La scala diabolica
(insieme e funzione di Cantor)

Gruppo: *Calcolo infinitesimale e applicazioni*
a.s. 2021-2022

Coordinatori Sapienza: Alessandro Gambini e Annalisa Malusa

Docenti: Noemi Stivali (Newton)
Donatella Ricalzone (Pascal)

Percorsi per le Competenze Trasversali e l'Orientamento

PCTO

Il Lavoro Matematico:

Interdisciplinarità,

laboratorio di ricerca,

sperimentazione e

divulgazione

Modalità di lavoro:

- la classe è stata divisa in gruppi di 4/5 alunni

- Il singolo gruppo di "**alunni ricercatori**" ha scelto un **argomento** tra quelli **proposti**. **(Laboratorio di ricerca)**

- Calendarizzazione di microlezioni dove gli alunni (a rotazione) scandiscono il tempo assegnato tra spiegazione, esercitazione e feedback. (**Sperimentazione e divulgazione**)

- Costruzione di un sito con *google sites* (ad esempio) nel quale raccogliere tutto il materiale prodotto e una presentazione riepilogativa (singola). **(Divulgazione)**

  https://sites.google.com/itispascal.it/la-scala-diabolica-cantor/home-page

- Simulazione del COLLOQUIO dell'esame: l'OM 65_2022 prevedeva un **collegamento stretto nello svolgimento del colloquio con il lavoro del pcto** e del **CURRICULUM** dello studente (con rilevanza della partecipazione al liceo matematico, nel nostro caso).

O.M. 65_2022

PECUP: Profilo Educativo, Culturale e Professionale

Articolo 22 (Colloquio)

1. ….Nello svolgimento dei colloqui la **commissione d’esame tiene conto delle informazioni contenute nel Curriculum dello studente**.

2. Ai fini di cui al comma 1, il candidato dimostra, nel corso del colloquio:
b. di saper analizzare criticamente e correlare al percorso di studi seguito e al PECUP, mediante una breve relazione o un lavoro multimediale, **le esperienze svolte nell’ambito dei PCTO**, con riferimento al complesso del percorso effettuato, tenuto conto delle criticità determinate dall’emergenza pandemica;

5. La sottocommissione provvede alla predisposizione e all’assegnazione dei materiali all’inizio di ogni giornata di colloquio, prima del loro avvio, per i relativi candidati. Il materiale è finalizzato a favorire la trattazione dei nodi concettuali caratterizzanti le diverse discipline e del loro rapporto interdisciplinare. Nella predisposizione dei materiali e nella assegnazione ai candidati la sottocommissione tiene conto del percorso didattico effettivamente svolto, in coerenza con il documento di ciascun consiglio di classe, al fine di considerare le metodologie adottate, **i progetti e le esperienze realizzati**, con riguardo anche alle iniziative di individualizzazione e personalizzazione eventualmente intraprese nel percorso di studi, nel rispetto delle Indicazioni nazionali e delle Linee guida.

Il PECUP è il Profilo Educativo, Culturale E Professionale in uscita degli studenti della secondaria superiore.

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

SAPIENZA UNIVERSITÀ DI ROMA

ISAAC NEWTON

IIS Biagio Pascal Roma

La scala diabolica

(insieme e funzione di Cantor)

Gruppo: **Calcolo infinitesimale e applicazioni** a.s. 2021-2022

Coordinatori Sapienza: Alessandro Gambini e Annalisa Malusa

Docenti: Noemi Stivali (Newton) e Donatella Ricalzone (Pascal)

Schede di lavoro Biografia di Cantor Quaderno Cantor

Spunti per l'esame orale Presentazioni PCTO

https://sites.google.com/itispascal.it/la-scala-diabolica-cantor/home-page?authuser=0

Il Sito è formato da alcune sezioni (per ora)

- Biografia Georg Cantor (1845-1918)
- Schede di lavoro docente/alunno
  Schede esercizi fatte con moduli google
- Quaderno di lavoro
- Costruiamo l'insieme di Cantor
- Spunti per il colloquio d'esame

Schede di Lavoro docente/alunno

Schede per esercizi fatte con moduli Google

Scheda n°1 Cambiamento di base

Rispondi alle domande della scheda n°1

Scheda n° 2 Cardinalità

Rispondi alle domande della scheda n°2

Scheda n° 3 Insieme di Cantor- La "Polvere di Cantor

Rispondi alle domande della scheda n°3

Scheda n° 4 La funzione di Cantor - La "Scala" di Cantor

Rispondi alle domande della scheda n°4

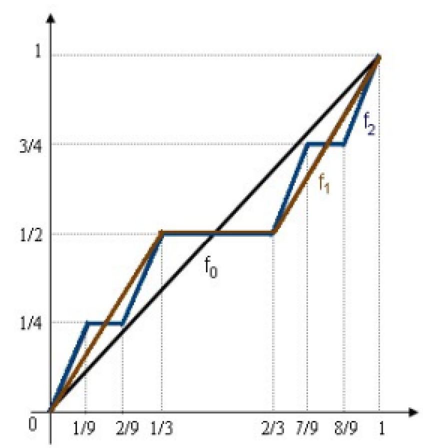
Scheda n° 5 Trasformazioni geometriche e insieme di Cantor

