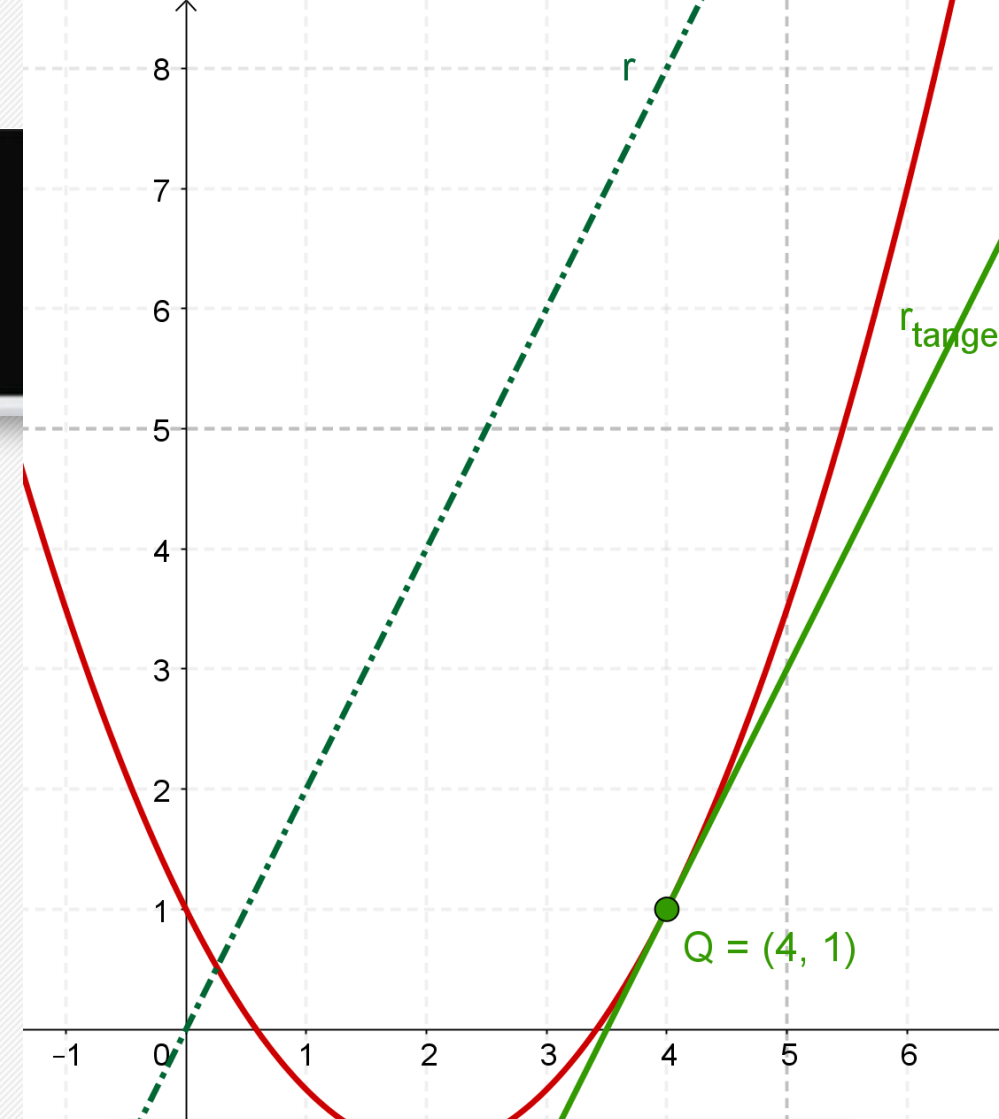


# Quando si può usare la derivata ... ma anche no (1)

- Equazione della tangente alla parabola

$y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$  **parallela** alla retta  $r: y = 2x$

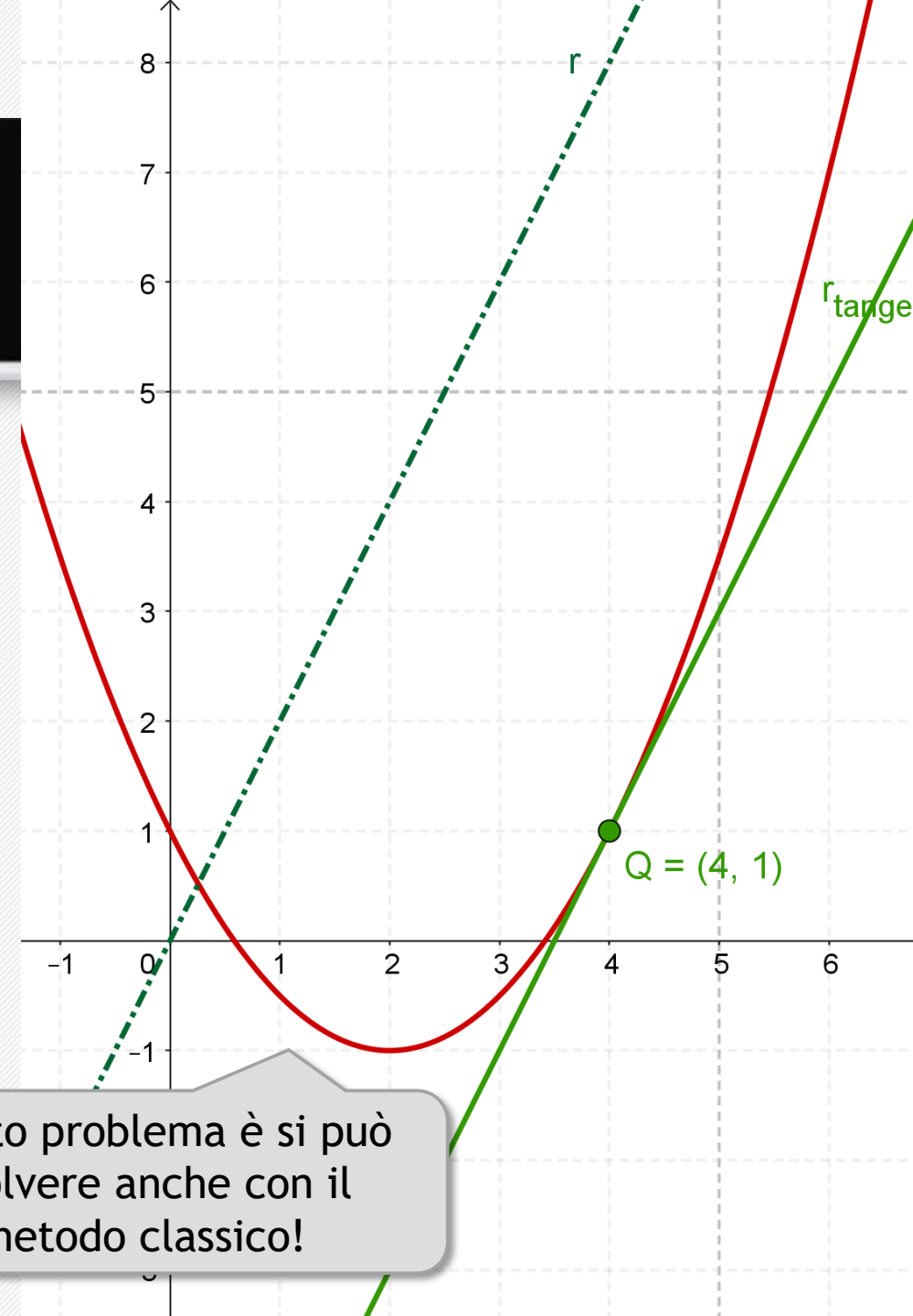
- Il punto di tangenza è il punto in cui la derivata della funzione è pari al coefficiente angolare della retta data
  - la derivata è  $y' = \frac{1}{2} \cdot 2x - 2 = x - 2$
  - imponiamo che sia pari a due:  $x - 2 = 2$ , l'ascissa del punto di tangenza è  $x_Q = 4$



Qui abbiamo usato la derivata per determinare il punto di tangenza conoscendo il coefficiente angolare della tangente

# Quando si può usare la derivata ... ma anche no (2)

- Ora conosciamo l'ascissa  $x_Q = 4$  del punto di tangenza
- Da qui procediamo come in già visto:
  - ordinata del punto di tangenza:
$$y_Q = y(4) = \frac{1}{2}16 - 2 \cdot 4 + 1 = 1$$
  - generica retta per  $Q$ :  $y - 1 = m(x - 4)$
- La retta tangente è  $y = 2x - 7$  (il coefficiente angolare è  $m = 2$ )

