18 Novembre 2022

Argomenti di aritmetica e algebra

Questioni di rapporti: *frazioni egizie e congetture*

Prof.ssa Rita Zuccante – Liceo scientifico G.Peano di Monterotondo

Prof.ssa Maristella Petralla - Liceo scientifico Amedeo Avogadro Roma

FRAZIONI EGIZIE: DEFINIZIONI E COSTRUZIONI

Una frazione egizia è una frazione del tipo $\frac{1}{n}$, con n intero positivo.

Una frazione egizia può essere rappresentata sulla retta orientata: è un punto sulla retta che si può costruire partendo da un quadrato di lato 1

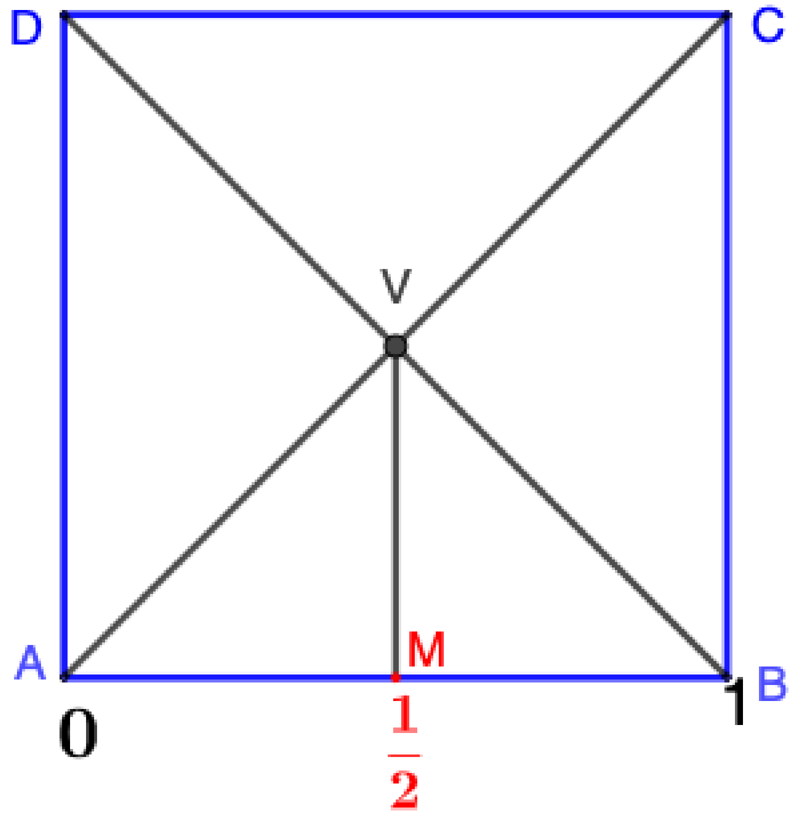
$$\mathbf{\frac{1}{2}}$$

Dato l'intervallo [0;1] di estremi A e B:

- costruiamo il quadrato ABCD di lato 1
- tracciamo le diagonali DB e AC
- dal punto di incontro V delle diagonali tracciamo il segmento VM perpendicolare ad AB.