Quaderno di lavoro

Dipartimento di Matematica
Sapienza Università di Roma

Isaac Newton

IIS Biagio Pascal di Roma
Istituto Tecnico Tecnologico
Liceo Scientifico e Liceo Scienze Umane



La scala diabolica
(insieme e funzione di Cantor)

Quaderno di lavoro

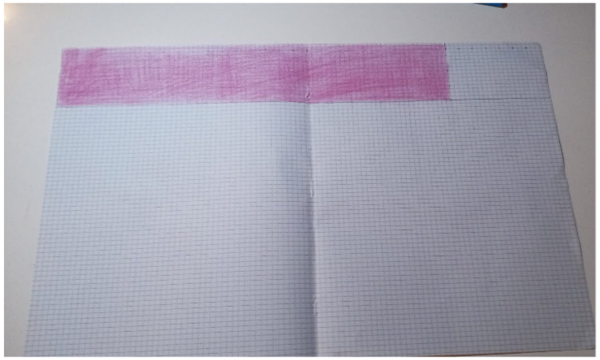
Gruppo: Calcolo infinitesimale e applicazioni
a.s. 2021-2022

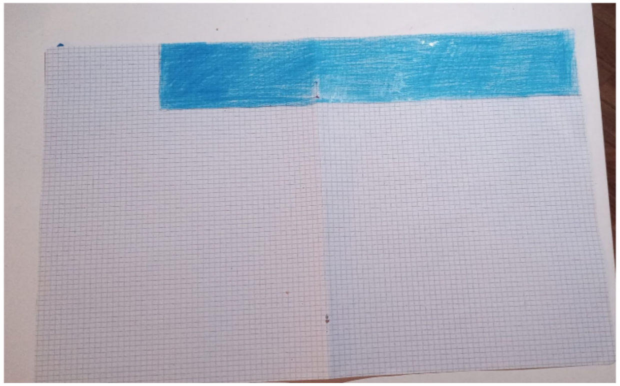
Costruiamo l'insieme di Cantor

Materiale:

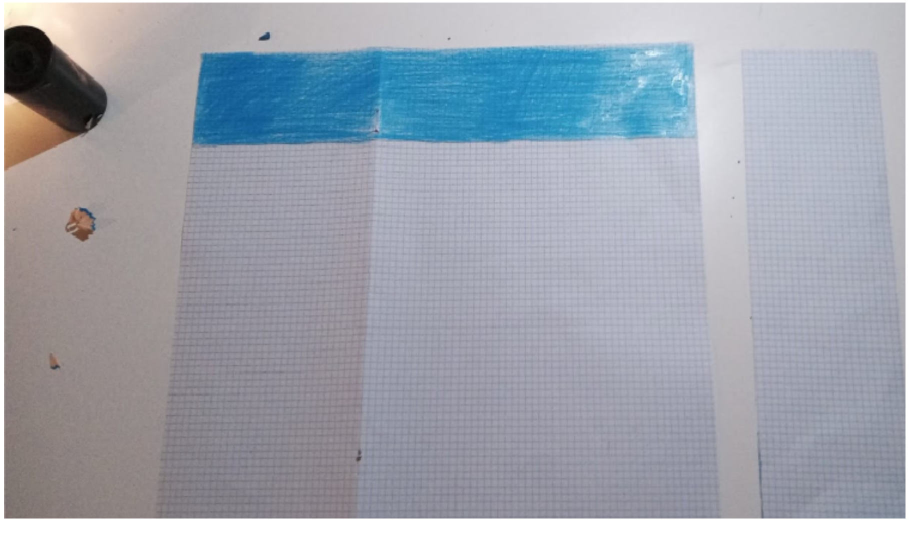
Foglio protocollo a quadretti (4mm), matite colorate, forbici righello.

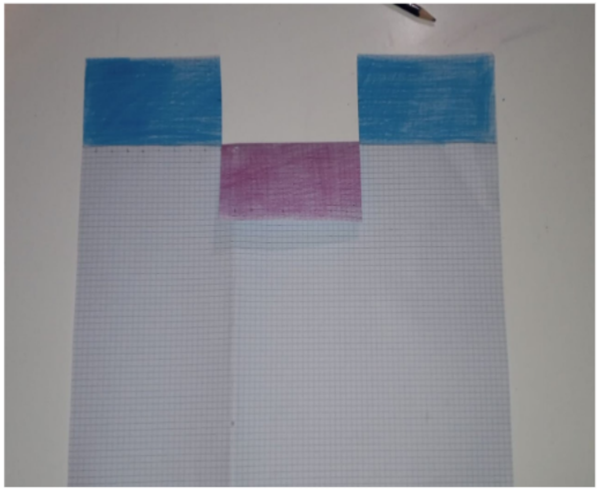
In alternativa due fogli di carta colorata incollati fronte con il retro e quadrettati, in modo da avere il fronte e il retro di colore diverso.