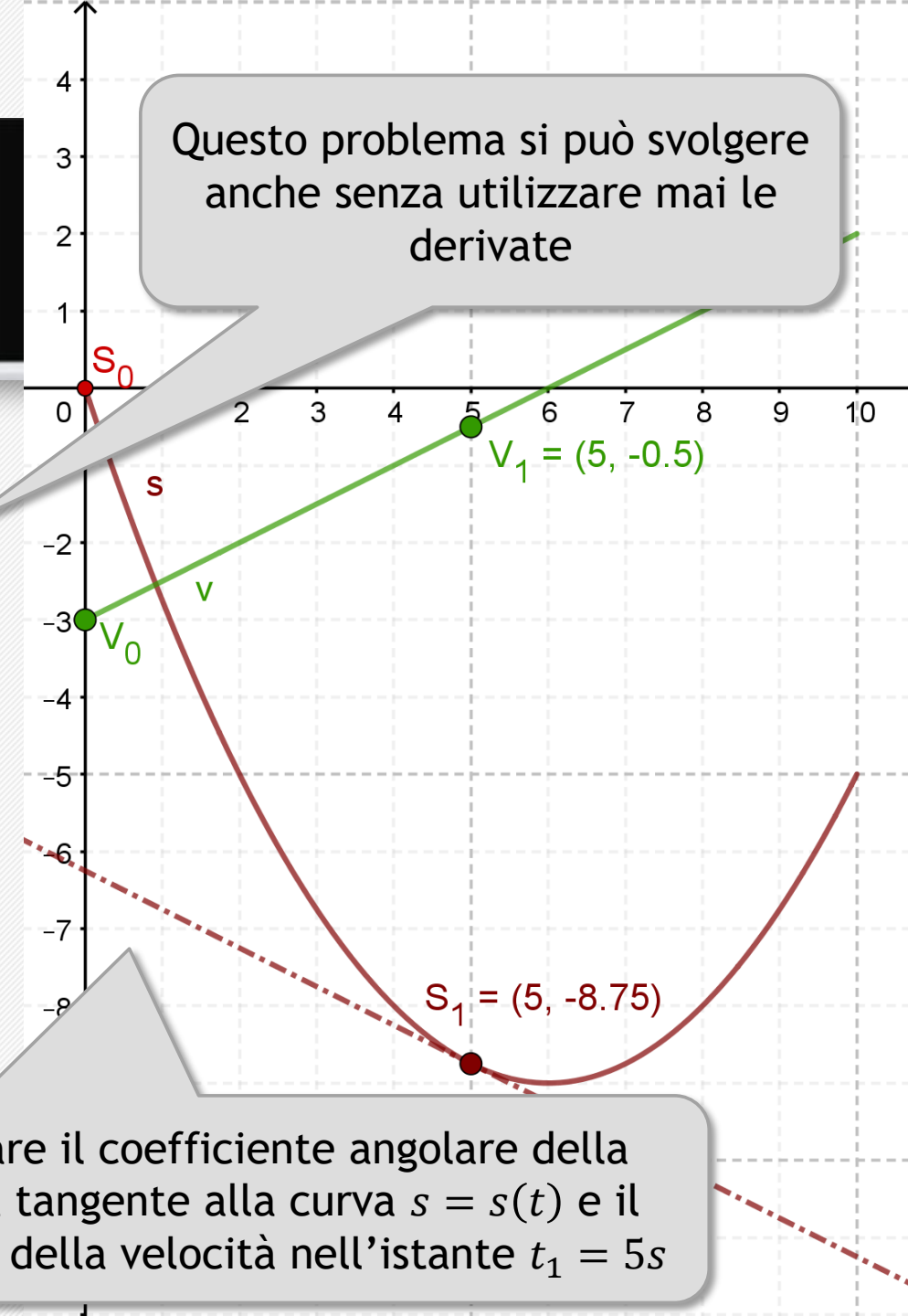


Questo problema è si può  
risolvere anche con il  
metodo classico!

# Moto uniformemente accelerato

- Sia  $s(t) = \frac{1}{4}t^2 - 3t$  la legge oraria di un punto materiale che si muove su una traiettoria rettilinea nell'intervallo di tempo  $[0,10]$  dove lo spazio è misurato in metri e il tempo in secondi
- Determinare:
  - la legge  $v(t)$  della velocità del moto
  - la velocità iniziale  $v_0$
  - la posizione e la velocità all'istante  $t_1 = 5s$
  - la retta tangente alla curva  $s = s(t)$  nel suo punto di ascissa  $t_1 = 5$
  - dimostrare che l'accelerazione è costante
  - costruire il grafico tempo-spazio del moto
  - costruire anche il grafico tempo-velocità del moto

Questo problema si può svolgere anche senza utilizzare mai le derivate

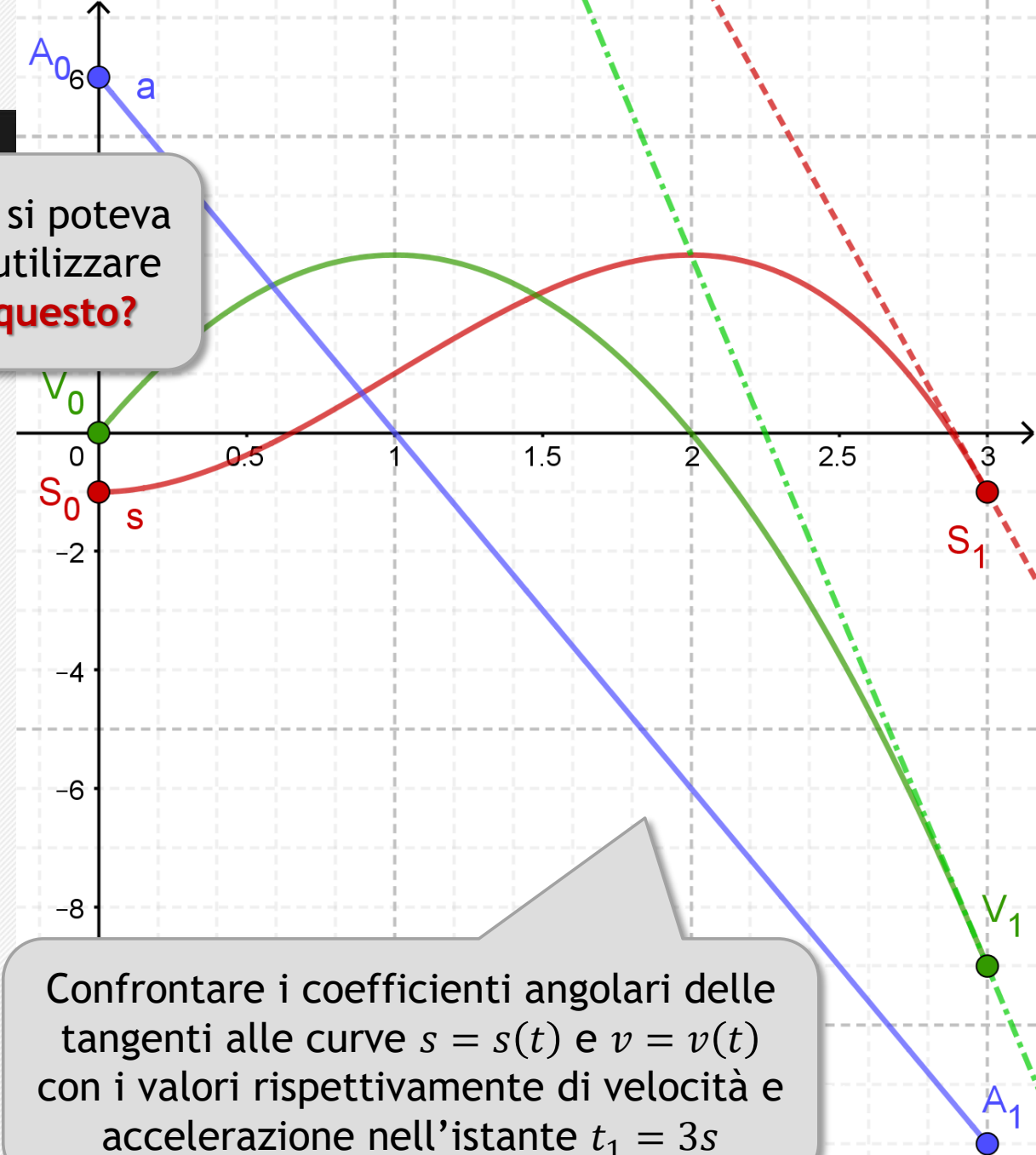


Notare il coefficiente angolare della retta tangente alla curva  $s = s(t)$  e il valore della velocità nell'istante  $t_1 = 5s$

# Moto qualsiasi

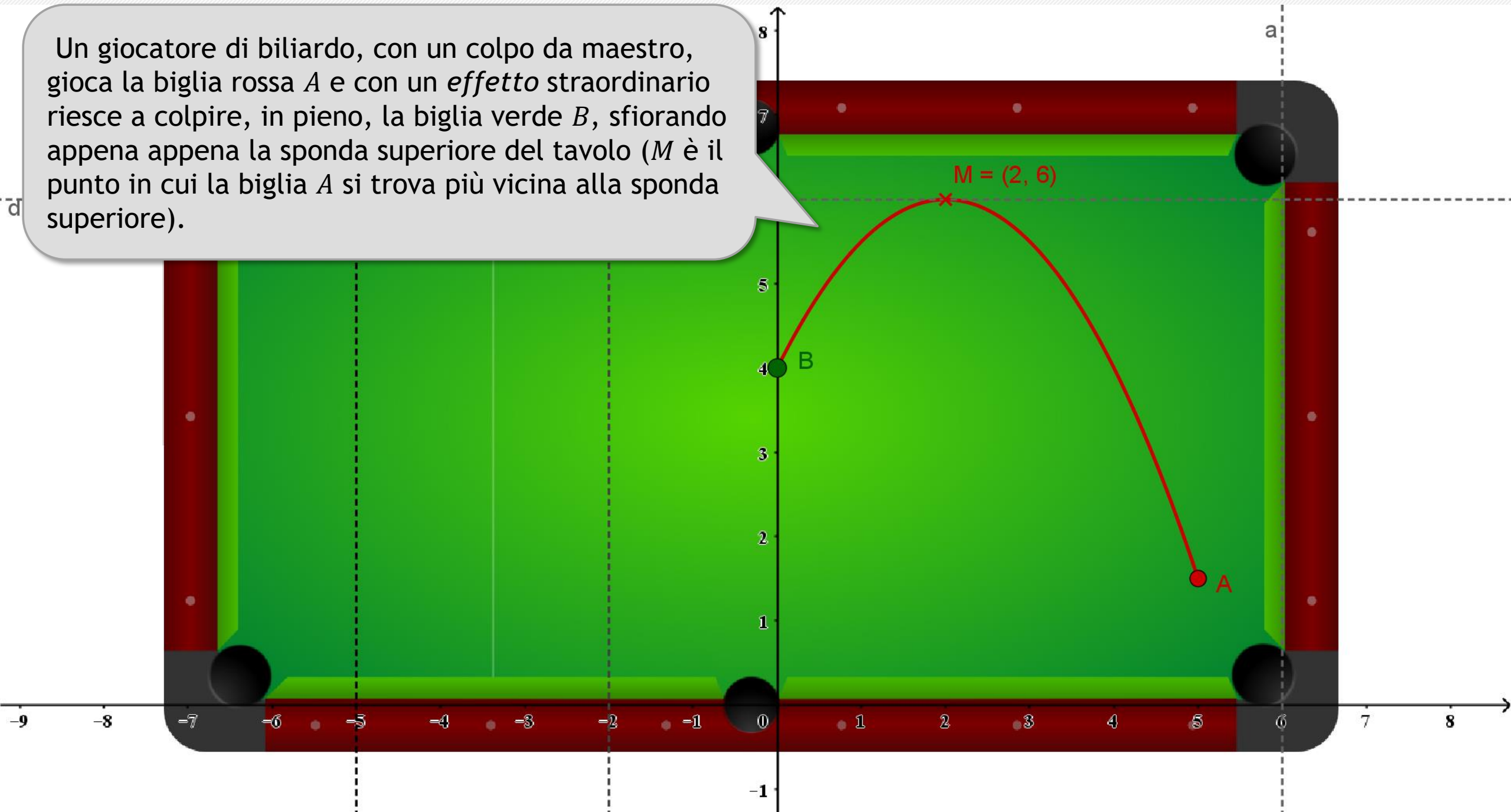
L'esercizio precedente si poteva svolgere anche senza utilizzare mai le derivate, **ma questo?**