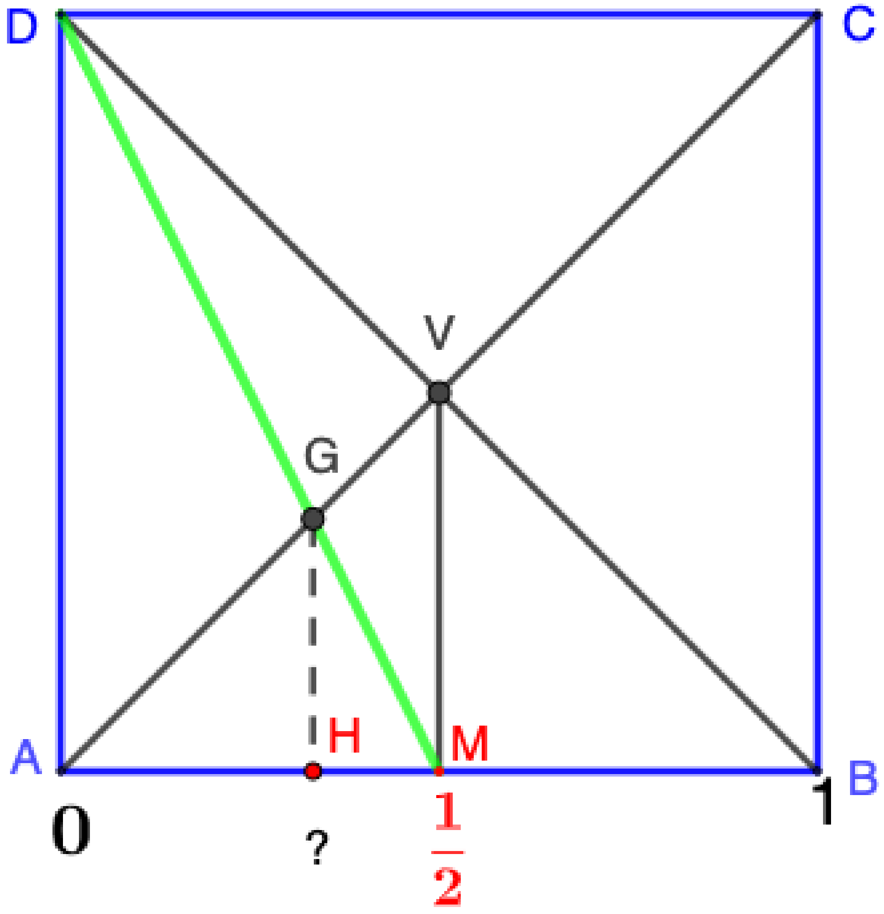
Il punto M è il punto medio di AB e quindi

M corrisponde ad $\mathbf{\frac{1}{2}}$



- Congiungiamo M con D,
- dal punto G, intersezione di DM con AC, tracciamo la perpendicolare ad AB;
- otteniamo il punto H proiezione di G su AB

H corrisponde a  .



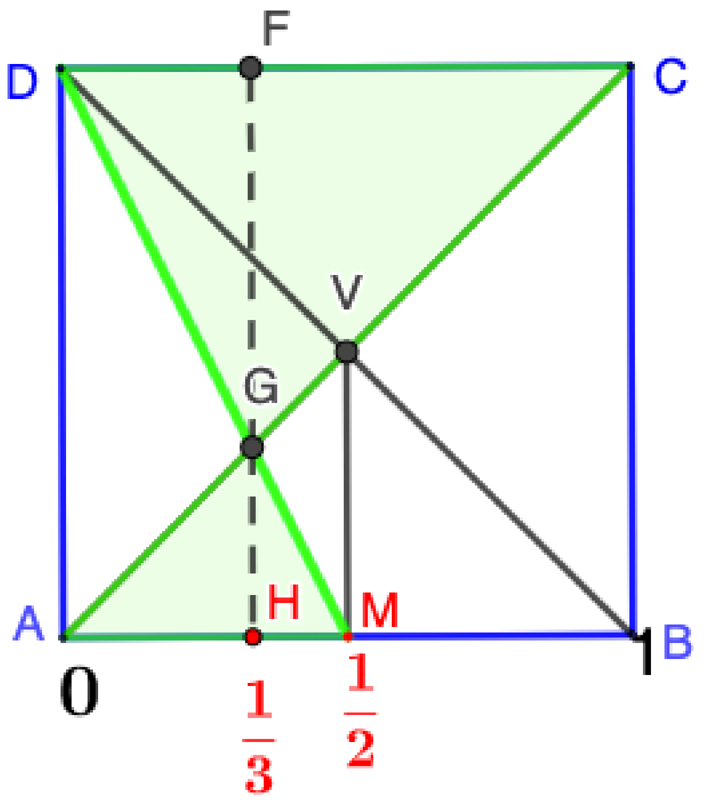
$$\frac{1}{3}$$

Per la similitudine dei triangoli AM , CD e posto $AH = x$ si ottiene

$$GH:GF = AM:CD$$

$$x : (1 - x) = \frac{1}{2} : 1 \qquad x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x; \qquad x = \frac{1}{3}$$

Altra dimostrazione: G è il baricentro del triangolo ABD, quindi GV è $\frac{1}{3}$ di AV e per Talete HM è $\frac{1}{3}$ di AM.