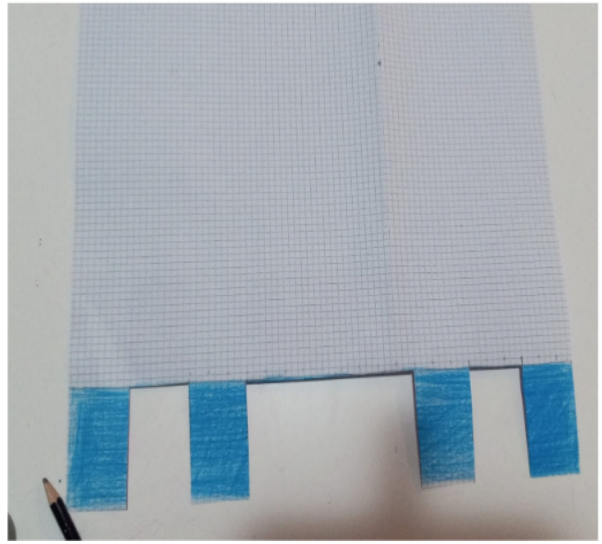


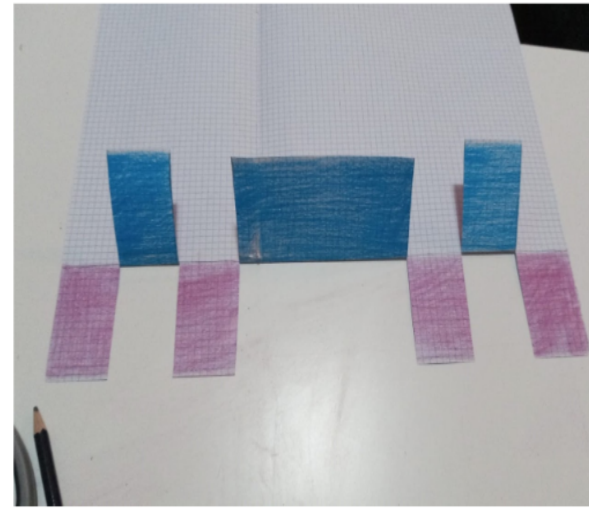


- Apriamo il foglio protocollo e contiamo in orizzontale 81 quadretti (in totale dovrebbero essere 102).
- Restringiamo il foglio con un taglio verticale e lasciamo solo come larghezza 81 quadretti.
- Coloriamo una striscia orizzontale lunga tutto il foglio (81 quadretti) e larga 16 quadretti con una matita colorata e nel retro della striscia usiamo un colore differente.







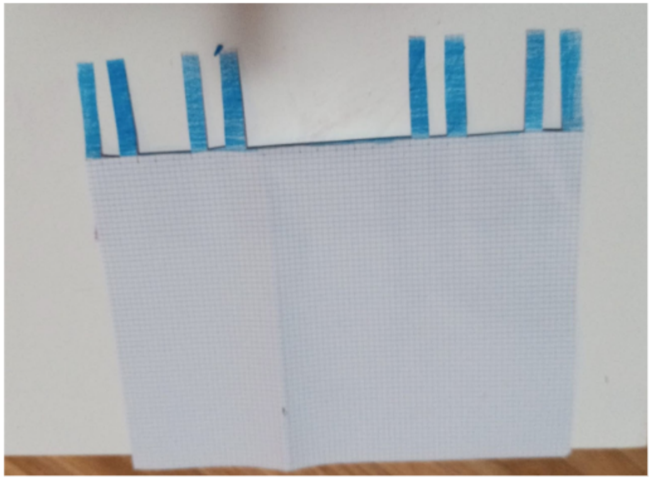


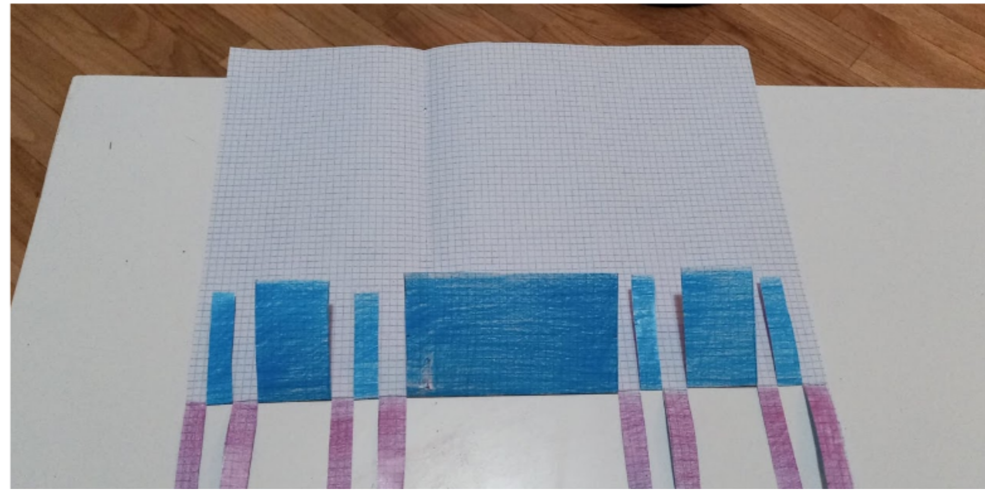
- Dividiamo in tre parti la striscia (ripiegandola oppure contando 27 quadretti).
- Tagliamo ripieghiamo il rettangolo centrale in avanti e indietro.
- Cosa rappresenta l'unione dei due rettangoli azzurri?