- Sia  $s(t) = -t^3 + 3t^2 - 1$  la legge oraria di un punto materiale che si muove su una traiettoria rettilinea nell'intervallo di tempo  $[0,3]$  dove lo spazio è misurato in metri e il tempo in secondi
- Determinare:
  - la legge  $v(t)$  della velocità del moto e la legge che descrive l'accelerazione istante per istante dimostrando che non si tratta di moto rettilineo uniformemente accelerato
  - la velocità iniziale  $v_0$  e l'accelerazione iniziale  $a_0$
  - la velocità finale all'istante  $t_1 = 3s$  e l'accelerazione nello stesso istante, le rette tangenti a  $s = s(t)$  e a  $v = v(t)$
  - in quale istante la velocità è nulla?
  - costruire anche il grafico tempo-velocità del moto
  - costruire infine il grafico tempo-accelerazione del moto



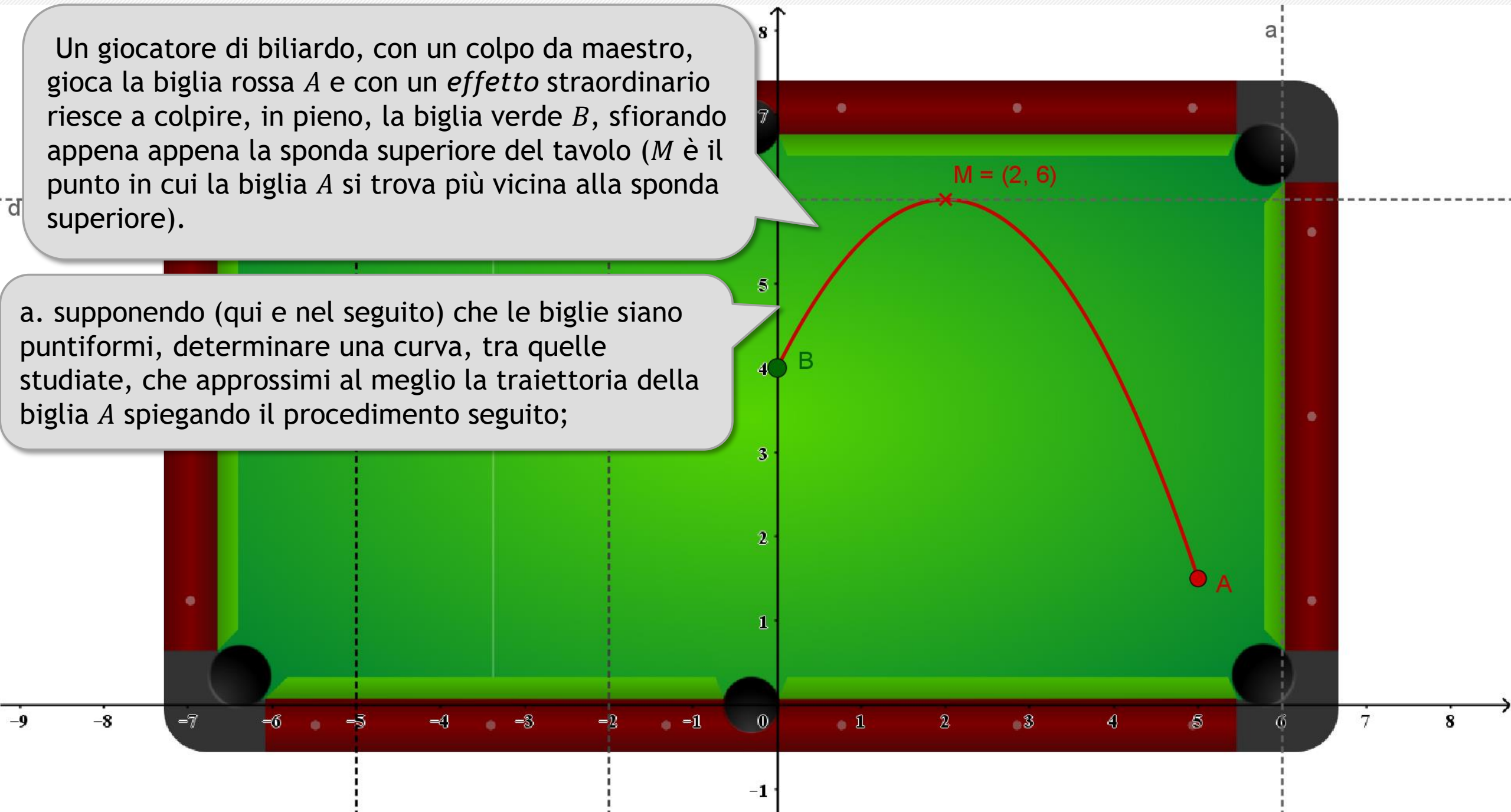
Confrontare i coefficienti angolari delle tangenti alle curve  $s = s(t)$  e  $v = v(t)$  con i valori rispettivamente di velocità e accelerazione nell'istante  $t_1 = 3s$

Un giocatore di biliardo, con un colpo da maestro, gioca la biglia rossa  $A$  e con un *effetto* straordinario riesce a colpire, in pieno, la biglia verde  $B$ , sfiorando appena appena la sponda superiore del tavolo ( $M$  è il punto in cui la biglia  $A$  si trova più vicina alla sponda superiore).



Un giocatore di biliardo, con un colpo da maestro, gioca la biglia rossa  $A$  e con un *effetto* straordinario riesce a colpire, in pieno, la biglia verde  $B$ , sfiorando appena appena la sponda superiore del tavolo ( $M$  è il punto in cui la biglia  $A$  si trova più vicina alla sponda superiore).

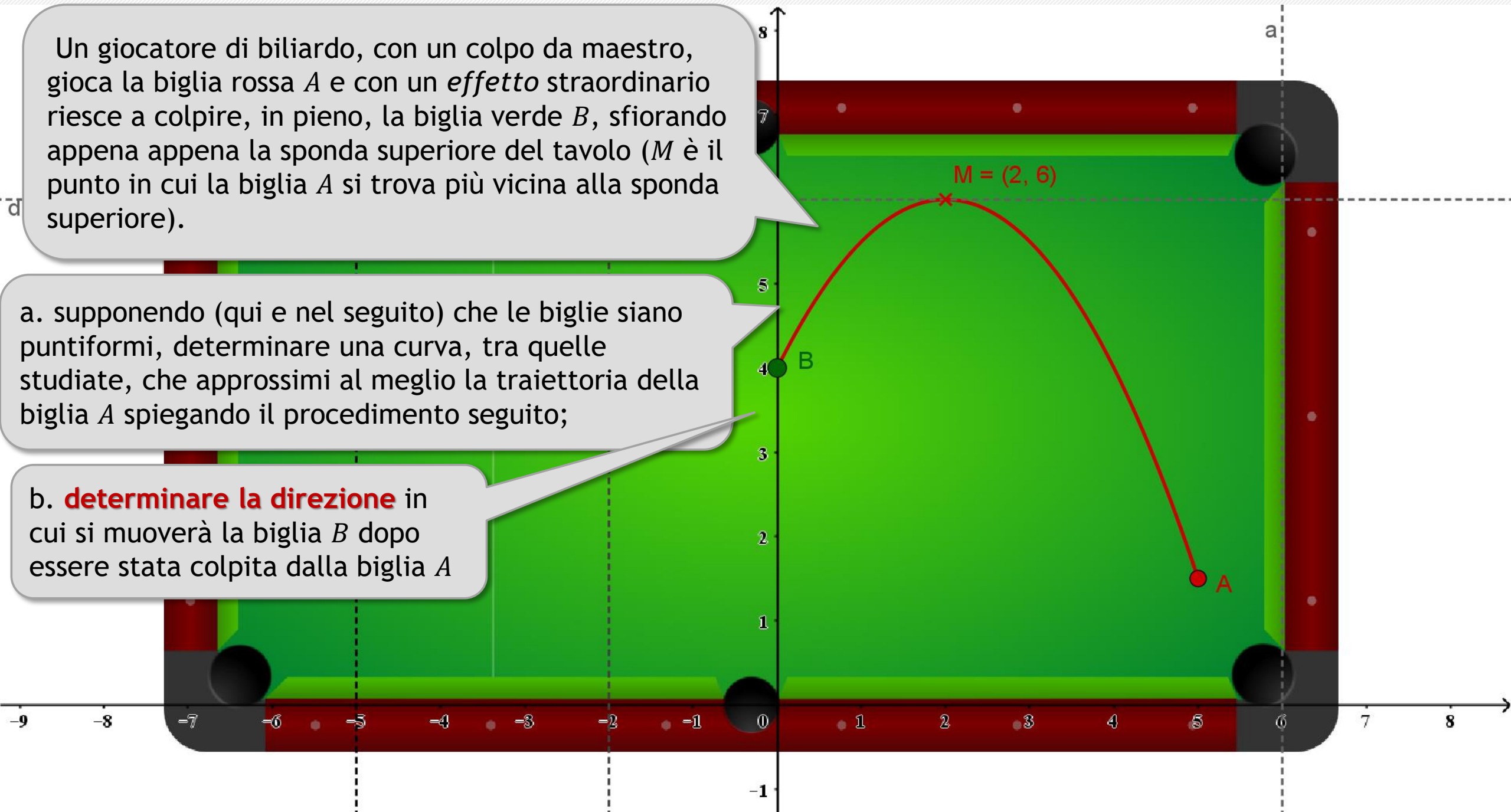
a. supponendo (qui e nel seguito) che le biglie siano puntiformi, determinare una curva, tra quelle studiate, che approssimi al meglio la traiettoria della biglia  $A$  spiegando il procedimento seguito;



Un giocatore di biliardo, con un colpo da maestro, gioca la biglia rossa  $A$  e con un *effetto* straordinario riesce a colpire, in pieno, la biglia verde  $B$ , sfiorando appena appena la sponda superiore del tavolo ( $M$  è il punto in cui la biglia  $A$  si trova più vicina alla sponda superiore).

a. supponendo (qui e nel seguito) che le biglie siano puntiformi, determinare una curva, tra quelle studiate, che approssimi al meglio la traiettoria della biglia  $A$  spiegando il procedimento seguito;

b. **determinare la direzione** in cui si muoverà la biglia  $B$  dopo essere stata colpita dalla biglia  $A$