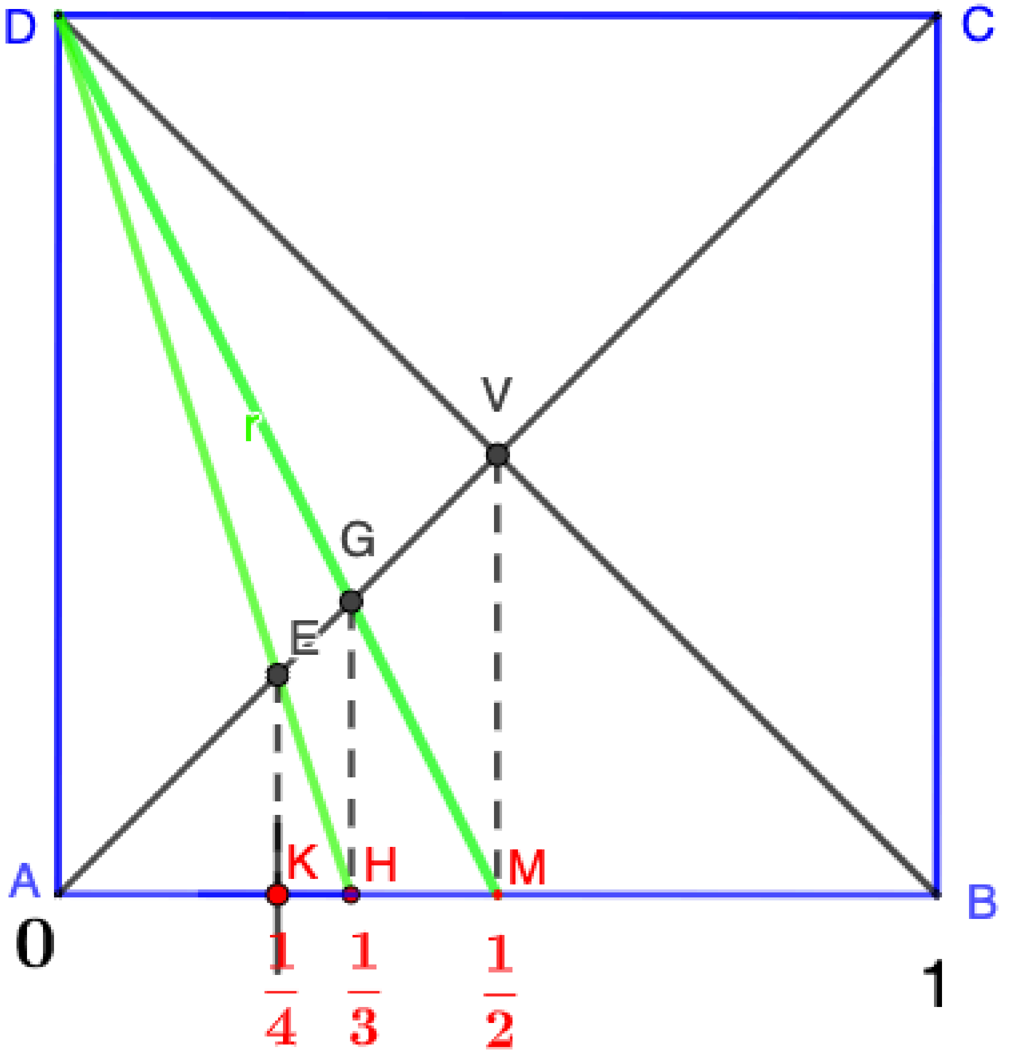
Si può intanto osservare che

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$$

$$\mathbf{\frac{1}{4}}$$

Procedendo allo stesso modo :

- Si congiunge H con D,
- detto E il punto di intersezione di HD con AC ,
- la proiezione ortogonale di E su AB corrisponde al punto $\frac{1}{4}$.



