Sapienza, Università di Roma
Ciclo di seminari per docenti

Roma, 18 novembre 2022

«Dimostrazioni» per diagonalizzazione sbagliate

prof. Alex Saltuari

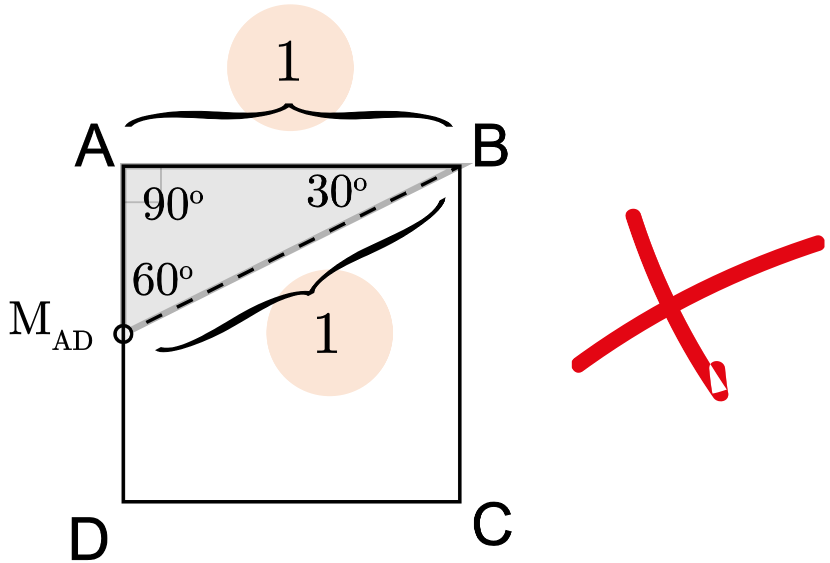
Liceo Majorana, Roma

L’introduzione di nuovi metodi di dimostrazione viene spesso accompagnata dalla fase delle «dimostrazioni sbagliate»

L’introduzione di nuovi metodi di dimostrazione viene spesso accompagnata dalla fase delle «dimostrazioni sbagliate»

GEOMETRIA

(per sottolineare la cattiva abitudine di procedere con il metodo «si vede che…»)

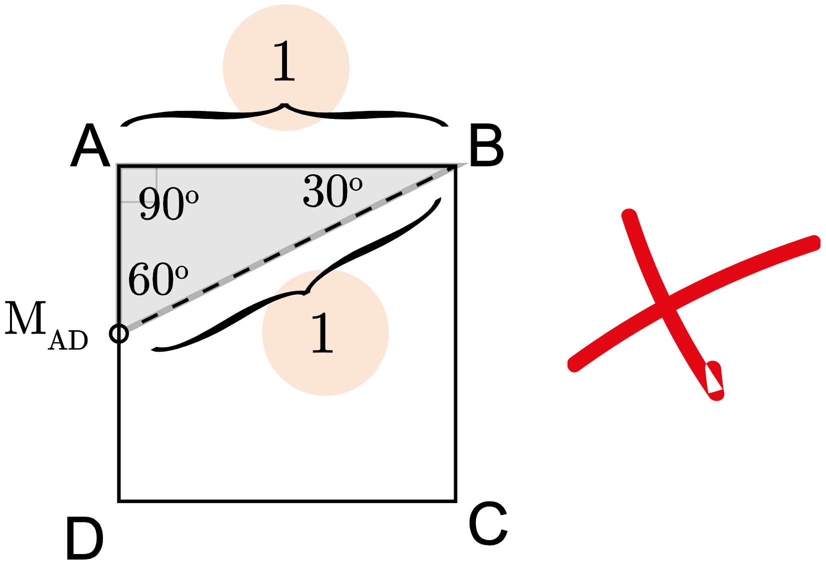


Costruzione di un triangolo isoscele con angoli alla base diversi

L'introduzione di nuovi metodi di dimostrazione viene spesso accompagnata dalla fase delle «dimostrazioni sbagliate»

GEOMETRIA

(per sottolineare la cattiva abitudine di procedere con il metodo «si vede che…»)



Costruzione di un triangolo isoscele con angoli alla base diversi

INDUZIONE FORTE

(per sottolineare la necessità di una base induttiva adeguata)

$$F_n > \frac{\varphi^n}{2}$$

(disuguaglianza generalmente falsa)

$$1 = F_1 > \frac{\varphi^1}{2} = 0{,}8\ldots$$

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} > \frac{\varphi^n}{2} + \frac{\varphi^{n-1}}{2}$$
$$= \frac{\varphi^{n-1}(\varphi+1)}{2} = \frac{\varphi^{n-1}\varphi^2}{2} = \frac{\varphi^{n+1}}{2} \quad \square$$