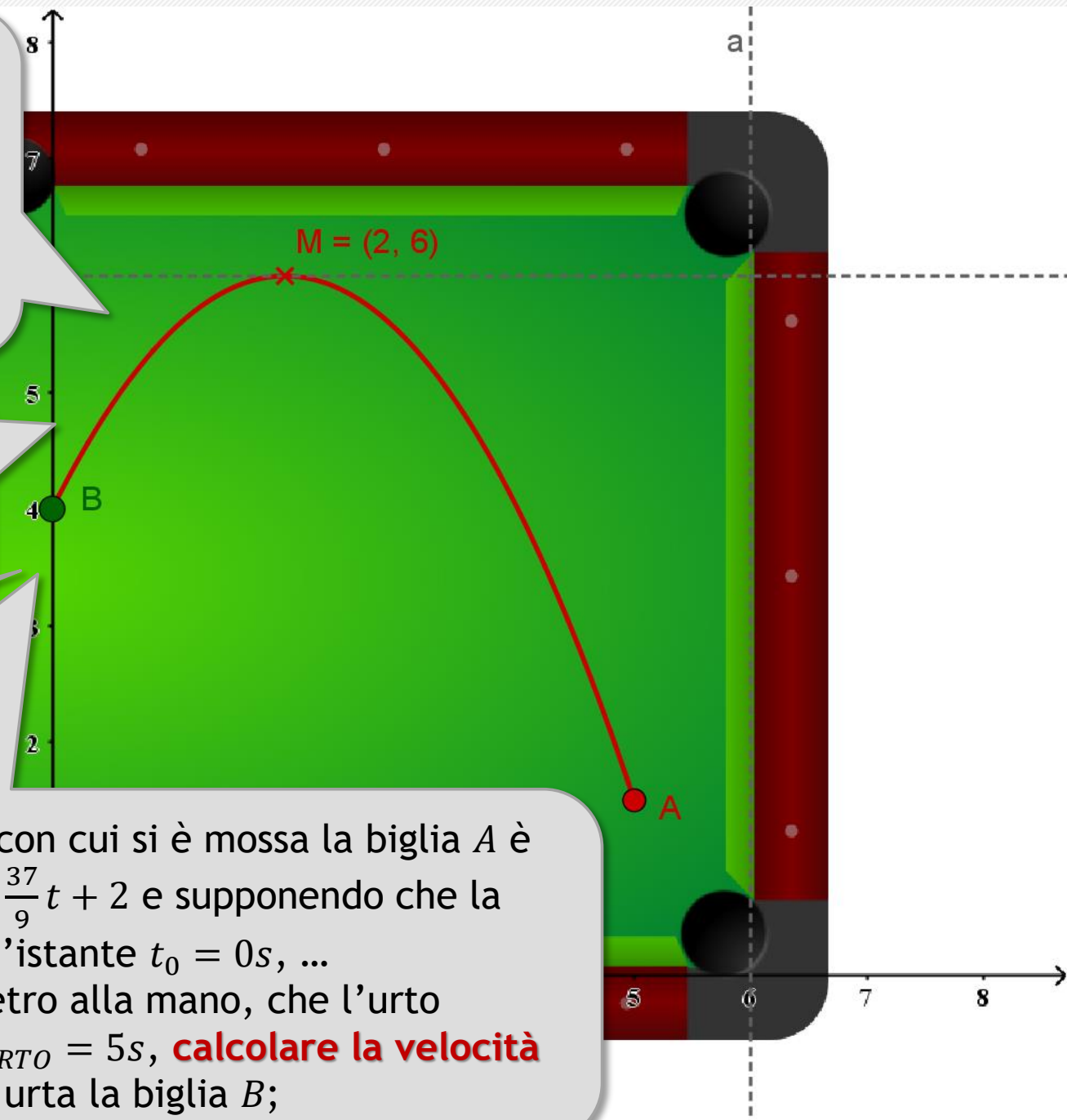
Un giocatore di biliardo, con un colpo da maestro, gioca la biglia rossa  $A$  e con un *effetto* straordinario riesce a colpire, in pieno, la biglia verde  $B$ , sfiorando appena appena la sponda superiore del tavolo ( $M$  è il punto in cui la biglia  $A$  si trova più vicina alla sponda superiore).

a. supponendo (qui e nel seguito) che le biglie siano puntiformi, determinare una curva, tra quelle studiate, che approssimi al meglio la traiettoria della biglia  $A$  spiegando il procedimento seguito;

b. **determinare la direzione** in cui si muoverà la biglia  $B$  dopo essere stata colpita dalla biglia  $A$

e. se la legge oraria con cui si è mossa la biglia  $A$  è  $s(t) = -\frac{2}{27}t^3 + \frac{4}{9}t^2 + \frac{37}{9}t + 2$  e supponendo che la biglia  $A$  sia colpita all'istante  $t_0 = 0s$ , ...

f. osservato, cronometro alla mano, che l'urto avviene all'istante  $t_{URTO} = 5s$ , **calcolare la velocità** della biglia  $A$  quando urta la biglia  $B$ ;



# Asintoto orizzontale (1)



59

- Gli iperreali possono tornare molto utili per determinare il comportamento delle funzioni agli estremi del loro dominio
- Facciamo un esempio, sia  $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ 
  - il dominio della funzione  $f(x)$  è  $D = (-\infty, +\infty)$
  - questo vuol dire che **non possiamo** calcolare la funzione per  $x = \pm\infty$
  - però **possiamo** calcolarla in un **infinito!**

Analisi non  
standard  
Il laboratorio  
Piano delle attività  
Definizioni  
Microscopi  
Tipologia  
Operazioni  
Il postulato di  
Eudosso  
Un esercizio  
Altre definizioni  
Parte standard  
Alcuni problemi  
Derivata  
Applicazioni  
Una prova di  
verifica  
**Comportamento  
agli estremi**  
Esponenziali e  
logaritmi  
Equazioni  
differenziali

# Asintoto orizzontale (2)

60



- Sia  $M$  un infinito allora  $f(M) = \frac{M}{M^2+1}$  che è un rapporto di infiniti
  - se raccogliamo  $M$  a denominatore abbiamo  $\frac{M}{M(M+\frac{1}{M})} = \frac{1}{M+\frac{1}{M}}$
  - ma  $\frac{1}{M}$  è un infinitesimo,  $M + \frac{1}{M}$  un infinito e  $\frac{1}{M+\frac{1}{M}}$  un infinitesimo
- In conclusione **std**  $\frac{M}{M^2+1} = \text{std} \frac{1}{M+\frac{1}{M}} = \text{std} \delta = \mathbf{0}$

Avvicinandosi a infinito la  
funzione diventa  
**infinitamente vicina a zero!**

Stesso risultato si poteva ottenere  
ricordando che  $M^2$  è un **infinitesimo di  
ordine superiore** rispetto a  $M$

Tutti gli infinitesimi  
sono **infinitamente  
vicini a zero!**

Analisi non  
standard  
Il laboratorio  
Piano delle attività  
Definizioni  
Microscopi  
Tipologia  
Operazioni  
Il postulato di

Derivata  
Applicazioni  
Una prova di  
verifica  
**Comportamento**

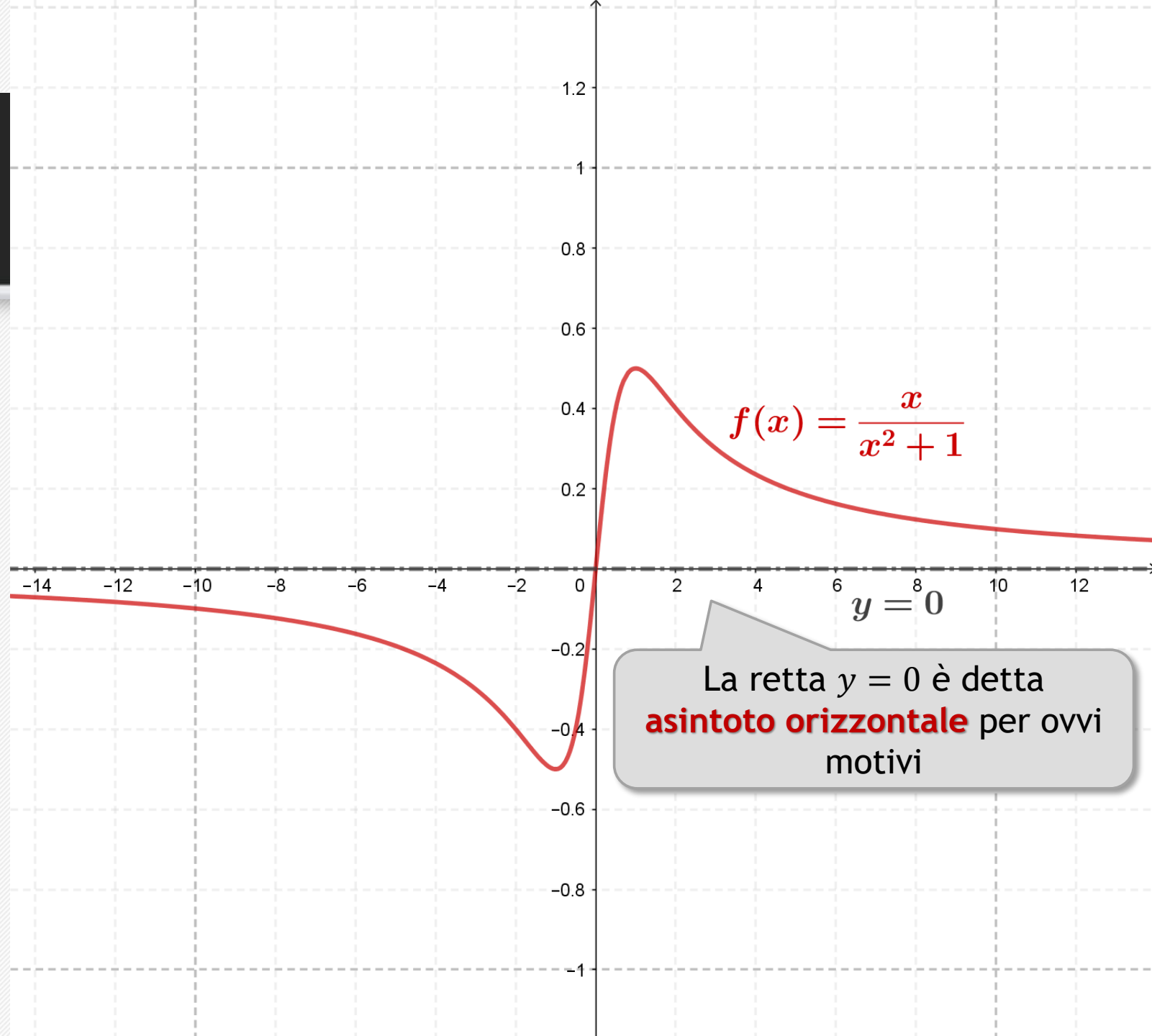
**temi**  
enziali e  
ni  
ni  
enziali