osservare che : $\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{6}$

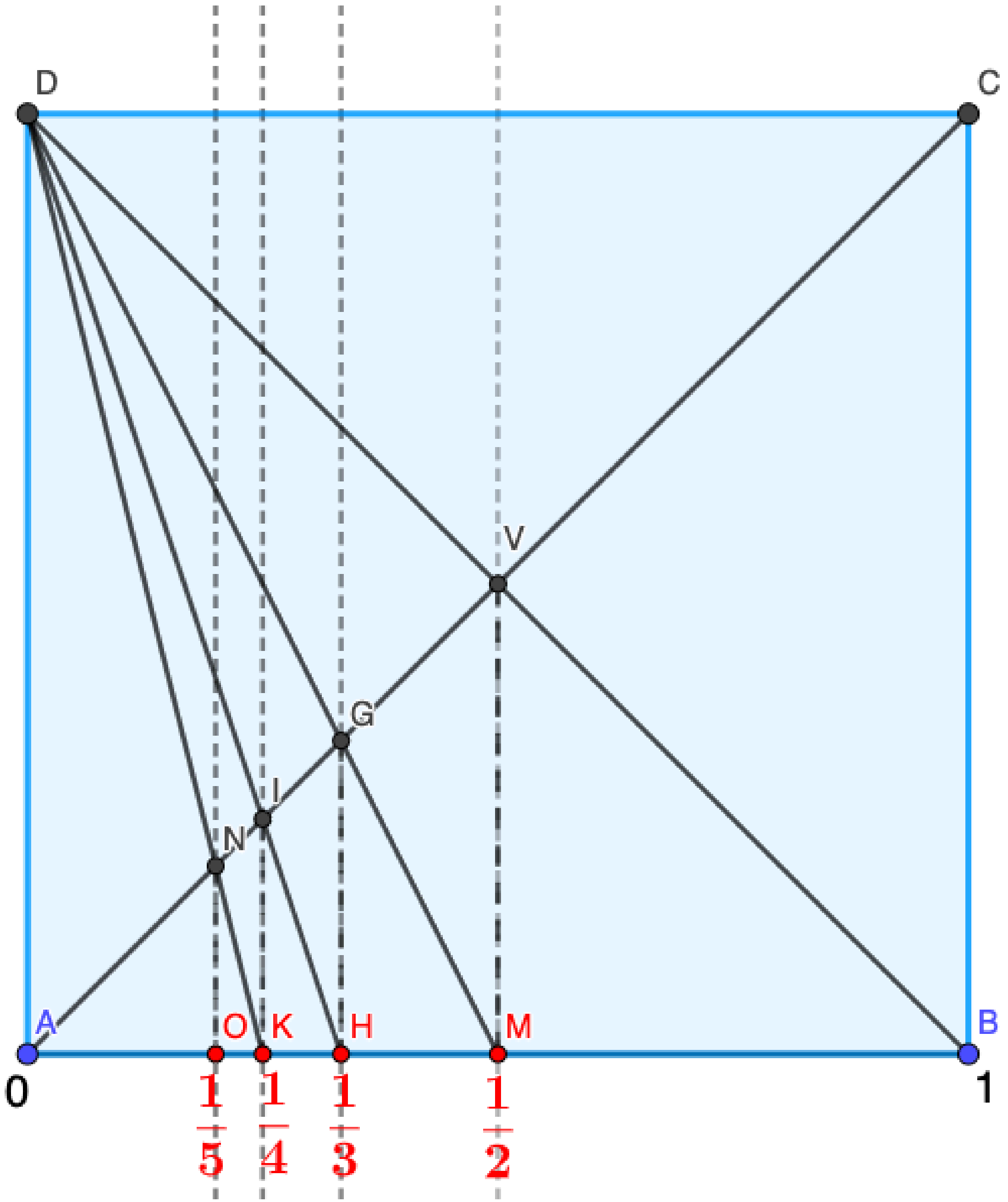
Procedendo in modo analogo otteniamo $\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$

In generale :
una frazione egizia è somma di frazioni egizie

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$$

si può ***aumentare*** il numero di addendi di una somma sostituendo l'ultimo termine con due più piccoli.

"Processo di reazione a catena nella teoria dei numeri"



CONGETTURA DI ERDÖS –STRAUS
formulata nel 1948

Congettura: $\frac{4}{n}$ si può sempre scrivere come somma di tre frazioni egizie per ogni n intero positivo, $n > 2$.

In formule, per ogni n intero positivo, $n > 2$, esistono a, b, c interi positivi tali che

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

Esempi

$$\frac{4}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{20}$$

$$\frac{4}{7} = \frac{1}{2} + \frac{1}{21} + \frac{1}{42}$$

$$\frac{4}{7} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{14}$$

$$\frac{4}{241} = \frac{1}{69} + \frac{1}{482} + \frac{1}{33258}$$

- La congettura è stata verificata tramite "forza bruta" (per tentativi in pratica) e sfruttando alcune identità frazionarie, fino a $n = 10^{14}$ ossia n = 100.000.000.000.000 cioè 100 mila miliardi.