____

____

____





- Ripetiamo il procedimento per ogni rettangolo azzurro rimasto due volte.

- Spiega cosa intendiamo per intersezione di C1, C2 e C3?

  ____

  ____

  ____

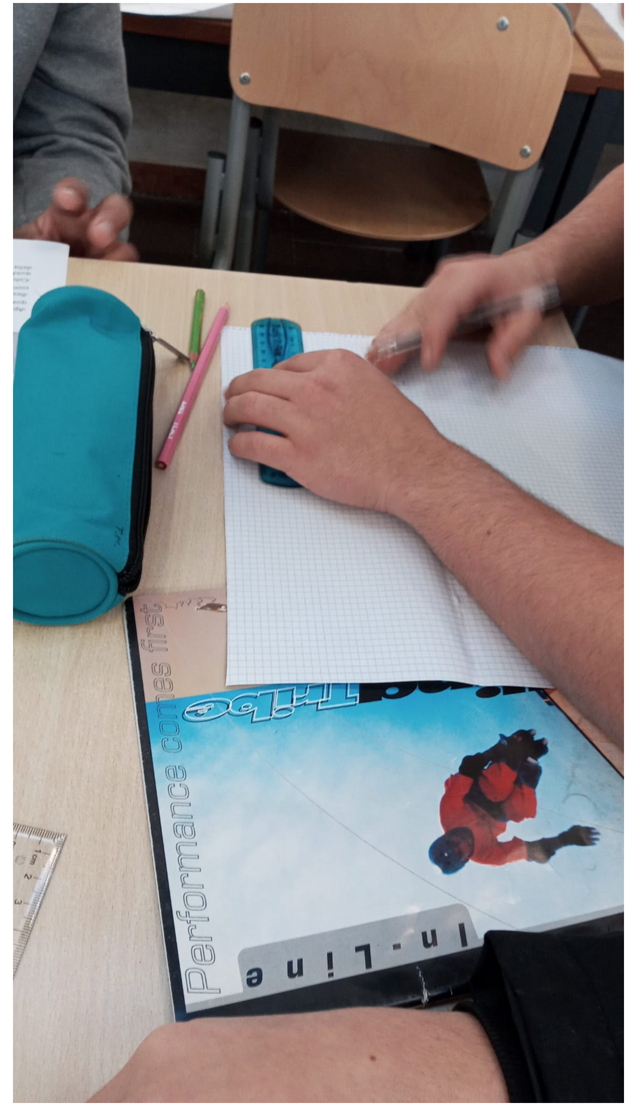
- Cosa possiamo dire osservano i rettangoli rosa e azzurri girando il foglio?

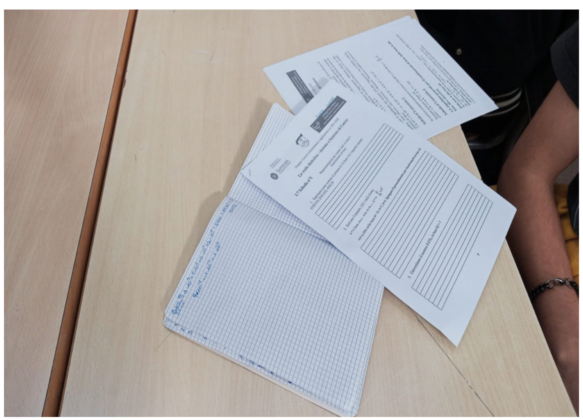
  ____

  ____

  ____


CORSO


Performance comes first
In-Line



Costruzione grafico intuitiva della funzione di Cantor

$$f(x) = \begin{cases} f((0, a_1 a_2 a_3 \dots \dots)_3) = (0, \frac{a_1}{2} \frac{a_2}{2} \frac{a_3}{2} \dots \dots)_2 & x \in \boldsymbol{C} \\ cost. & x \in [0,1] \setminus \boldsymbol{C} \end{cases}$$

Se x è un elemento di C, la sua scrittura in base 3 è del tipo $x := 0{,}a_1 a_2 a_3 \dots$ in cui gli a_i sono solo 0 oppure 2.

Adotteremo la convenzione per cui:

i numeri *ternari finiti* con ultima cifra uguale a 1 vengono modificati in numeri ternari periodici di *periodo* 2 (analogamente, in base 10, 0.299999... e 0.3 sono lo stesso numero).