# Asintoto orizzontale (3)

- Si vede subito che  $y = 0$  è un asintoto per la funzione:

**La distanza tra funzione e retta diventa infinitesima quando la  $x$  è molto grande, infinita:  $x = M$**

- Lo stesso risultato si ottiene calcolando la funzione per  $x$  infinita ma negativa:  $x = -M$



# Asintoto obliquo (1)



62

- Ancora un esempio, sia  $f(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$ 
  - il dominio della funzione  $f(x)$  è  $D = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$
- Sia  $M > 0$  un infinito,  $f(M) = \frac{M^2+1}{M+1}$  che è un rapporto di infiniti
  - se raccogliamo  $M$  abbiamo  $\frac{M(M+1)}{M(1+\frac{1}{M})} = \frac{M+1}{1+\frac{1}{M}}$  che è un infinito

Più rapidamente:  $M^2 + 1$  è un infinito di ordine superiore rispetto a  $M + 1$  e quindi il loro rapporto è un infinito

Analisi non  
standard  
Il laboratorio  
Piano delle attività  
Definizioni  
Microscopi  
Tipologia  
Operazioni  
Il postulato di  
Eudosso  
Un esercizio  
Altre definizioni  
Parte standard  
Alcuni problemi  
Derivata  
Applicazioni

differentiati

# Asintoto obliquo (2)

63



- Proviamo a studiare allora l'andamento della derivata in  $M$ :

- $f'(x) = \frac{(x^2+2x-1)}{(x+1)^2}$  e ...

- ...  $f'(M) = \frac{(M^2+2M-1)}{(M+1)^2}$

- raccogliendo  $M^2$  si ha  $\frac{M^2(1+\frac{2}{M}-\frac{1}{M^2})}{M^2(1+\frac{1}{M})^2}$  e quindi **std  $f'(M) = 1$**  che è un valore finito

- La retta a cui si *appoggia* la  $f(x)$  è del tipo  $y = \mathbf{1} \cdot x + q$ 
  - Il coefficiente angolare è, come visto,  $\text{std } f'(M)$

Avvicinandosi a infinito la funzione ha un andamento tale da avvicinarsi **infinitamente a una retta** di coefficiente angolare 1!

Analisi non  
standard  
Il laboratorio  
Piano delle attività  
Definizioni  
Microscopi

Altre definizioni  
Parte standard  
Alcuni problemi  
Derivata  
Applicazioni  
Una prova di  
verifica  
**Comportamento  
agli estremi**  
Esponenziali e  
logaritmi  
Equazioni  
differenziali

# Asintoto obliquo (3)



64

- Ora cerchiamo la quota  $q$  in modo che la differenza in  $M$  tra la funzione e la retta stessa sia infinitesima
- Scegliamo quindi la quota  $q$  come  $q = f(M) - \mathbf{1} \cdot M$ :
  - $\frac{M^2+1}{M+1} - M = \frac{M^2+1-M^2-M}{M+1} = \frac{1-M}{M+1}$  per cui  $\text{std} \frac{1-M}{M+1} = \mathbf{-1}$
- La retta  $y = x - \mathbf{1}$  è infinitamente vicina alla funzione  $f(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$  quando la  $x$  è infinita
- In altre parole,  $y = x - \mathbf{1}$  è un **asintoto obliquo** per la funzione

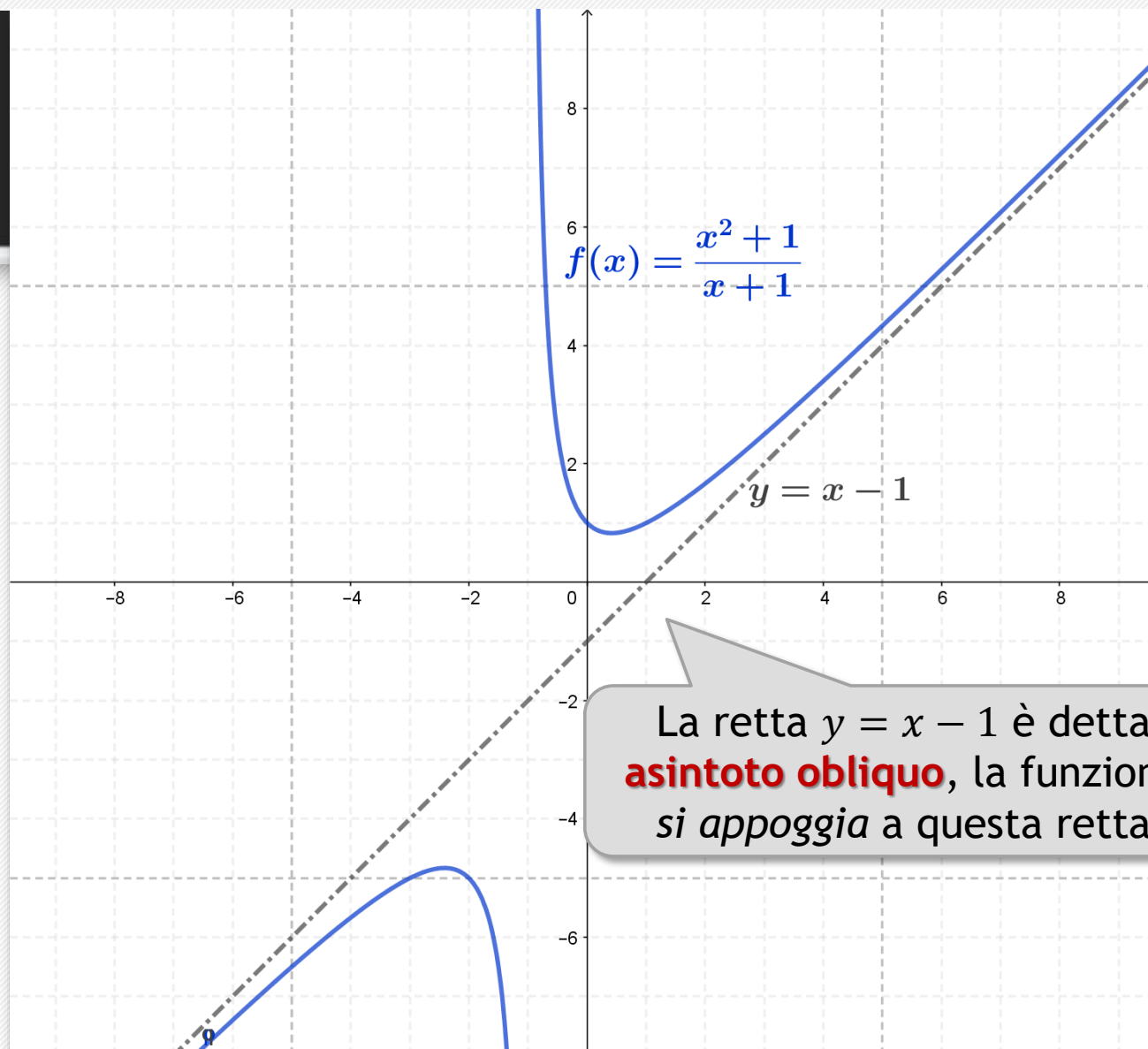
Analisi non  
standard  
Il laboratorio  
Piano delle attività  
Definizioni  
Microscopi  
Tipologia  
Operazioni  
Il postulato di  
Eudosso  
Un esercizio  
Altre definizioni  
Parte standard  
Alcuni problemi  
Derivata  
Applicazioni  
Una prova di  
verifica  
**Comportamento  
agli estremi**  
Esponenziali e  
logaritmi  
Equazioni  
differenziali

## Asintoto obliquo (4)

- In azzurro la funzione  $f(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$
- Si vede subito che  $y = x - 1$  è un asintoto per la funzione:

**La distanza tra funzione e retta diventa infinitesima quando la  $x$  è infinitamente grande:  $x = M$**

- Lo stesso risultato si ottiene calcolando la funzione per  $x$  infinitamente grande ma negativa:  $x = -M$
- Notare che la funzione sembra avere un andamento asintotico anche quando la  $x$  è infinitamente vicina a  $-1$ !



# Ricapitolando

66

- Nel seguito  $\delta > 0$  è un infinitesimo e  $M > 0$  un infinito
- Se  **$\text{std } f(x_0 \pm \delta) = \pm M$**  allora  $x = x_0$  è un **asintoto verticale** per la funzione  $f(x)$
- Se  **$\text{std } f(\pm M) = y_0$**  allora  $y = y_0$  è un **asintoto orizzontale** per la funzione  $f(x)$
- Se  **$\text{std } f(\pm M) = N$** , con  $N$  un infinito, allora la funzione potrebbe avere un asintoto obliquo di equazione  $y = mx + q$  dove ...
  - **$m = \text{std } f'(\pm M)$**  se  $m \neq 0$  è finito e ...
  - **$q = \text{std}(f(\pm M) \mp mM)$**  se  $q$  è finito

Analisi non  
standard  
Il laboratorio  
Piano delle attività  
Definizioni  
Microscopi  
Tipologia  
Operazioni  
Il postulato di  
Eudosso  
Un esercizio  
Altre definizioni  
Parte standard  
Alcuni problemi  
Derivata  
Applicazioni  
Una prova di  
verifica  
**Comportamento  
agli estremi**  
Esponenziali e  
logaritmi  
Equazioni  
differenziali

## Iperreali

Introduzione di un nuovo insieme numerico

## Problemi

Gli iperreali aiutano a risolvere problemi

## Calcolo differenziale

La derivata di una funzione

## Applicazioni

Applicazioni alla geometria analitica, alla fisica e allo studio di funzioni

## Ritorno a *Hyperreal mountain*

Funzioni esponenziali e logaritmiche

## Valutazione

Cosa ne pensano studentesse e studenti

# Un nuovo numero

68

- Definiamo un nuovo numero  $e = \text{std}(1 + \varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}$  dove  $\varepsilon$  è, come di consueto, un infinitesimo
- Una definizione diversa è  $e = \text{std}\left(1 + \frac{1}{M}\right)^M$  dove questa volta  $M$  è un infinito
- Le due definizioni sono equivalenti tenendo conto che:
  - se  $\varepsilon$  è un infinitesimo allora  $\frac{1}{\varepsilon}$  è un infinito
  - se  $M$  è un infinito allora  $\frac{1}{M}$  è un infinitesimo
- La definizione rigorosa è  $e = \text{std}\left(1 + \frac{1}{N}\right)^N$  con  $N$  *ipernaturale* infinito ma si può dimostrare che  $e = \text{std}\left(1 + \frac{1}{M}\right)^M$  per un qualsiasi infinito  $M$

Sì, ma quanto vale  $e$ ?