- È stato verificato che si possono trovare 3 frazioni egizie per tutti i valori di n fino a 51.000.000-esimo primo 1003162753 ma finora nessuno lo ha dimostrato vero per tutti i valori di n né nessuno ha trovato un numero n per il quale non sia vero.

0	**1**	**2**	**3**
0	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15
16	17	18	19
20	21	22	23
24	25	26	27
28	29	30	31
32	33	34	35
…	…	…	…

ALTRE IDEE E RISULTATI

Un'altra idea è stata quella di osservare il denominatore n e pensare alla partizione dei numeri interi positivi in classi resto modulo quattro.

Risultati ottenuti:

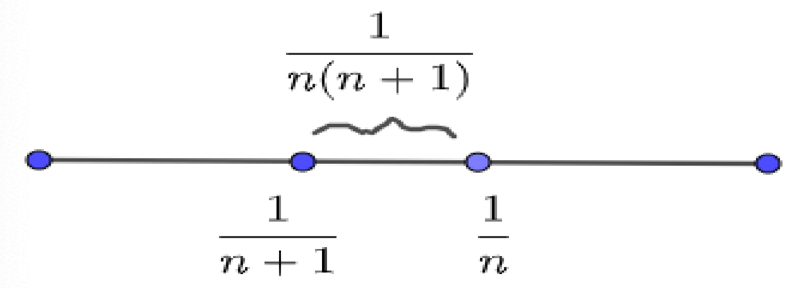
Se n è pari oppure n congruo a 3 modulo 4

allora vale la congettura

L’identità

$$\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}$$

applicata ai tre casi dimostra la congettura.



Esaminiamo uno dei tre casi, per gli altri due si procede in modo analogo:
se $n \equiv 3\ (mod 4)$ allora $n+1 \equiv 0\ (mod 4)$
Quindi moltiplicando per 4 entrambi i membri dell’identità si ottiene

$$\frac{4}{n}=\frac{4}{n+1}+\frac{4}{n(n+1)}$$

Al secondo membro si ha la somma di due frazioni equivalenti a due frazioni egizie e quindi aumentabili alla somma di tre.

Esempio

$$\frac{4}{7}=\frac{4}{8}+\frac{4}{7\cdot 8}=\frac{1}{2}+\frac{1}{14}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{14}$$

Così lo studio della congettura si restringe al caso $n \equiv 1\ (mod 4)$

OSSERVAZIONI

- L'ipotesi che n sia primo non è restrittiva per lo studio della congettura:

se $n = pq$, con $p\ primo$ e se la congettura vale per p allora vale anche per pq, perché

$$se\ \frac{4}{p} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \quad allora \quad \frac{4}{pq} = \frac{1}{aq} + \frac{1}{bq} + \frac{1}{cq}$$

- Se vale l'identità della congettura con $n > 2$, primo

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

allora almeno una coppia di interi tra a, b, c è pari.