$(0.1)_3 = (0.0\bar{2})_3$

La definizione ci dice che **l'immagine di x si ottiene sostituendo tutti i 2 della scrittura ternaria con degli 1, e interpretando il numero così ottenuto in base due.**

Vogliamo costruire una successione di funzioni che abbiano il valore 0 in 0 e il valore 1 in 1, cioè: $f_n(0)=0$, $f_n(1)=1$

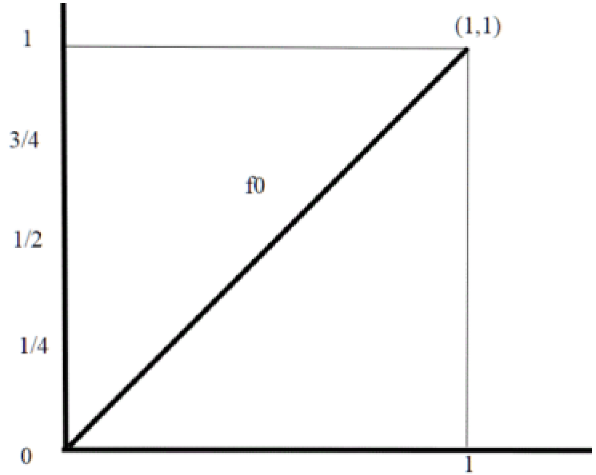
Costruiamo la seguente tabella:

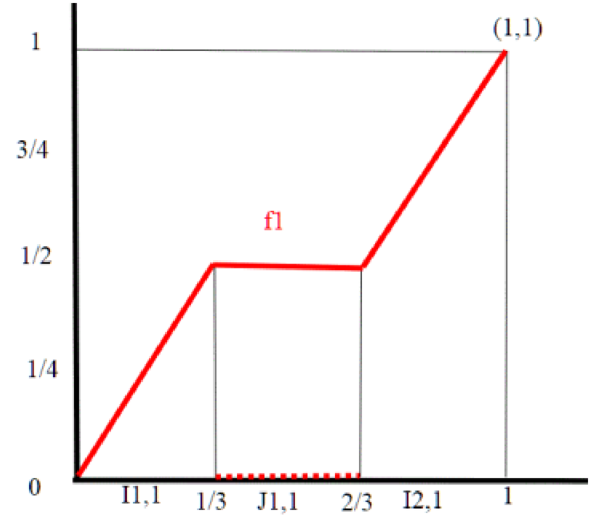
Passo	X	Base 3	Cantor (i 2 diventano 1)	Base 10 (Y)
0	0	0	0	0
	1	1	1	1
1	1/3	$(0.1)_3 = (0.0\bar{2})_3$	$(0.0\bar{1})_2 = (0.1)_2$	1/2
	2/3	$(0.2)_3$	$(0.1)_2$	1/2
2	1/9	$(0.01)_3$	$(0.00\bar{1})_2 = (0.01)_2$	1/4
	2/9	$(0.02)_3$	$(0.01)_2$	1/4
	7/9	$(0.21)_3$	$(0.11)_2$	3/4
	8/9	$(0.22)_3$	$(0.11)_2$	3/4

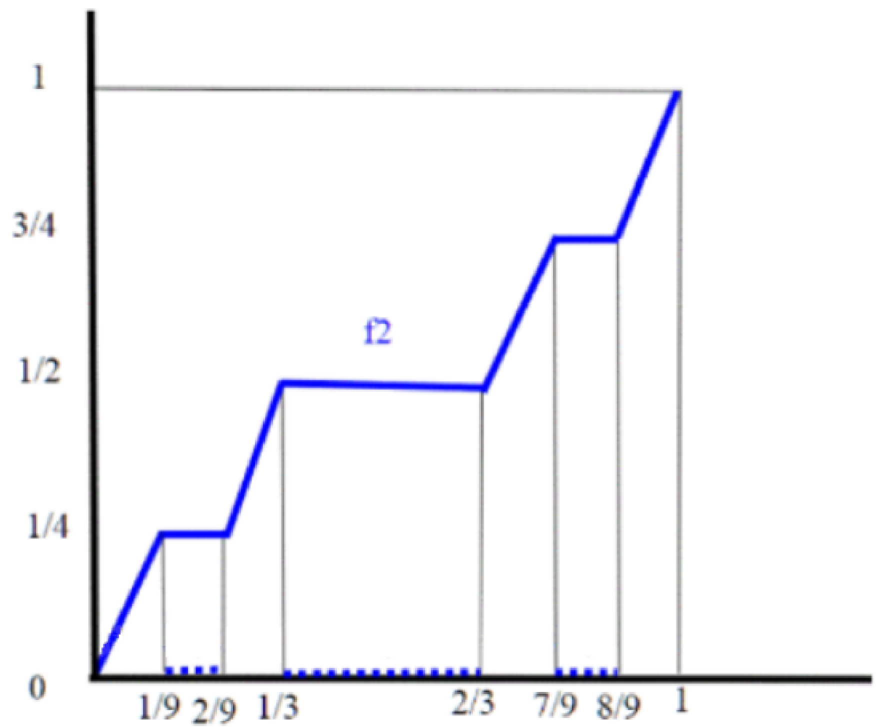
Proviamo a fare il frafico di f_0, f_1 ed f_2