Analisi non  
standard  
Il laboratorio  
Piano delle attività  
Definizioni  
Microscopi  
Tipologia  
Operazioni  
Il postulato di  
Eudosso  
Un esercizio  
Altre definizioni

Applicazioni  
Una prova di  
verifica  
Comportamento  
agli estremi  
**Esponenziali e  
logaritmi**  
Equazioni  
differenziali

# Una curiosa proprietà

$e = 2.71828 \dots$  è un  
numero irrazionale  
trascendente detto  
numero di Eulero

69

- Si può facilmente intuire che  $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ , infatti:
  - sviluppiamo in serie di Taylor la funzione  $f(x) = e^x$
  - la derivata prima, come vedremo più avanti, è  $f'(x) = e^x$ , la derivata seconda  $f''(x) = e^x$ , ...
  - ricordando che la formula di Taylor è

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots + f^{(k)}(x_0) \frac{(x - x_0)^k}{k!}$$

- e scegliendo  $x_0 = 0$  si ha  $e^x \approx 1 + x + \dots + \frac{x^k}{k!}$
- a questo punto se calcoliamo l'approssimazione per  $x = 1$  e ricordiamo che, per definizione,  $0! = 1$  e  $1! = 1$  abbiamo

$$e \approx \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

- Per  $n = 10$  abbiamo, per esempio,  $e \approx \frac{9864101}{3628800} = \mathbf{2.718281801146385}$

Analisi non  
standard  
Il laboratorio  
Piano delle attività  
Definizioni  
Microscopi  
Tipologia  
Operazioni  
Il postulato di  
Eudosso  
Un esercizio  
Altre definizioni  
Parte standard  
Alcuni problemi  
Derivata  
Applicazioni  
Una prova di  
verifica  
Comportamento  
agli estremi  
**Esponenziali e  
logaritmi**  
Equazioni  
differenziali

# Qualche applicazione (1)

70

- Consideriamo l'espressione  $\frac{1}{x} \ln(x + 1)$
- Proviamo a calcolare il valore di questa espressione per  $x = \varepsilon$  con  $\varepsilon$  infinitesimo, si ha  $\frac{1}{\varepsilon} \ln(\varepsilon + 1)$
- Utilizzando le proprietà dei logaritmi possiamo scriverla come:

$$\ln(\varepsilon + 1)^{\frac{1}{\varepsilon}}$$

- Ma sappiamo che  $e = \text{std}(1 + \varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}$  quindi  
$$\text{std}[\ln(\varepsilon + 1)^{\frac{1}{\varepsilon}}] = \ln e = 1$$

Vedremo nei prossimi anni che la quantità  $\frac{1}{x} \ln(x + 1)$  vale proprio uno quando la  $x$  tende a diventare infinito e il limite corrispondente sarà detto **notevole**

Analisi non  
standard  
Il laboratorio  
Piano delle attività  
Definizioni  
Microscopi  
Tipologia  
Operazioni  
Il postulato di  
Eudosso  
Un esercizio  
Altre definizioni  
Parte standard  
Alcuni problemi

Equazioni  
differenziali

# Qualche applicazione (2)



71

- Consideriamo l'espressione  $\frac{e^x - 1}{x}$
- Proviamo a calcolare il valore di questa espressione per  $x = \varepsilon$  con  $\varepsilon$  infinitesimo, si ha  $\frac{e^\varepsilon - 1}{\varepsilon}$
- Poniamo  $\delta = e^\varepsilon - 1$ , quindi  $\varepsilon = \ln(\delta + 1)$  e l'espressione precedente diventa

$$\frac{\delta}{\ln(\delta + 1)} = \frac{1}{\frac{1}{\delta} \cdot \ln(\delta + 1)}$$

- Sappiamo però che  $\frac{1}{\varepsilon} \ln(\varepsilon + 1) = 1$  per cui
$$\text{std} \frac{e^\varepsilon - 1}{\varepsilon} = \text{std} \frac{1}{\frac{1}{\delta} \cdot \ln(\delta + 1)} = 1$$

Ricordiamo che

$\frac{1}{\delta} \cdot \ln(\delta + 1) = \ln(\delta + 1)^{\frac{1}{\delta}}$   
e poi usiamo il risultato ottenuto in precedenza  $\text{std}[\ln(\varepsilon + 1)^{\frac{1}{\varepsilon}}] = 1$

Analisi non  
standard  
Il laboratorio  
Piano delle attività  
Definizioni  
Microscopi  
Tipologia  
Operazioni  
Il postulato di  
Eudosso  
Un esercizio  
Altre definizioni  
Parte standard  
Alcuni problemi

Equazioni  
differenziali

# La derivata della funzione esponenziale (1)

72

- Sia  $y = e^x$  la funzione esponenziale
  - il rapporto differenziale è  $\frac{de^x}{dx} = \frac{e^{x+dx} - e^x}{dx}$  con  $dx$  infinitesimo
  - usando le proprietà delle potenze possiamo scrivere  $\frac{de^x}{dx} = e^x \frac{e^{dx} - 1}{dx}$
  - sappiamo che, se  $\delta$  è infinitesimo,  $\text{std} \frac{e^\delta - 1}{\delta} = 1$  per cui  $\text{std} e^x \frac{e^{dx} - 1}{dx} = e^x$
- Ricordando che la derivata  $f'(x)$  di una funzione  $f(x)$  è, per definizione,  $f'(x) = \text{std} \frac{df(x)}{dx}$  ecco la nostra derivata:  
$$(e^x)' = e^x$$

Analisi non  
standard  
Il laboratorio  
Piano delle attività  
Definizioni  
Microscopi  
Tipologia  
Operazioni  
Il postulato di  
Eudosso  
Un esercizio  
Altre definizioni  
Parte standard  
Alcuni problemi  
Derivata  
Applicazioni  
Una prova di  
verifica  
Comportamento  
agli estremi  
**Esponenziali e  
logaritmi**  
Equazioni  
differenziali