Basta, infatti, porre attenzione all'uguaglianza $4abc = (bc + ac + ab)n$

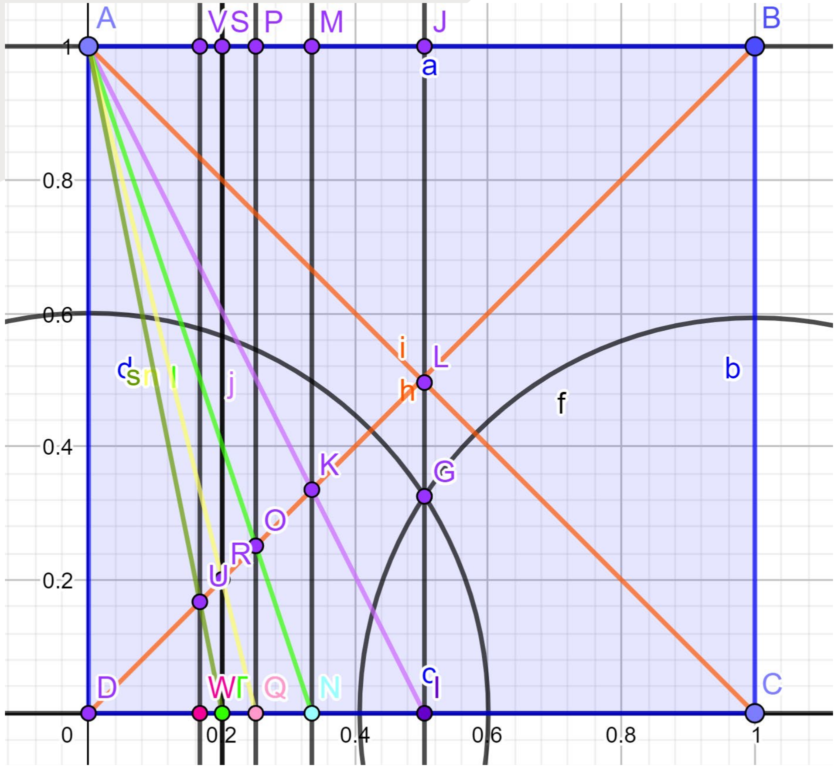
La congettura, di scrivere $\frac{4}{n}$ come somma di tre frazioni egizie, rimane un problema aperto da studiare per ogni n numero primo del tipo $24h + 1$, con h intero positivo.

Il problema della congettura sembra legato a quello della conoscenza dei numeri primi.

Studiamo ancora, insieme…..

FRAZIONI EGIZIE: FIBONACCI

A conclusione della sezione aritmetica del *Liber Abaci*, Leonardo tratta della scomposizione delle frazioni in somma di frazioni a numeratore unitario, tema antichissimo nella matematica egiziana.



Fibonacci si limita a dire che:

dopo aver insegnato come si aggreghino frazioni diverse in una sola, qui si prenderà la strada opposta, "in modo da conoscere in modo più comprensibile quale parte o parti di un singolo intero siano le frazioni di ogni tipo"

DAL LIBER ABACI DI FIBONACCI

Proviamo anche noi a disgregare frazioni $\frac{N}{D}$ *con N e D interi positivi:*

Leonardo esamina in primo luogo una serie di casi particolari, e per esempio:

- *N è somma di divisori distinti di D*

$$\textbf{esempio:}\ \frac{N}{D}=\frac{a+b}{a\cdot b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b},\quad \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{12}}=\frac{\mathbf{4+3}}{\mathbf{4\cdot 3}}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$$

Quando poi la frazione in esame non rientra in nessuno di questi casi, si può dividere il denominatore per il numeratore, e ottenere *la massima frazione unitaria contenuta nella data*. Il resto può poi essere trattato con uno dei metodi precedenti.

FIBONACCI E METODO DELLA DISCESA

Algoritmo per dimostrare che: ogni frazione propria $\frac{N}{D}$ è possibile scriverla come somma di non più di N frazioni unitarie distinte, N, D numeri interi positivi.

Cerchiamo ***la massima frazione unitaria contenuta nella data.***

Utilizziamo il «***metodo della discesa***»:

sia $\frac{N}{D}$ una frazione propria $\mathrm{N} < D,\ \mathrm{D} = \mathrm{n}\,\mathrm{N} + \mathrm{r},\ 0 \leq r < N, n, r$ numeri interi positivi, allora possiamo stimare la frazione:

$$\frac{1}{n+1} < \frac{N}{D} \leq \frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad \frac{N}{D} - \frac{1}{n+1} = \frac{(n+1)N - D}{D\,(n+1)} = \frac{\bar{N}}{\bar{\bar{D}}}$$

Se questa nuova frazione è unitaria ci fermiamo, altrimenti sarà una frazione propria alla quale applicheremo lo stesso procedimento. Vediamo qualche esempio:

FIBONACCI E METODO DELLA DISCESA: ESEMPIO

- $\frac{4}{5} = \cdots$

$$5:4 = 1 \; con \; r = 1, \qquad \frac{1}{2} < \frac{4}{5} \leq 1, \qquad \frac{4}{5} - \frac{1}{2} = \frac{3}{10},$$

$$10:3 = 3 \; con \; r = 1, \qquad \frac{1}{4} < \frac{3}{10} \leq \frac{1}{3}, \qquad \frac{3}{10} - \frac{1}{4} = \frac{1}{20} \;;$$

$$\boldsymbol{\frac{4}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{20}}$$

GARA: CHI TROVA LA FRAZIONE PIÙ BELLA?