La funzione di Cantor, f(x), è il limite di questa successione di funzioni fn:

$$f(x) = lim_{n \to +\infty} f_n(x).$$


1
(1,1)
3/4
f0
1/2
1/4
0
1


1
(1,1)
3/4
f1
1/2
1/4
0
I1,1
1/3
J1,1
2/3
I2,1
1


1
3/4
f2
1/2
1/4
0
1/9
2/9
1/3
2/3
7/9
8/9
1

Vediamo sul sito la scheda n 3

3. Insieme di Cantor – la “polvere” di Cantor

https://drive.google.com/file/d/1nhQS3oz69vltVw_NOZ-ObcLlJKcyc8yb/view

- **Costruzione dell'insieme di Cantor**

con C_k indichiamo l’unione degli intervalli rimasti al *k*-esimo passo. Possiamo quindi definire *l’insieme di Cantor* :

$$C = \bigcap_{k=0}^{\infty} C_k.$$

Gli insiemi C_k sono incapsulati cioè una successione di intervalli tali che il successivo è incluso nel precedente $C_0 \supset C_1 \supset C_2 \supset \ldots$ e diventano via via più piccoli al crescere di k. Ogni C_k consiste di 2^k intervalli chiusi e disgiunti, ognuno di lunghezza $\frac{1}{3^k}$.

C è chiuso, poiché intersezione di una famiglia di insiemi chiusi.

- **Misura dell'insieme di Cantor**

Ad ogni passo viene rimosso "un terzo dei punti" (cioè dei segmenti aventi misura un terzo del totale). Quindi possiamo calcolare la misura totale dell'insieme rimosso tramite la seguente serie geometrica, che converge alla **misura dell'insieme dei punti rimossi** dall'intervallo:

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{4}{27}+\frac{8}{81}+\dots = \frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{8}{27}+\dots\right) = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-\frac{2}{3}}\right) = 1$$

Serie geometrica di ragione q = $\frac{2}{3}$

Quindi l'insieme di Cantor, che è "ciò che rimane", ha misura: [1(misura dell'intero intervallo) – 1] = 0.

- **L'insieme di Cantor ha misura 0**

- **La cardinalità dell'insieme di Cantor è del continuo**

Infatti l'insieme di Cantor contiene tanti punti quanti ne contiene l'intervallo [0, 1], entrambi hanno la cardinalità del continuo.

Per dimostrarlo, è sufficiente costruire una funzione f dal suriettiva dal primo al secondo insieme.

La funzione è descritta nella scheda:

- si scrivono in base tre i punti che appartengono all'intervallo [0,1].
- si verifica che i numeri che non vengono mai rimossi sono esattamente quelli che possono essere scritti come $0.xxxx\ldots_3$ usando solo le cifre 0 e 2.
- Se sostituisco ogni cifra "2" con la cifra "1", e leggo il nuovo numero in base binaria, ottengo un altro numero in [0,1]:

  In questo modo ho associato ad ogni numero dell'insieme di Cantor un altro numero dell'intervallo.
  La funzione è suriettiva perché ogni numero di [0,1] si scrive come $0.yyyy\ldots_2$.

Vediamo sul sito la scheda n 4

4. La funzione di Cantor – La Scala Diabolica

https://sites.google.com/itispascal.it/la-scala-diabolica-cantor/scheda-n4-la-funzione-di-cantor?authuser=0

Definiamo la funzione di Cantor:

$$f(x) = \begin{cases} f((0,a_1a_2a_3\dots\dots)_3) = (0,\frac{a_1}{2}\frac{a_2}{2}\frac{a_3}{2}\dots\dots)_2 & x \in \boldsymbol{C} \\ cost. & x \in [0,1] \setminus \boldsymbol{C} \end{cases}$$

Se x è un elemento di C, la sua scrittura in base 3 è del tipo $x: = 0,a_1a_2a_3\dots$ in cui gli a_i sono solo 0 oppure 2 (vedi la teoria della scheda n°3 pag. 3).
La definizione ci dice che l'immagine di x si ottiene sostituendo tutti i 2 della scrittura ternaria con degli 1, e interpretando il numero cosi ottenuto in base due.

$$f(x) = \begin{cases} f((0, a_1 a_2 a_3 \ldots \ldots)_3) = (0, \frac{a_1}{2} \frac{a_2}{2} \frac{a_3}{2} \ldots \ldots)_2 & x \in \boldsymbol{C} \\ cost. & x \in [0,1] \setminus \boldsymbol{C} \end{cases}$$

- La funzione di Cantor non è iniettiva (f(1/3) =f(2/3) ma suriettiva
- É non decrescente
- È continua
- La funzione di Cantor è derivabile quasi ovunque (tranne che sull’insieme C, che ha misura nulla), con derivata nulla.
- L’integrale della derivata della scala diabolica (quando essa è derivabile) non è la scala diabolica.

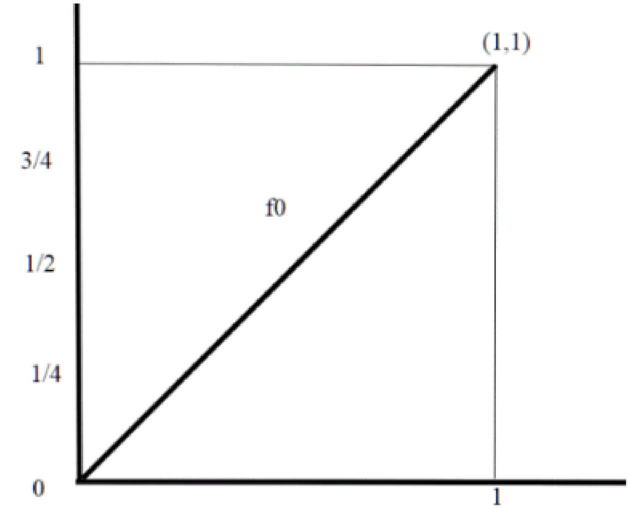
Costruzione grafico-intuitiva della funzione di Cantor

Vogliamo costruire una successione di funzioni che abbiano il valore 0 in 0 e il valore 1 in 1, cioè: $f_n(0)=0$, $f_n(1)=1$

Tutte le f_n devono essere debolmente crescenti.