## Iperreali

Introduzione di un nuovo insieme numerico

## Problemi

Gli iperreali aiutano a risolvere problemi

## Calcolo differenziale

La derivata di una funzione

## Applicazioni

Applicazioni alla geometria analitica, alla fisica e allo studio di funzioni

## Ritorno a *Hyperreal mountain*

Funzioni esponenziali e logaritmiche

## Valutazione

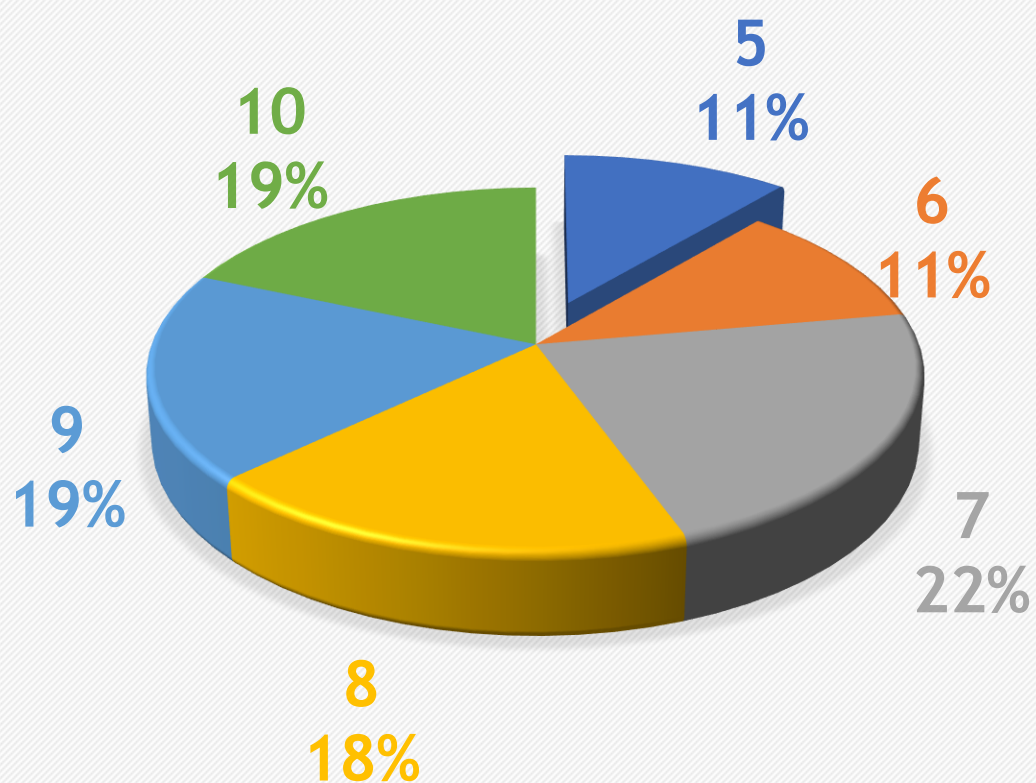
Cosa ne pensano studentesse e studenti

# Valutazioni della prova di verifica

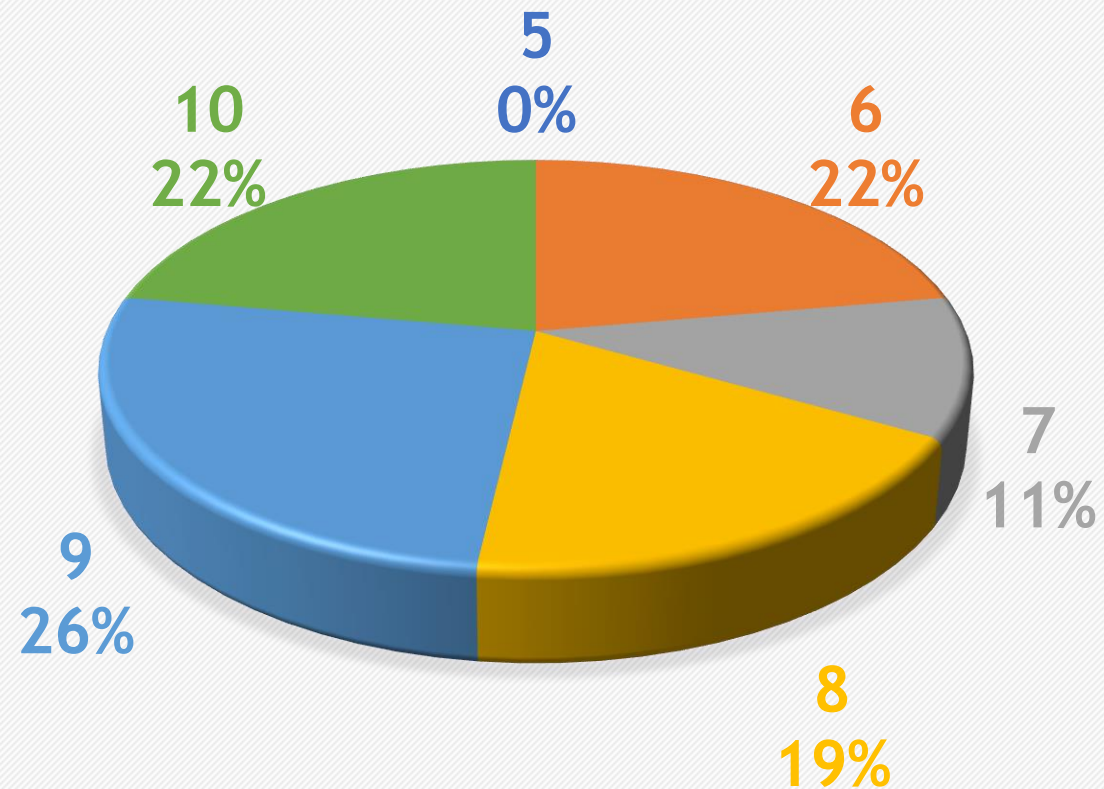
Le mediocrità della prova precedente sono diventate tutte sufficienze!



PRIMA DEL LABORATORIO ...



... DOPO IL LABORATORIO



# Giudizio complessivo sul laboratorio

75

NEL COMPLESSO, QUAL È IL GIUDIZIO SUL LABORATORIO

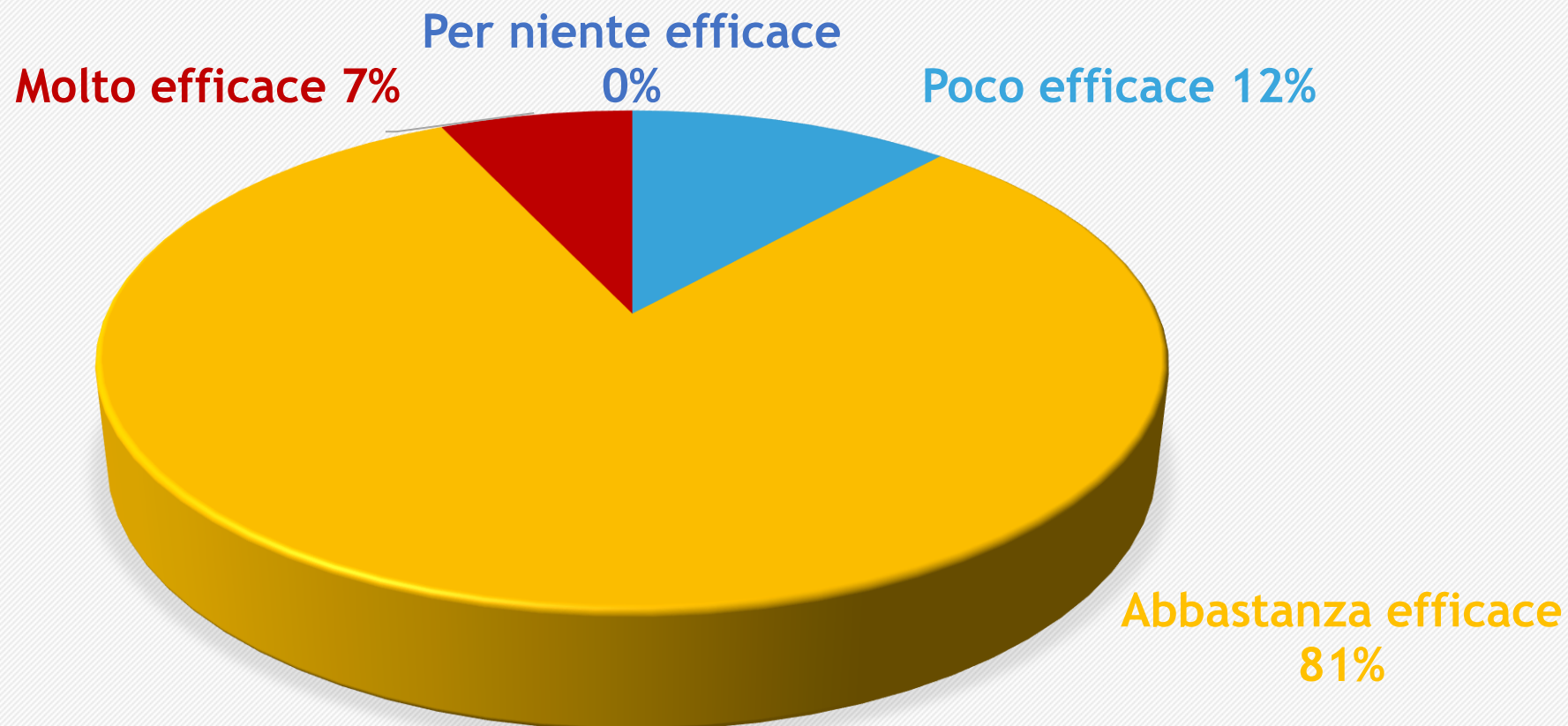


# Valutazione del docente (1)



76

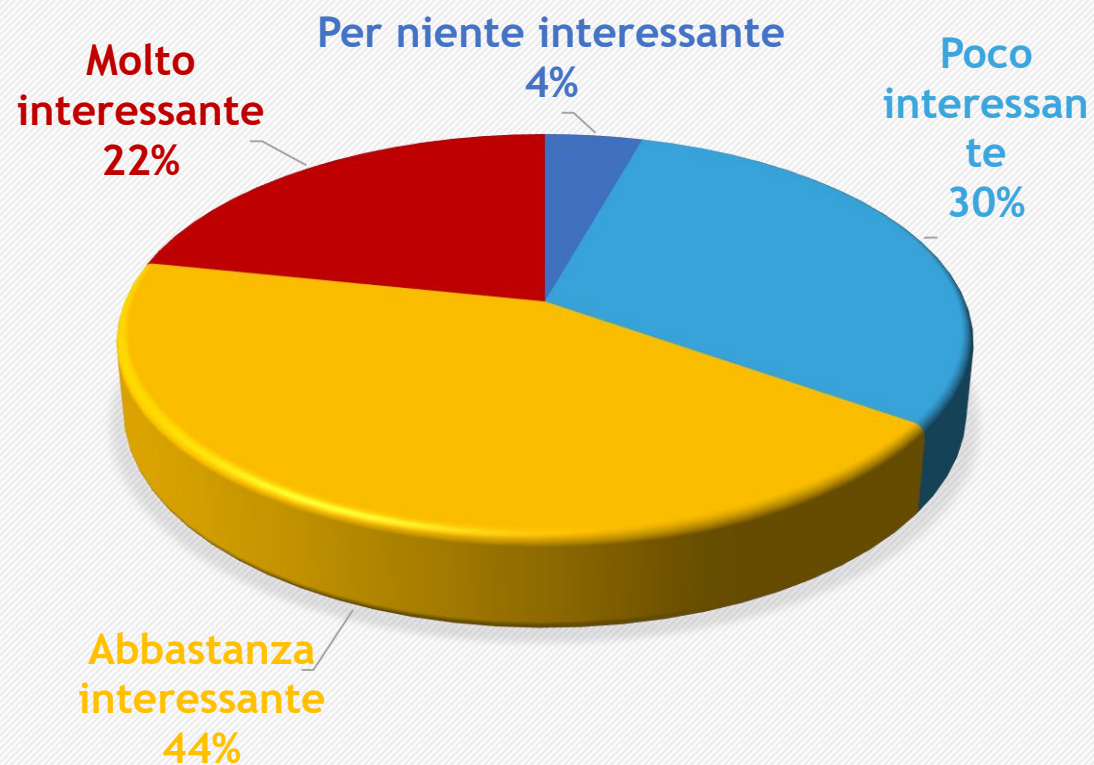
QUALITÀ DEL PERCORSO DIDATTICO RISPETTO AGLI OBIETTIVI



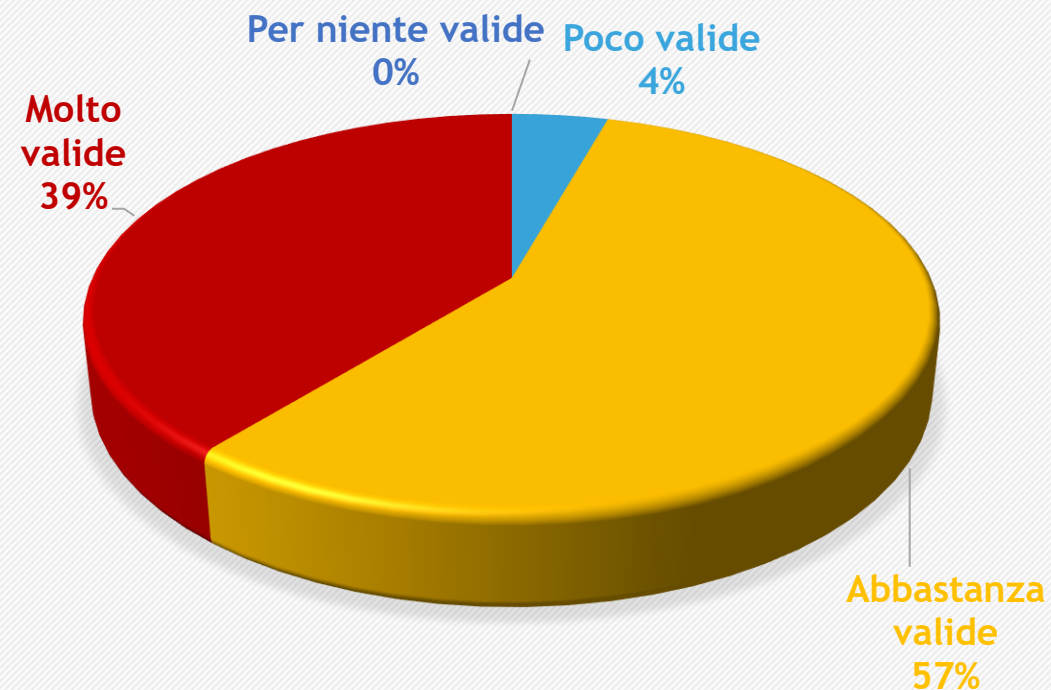
# Valutazione di conoscenze e competenze (1)