Ci si rende conto che la disgregazione non è unica…ma quale scegliere?

Ci sono regole di preferenza?

Si deve notare che quando per la regola avrai preso la massima frazione unitaria contenuta nella frazione data, se le rimanenti parti singole risultano poco belle, lascia la massima frazione unitaria e prendi quella immediatamente minore.

- *GARA: Chi trova la frazione più bella?*

GARA: CHI TROVA LA FRAZIONE PIÙ BELLA?

Abbiamo trovato:

$$\frac{17}{29}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{348}$$

Il numero 348 è bello? Riproviamo

$$\frac{17}{29}=\frac{1}{2}+\frac{1}{12}+\frac{1}{348}$$

Proviamo con un'altra frazione:

$$\frac{17}{42}=\frac{1}{3}+\frac{1}{14}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{14\cdot 15}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{210}$$

Si può fare di meglio?

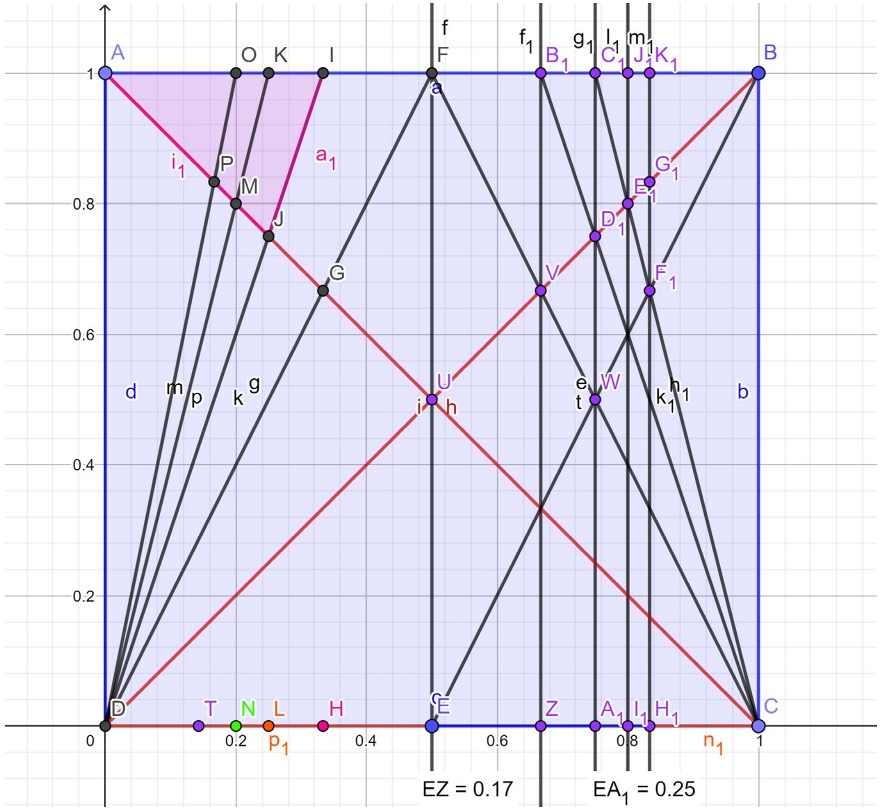
$$\frac{17}{42}=\frac{1}{3}+\frac{1}{14}=\frac{1}{14}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}+\frac{1}{14}$$

Utilizziamo:

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}$$

FRAZIONI EGIZIE PER 1



Scrivere l'unità come somma di frazioni unitarie è un modo molto utile per risolvere diversi problemi.

Si può scrivere 1 come somma di frazioni unitarie?