Tutte le fn devono essere poi continue; le costruiremo con delle poligonali, che senz'altro sono delle funzioni continue.

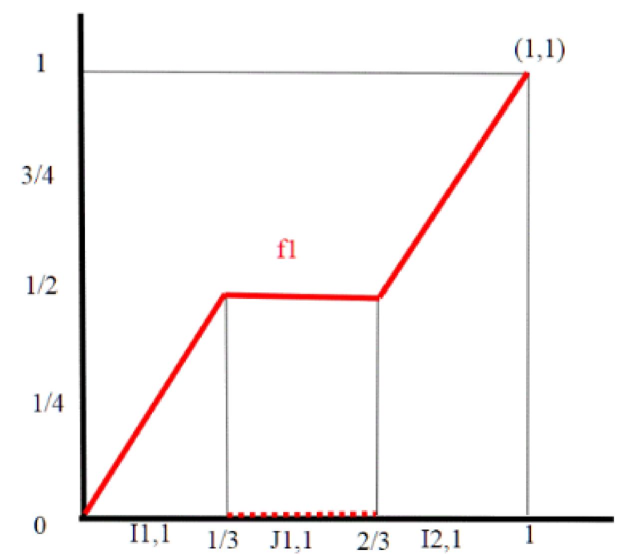
Definiamo $\mathbf{f_0(x)}$ il tratto obliquo che unisce [0,0] a [1,1], che quindi è una retta, di equazione y=x



Passiamo ora a $\mathbf{f_1(x)}$.

Seguiamo sulle ascisse il metodo usato per generare l'insieme di Cantor;

Dividiamo l'intervallo [0,1], che è il dominio della nostra funzione, inizialmente in tre parti uguali, come nella costruzione dell'insieme di Cantor. Nell'intervallo (1/3,2/3) che corrisponde ad uno degli intervalli tolti nel primo passo dell'insieme di Cantor, poniamo f_1 costantemente uguale ad ½ che è il valore della funzione di Cantor calcolata in 1/3 e in 2/3

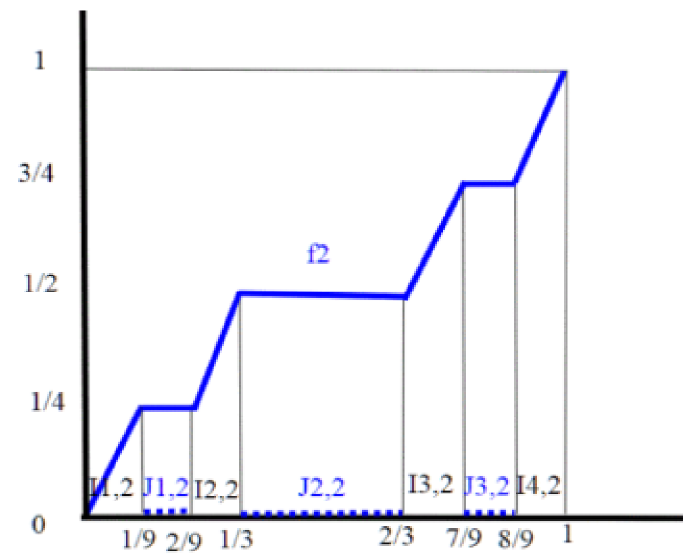


Indichiamo con J_{kn} il k-esimo tratto tolto della n-esima funzione: poniamo uguale a $\frac{k}{2^n}$ il valore della f_n nell'intervallo $J_{k,n}$. ($\frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$)

I tratti obliqui sottendono un intervallo chiuso sull'asse delle x in cui gli estremi (non venendo mai cancellati) sono punti dell'insieme di Cantor C.

Passiamo ad f_2:

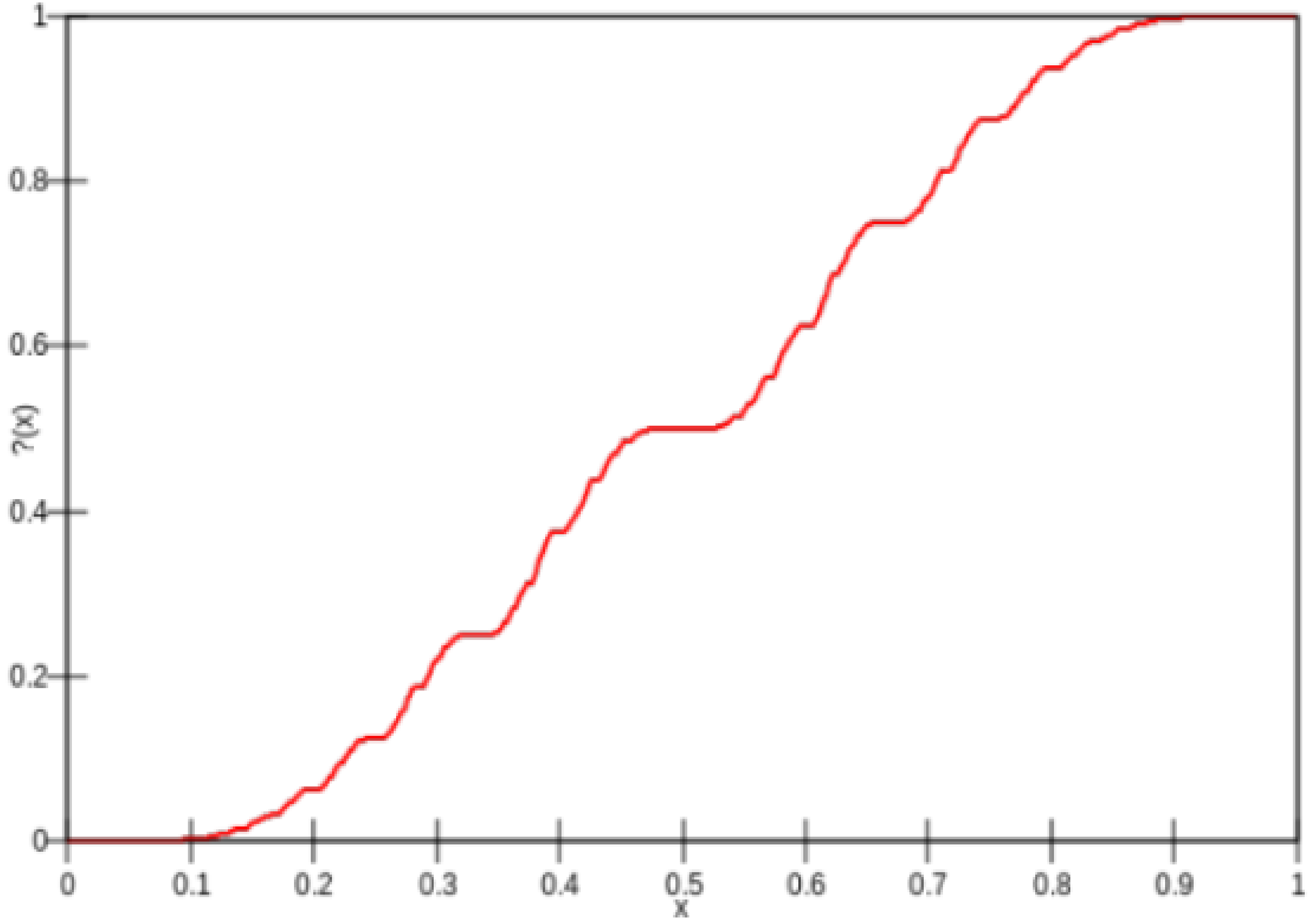
gli intervalli tolti sono adesso 3 in totale, gli associamo secondo la regola di prima il valore $\frac{k}{2^n}$; in $J_{1,2}$, $\frac{1}{2^2} = 1/4$, in $J_{2,2}$ $\frac{2}{2^2} = 1/2$, in $J_{3,2}$ $\frac{3}{2^2} = 3/4$.



La funzione di Cantor, f(x), è il limite di questa successione di funzioni fn:

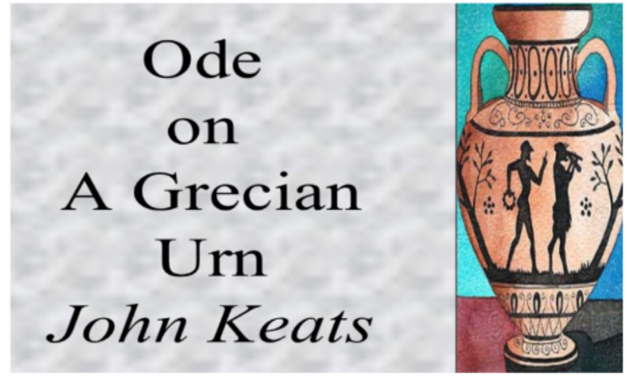
$f(x) = lim_{n \to +\infty} f_n(x)$.

Nel procedimento di raffinamento del grafico otteniamo un sempre maggior numero di tratti orizzontali, corrispondenti a tutti i segmenti che abbiamo cancellato dall'intervallo [0, 1] durante la costruzione dell'insieme di Cantor; mentre la salita si spezzetta in tratti sempre più corti, ma sempre più pendenti. La funzione vera e propria ha quindi infiniti tratti orizzontali, che corrispondono alle "*pedate*" della scalinata.



1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
?(x)
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
x

Spunti per il colloquio d'esame



I due giovani innamorati tendono l'uno verso l'altro ma il contatto e il bacio non avvengono mai perché la "fotografia è scattata" un attimo prima che ciò avvenga. I due tenderanno all'incontro per sempre, all'infinito, senza realizzarlo mai.

Escher: limite del cerchio III (frattali), Serpenti