78

## INTERESSE PER GLI ARGOMENTI



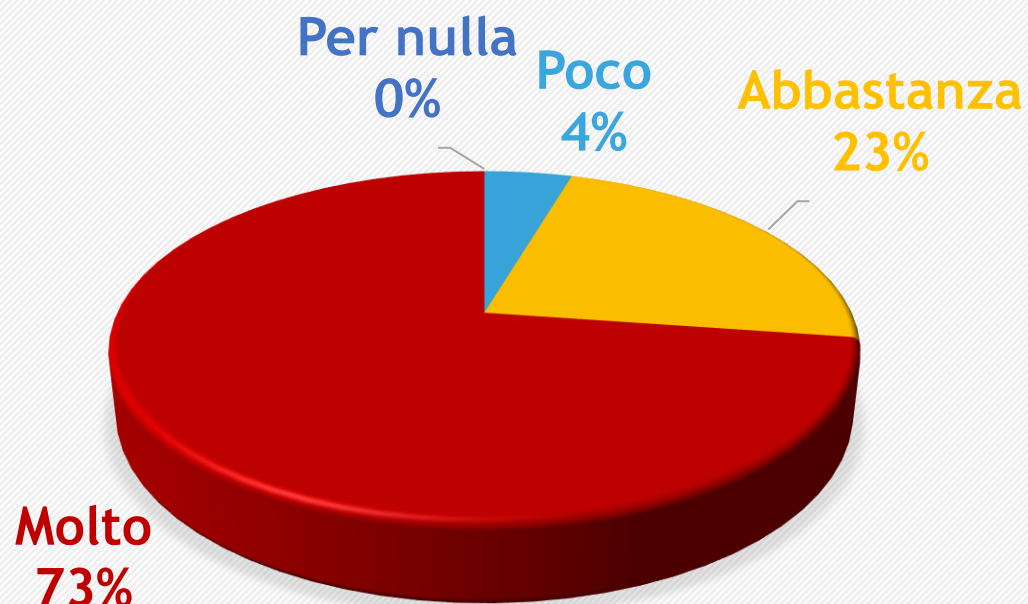
## CONOSCENZE E ABILITÀ CONSEGUITE



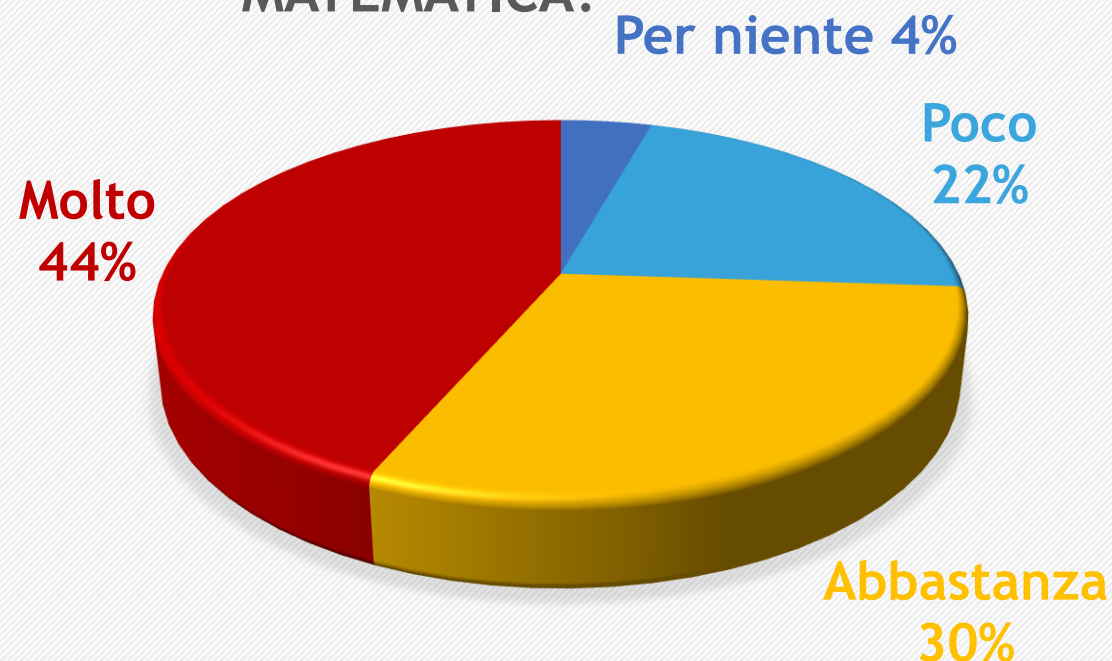
# Valutazione di conoscenze e competenze (2)

79

GLI ARGOMENTI TRATTATI TI SONO  
STATI UTILI NELLO STUDIO DELLA  
MATEMATICA E DELLA FISICA?



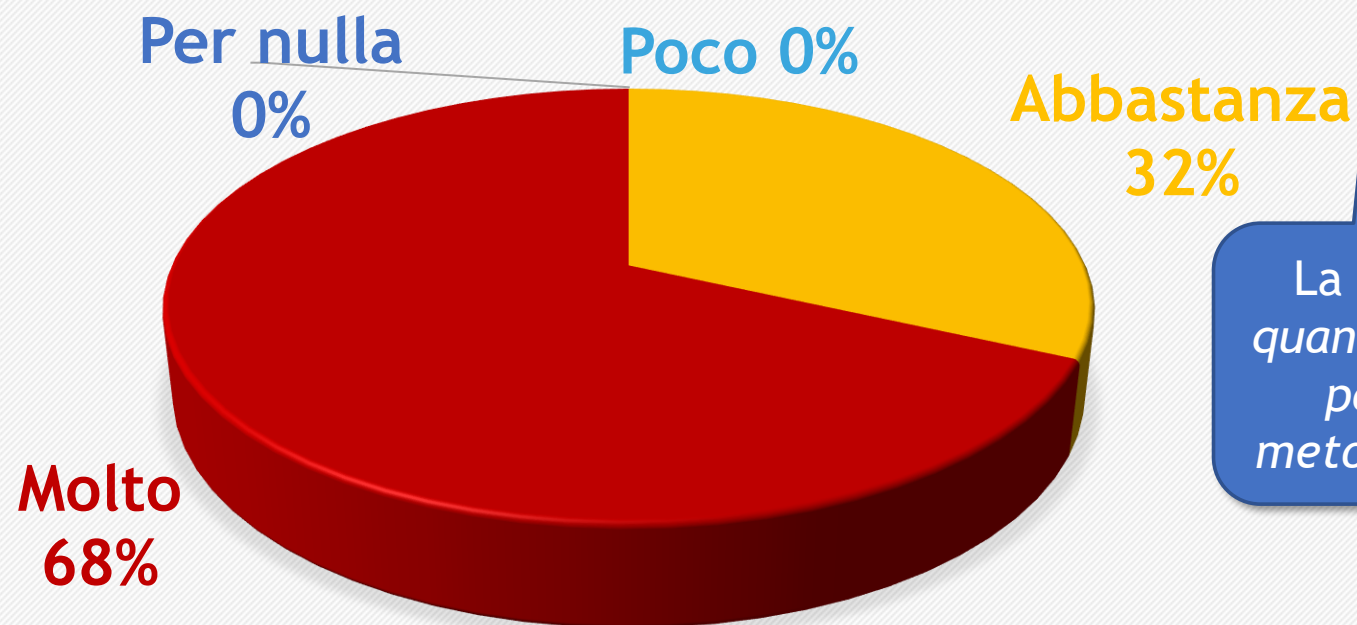
TI HANNO PERMESSO DI  
MIGLIORARE IN FISICA E  
MATEMATICA?



# Valutazione di conoscenze e competenze (3)

80

I METODI E LE PROCEDURE APPRESE NEL LABORATORIO TI SONO STATI UTILI QUOTIDIANAMENTE?



La domanda proseguiva con: *Da quando li hai appresi li usi, quando possibile, in sostituzione dei metodi che trovi nel libro di testo?*



- Presentazioni:
  - 01 insiemi numerici (31 *slide*): proprietà degli insiemi numerici noti, definizione di un insieme numerico e sue proprietà
  - 02 iperreali (28): definizione dell'insieme, operazioni, proprietà delle operazioni; infinitamente vicini, indistinguibili e parte standard
  - 03 calcolo differenziale (18): rapporto differenziale, derivata come parte standard del rapporto differenziale
  - 04 derivata (21): definizione, derivata delle funzioni fondamentali, formule di derivazione
  - 05 applicazioni delle derivate (25): interpretazione geometrica, applicazioni alla fisica
  - 06 Ritorno a Hyperreal Mountain (21): derivate di funzioni logaritmiche ed esponenziali, comportamento asintotico
- Esempi di prove di verifica
  - Geometria analitica, applicazioni fondamentali della derivata
  - Geometria analitica e fisica con applicazioni più *interessanti* (Un colpo da maestro)
  - Iperreali, prova strutturata

Classe terza di 27  
alunni/e: 8 di  
eccellenza, sei  
sufficienti e 3 in  
*difficoltà*

# Bibliografia



82

- AA.VV. - *Elementi di analisi non standard* - 2015, in Matematicamente (pubblicazione della sezione veronese di Mathesis)
- Goldoni, G. - *Il calcolo delle differenze e il calcolo differenziale* - 2014, Amazon fulfillment)
- Goldoni, G. - *I numeri iperreali*- 2017, Ilmiolibro)
- Robinson, A. - *Non standard analysis* - 1996, Princeton University Press
- Stecca, B. & Zambelli, D. - *Analisi non standard* - 2015, [docplayer.it/4477695-Analisi-non-standard-release-0-0-1-b-stecca-d-zambelli.html](http://docplayer.it/4477695-Analisi-non-standard-release-0-0-1-b-stecca-d-zambelli.html)
- Valenti, S. - *Dall'intero all'iperreale, un'introduzione graduata all'analisi non standard* - 1994, GRIM - quaderni di ricerca didattica n.5