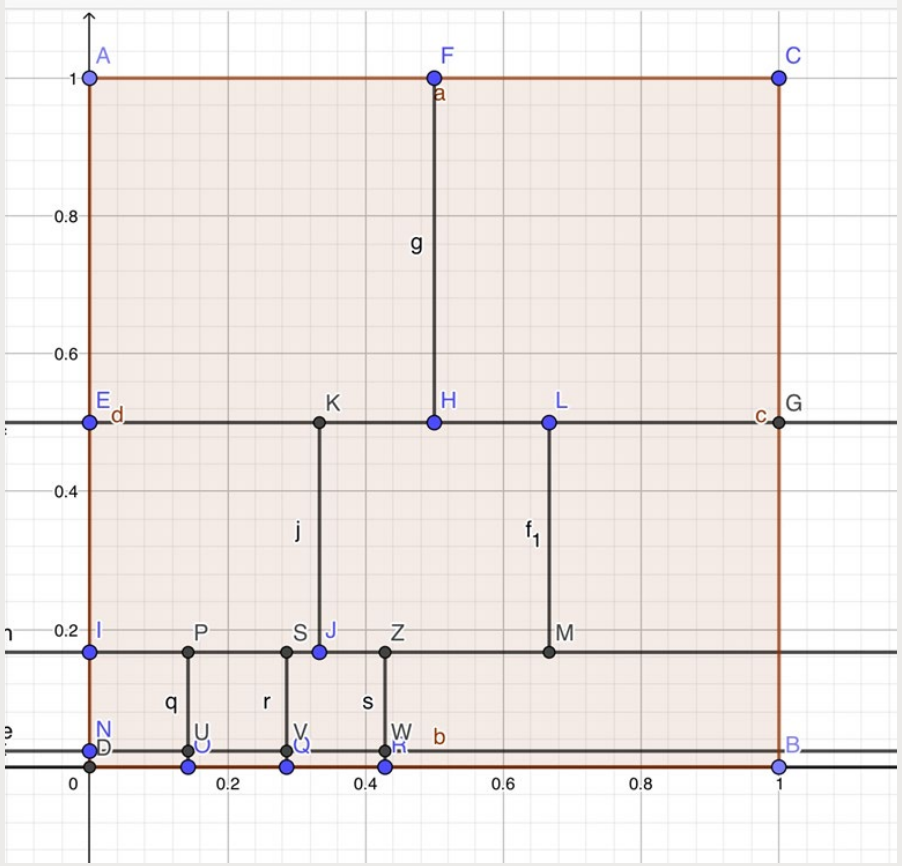
- Dal disegno possiamo dedurre ad esempio: $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$
- Consideriamo ora il numero 6 e proviamo a scomporlo in somme di numeri che sono suoi divisori e dopo dividiamo per 6 entrambi i membri:

$$6 = 3 + 2 + 1 \Leftrightarrow 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$$

Analogamente:

$$42 = 21 + 14 + 6 + 1 \Leftrightarrow 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{42}$$

CONGETTURE: PROBLEMA DI ZNÁM



Quali insiemi di n interi hanno la proprietà che:
ogni elemento nell'insieme sia un divisore proprio (o anche improprio) del prodotto degli altri numeri, più 1.

Il problema di Znám è strettamente collegato alle frazioni egizie: **per n=4 trovare {a, b, c, d} tale che**

$$\mathbf{1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{a \cdot b \cdot c \cdot d}}$$

è equivalente a risolvere il problema di Znám.

Per n=4 una possibile soluzione impropria è:
{a, b, c, d} = {2, 3, 7, 43}. Dimostrzione grafica con Geogebra. Osserviamo che $2 \cdot 3 \cdot 7 + 1 = 43$ divisore improrio di 43.
Per n=5 una possiblie soluzione:{2,3,11,23,31}.

PROBLEMA DI ZNÁM E FRAZIONI EGIZIE

Ogni elemento nell'insieme {a, b, c, d} *è un divisore proprio (o anche improprio) del prodotto degli altri numeri, più 1*

$$1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{\mathrm{d}} + \frac{1}{a \cdot b \cdot c \cdot d} \Leftrightarrow a = 1 + \frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{a}{\mathrm{d}} + \frac{1}{b \cdot c \cdot d}$$

$$a - \frac{a}{b} - \frac{a}{c} - \frac{a}{\mathrm{d}} = 1 + \frac{1}{b \cdot c \cdot d} \Rightarrow a \cdot \left(1 - \frac{1}{b} - \frac{1}{c} - \frac{1}{\mathrm{d}}\right) = \frac{b \cdot c \cdot d + 1}{bcd}$$

$$a \cdot (b \cdot c \cdot d - c \cdot d - b \cdot c) = b \cdot d \cdot c + 1$$