La dimostrazione per diagonalizzazione di Cantor offre la stessa opportunità didattica.

		cifre di a_k nel sistema binario									
a_1	$\longrightarrow$	0,	**1**	0	0	1	0	0	0	1	...
a_2	$\longrightarrow$	0,	0	**0**	1	0	0	0	1	0	...
a_3	$\longrightarrow$	0,	0	0	**0**	1	0	1	1	0	...
a_4	$\longrightarrow$	0,	1	1	1	**1**	0	1	1	1	...
a_5	$\longrightarrow$	0,	0	1	1	0	**0**	1	0	1	...
a_6	$\longrightarrow$	0,	0	1	0	0	0	**0**	0	1	...
	$\longrightarrow$	0,	0	1	0	1	0	0	**1**	1	...
	$\longrightarrow$	0,	1	0	1	0	1	0	1	**0**	...
...											

La dimostrazione per diagonalizzazione di Cantor offre la stessa opportunità didattica.

Le dimostrazioni sbagliate consentono interessanti discussioni in classe di «caccia all’errore» e gettono le basi per i seguenti sviluppi tematici del Novecento:

TURING

GÖDEL

		cifre di a_k nel sistema binario								
a_1	$\longrightarrow$	0,	**1**	0	0	1	0	0	0	1 …
a_2	$\longrightarrow$	0,	0	**0**	1	0	0	0	1	0 …
a_3	$\longrightarrow$	0,	0	0	**0**	1	0	1	1	0 …
a_4	$\longrightarrow$	0,	1	1	1	**1**	0	1	1	1 …
a_5	$\longrightarrow$	0,	0	1	1	0	**0**	1	0	1 …
a_6	$\longrightarrow$	0,	0	1	0	0	0	**0**	0	1 …
	$\longrightarrow$	0,	0	1	0	1	0	0	**1**	1 …
	$\longrightarrow$	0,	1	0	1	0	1	0	1	**0** …
…										

Come prima cosa si mostra la dimostrazione «classica di Cantor»

Teorema (Cantor)
L'insieme $(0;1)$ è più che numerabile

Dimostrazione per assurdo

Sia $a_1, a_2, a_3, \ldots$ un'ipotetica enumerazione di $(0;1)$. È possibile costruire un numero reale $\bar{b} \in (0;1)$ che differisce da ciascun a_j per almeno una cifra.
$\bar{b}$ è quindi un numero reale «sfuggito all'enumerazione». $\square$

		cifre di a_k nel sistema binario								
a_1	$\longrightarrow$	0,	1	0	0	1	0	0	0	1 ...
a_2	$\longrightarrow$	0,	0	0	1	0	0	0	1	0 ...
a_3	$\longrightarrow$	0,	0	0	0	1	0	1	1	1 ...
a_4	$\longrightarrow$	0,	1	1	1	1	0	1	1	1 ...
a_5	$\longrightarrow$	0,	0	1	1	0	0	1	0	1 ...
a_6	$\longrightarrow$	0,	0	1	0	0	1	1	0	1 ...
a_7	$\longrightarrow$	0,	0	1	0	1	0	0	1	1 ...
	$\longrightarrow$	0,	1	0	1	0	1	0	1	0 ...
...										
b		0,	1	0	0	1	0	1	1	0 ...
b		0,	0	1	1	0	1	0	0	1 ...

Si **discute** quindi in classe sulla correttezza della dimostrazione. Riporto qui in basso uno scambio di battute effettivamente avvenuto in classe:

Certo che è il ragionamento è corretto, lo abbiamo appena visto succedere!

Anche il ragionamento di Zenone sembrava corretto, eppure…

Dialogo avvenuto in classe (una classe terza)

A dar manforte agli scettici, viene quindi presentata la prima dimostrazione sbagliata:

~~Teorema~~ (sbagliato)
L'insieme di tutti i numeri razionali compresi tra 0 e 1 è più che numerabile.

«Dimostrazione» per assurdo

Sia $a_1, a_2, a_3, \ldots$ una enumerazione di $\mathbb{Q}_{(0;1)}$.

		cifre di a_k nel sistema binario								
a_1	$\longrightarrow$	0,	1	0	0	1	0	0	0	1 …
a_2	$\longrightarrow$	0,	0	0	1	0	0	0	1	0 …
a_3	$\longrightarrow$	0,	0	0	0	1	0	1	1	0 …
a_4	$\longrightarrow$	0,	1	1	1	1	0	1	1	1 …
a_5	$\longrightarrow$	0,	0	1	1	0	0	1	0	…
a_6	$\longrightarrow$	0,	0	1	0	0	0	0	0	…
a_7	$\longrightarrow$	0,	0	1	0	1	0	0	1	…
a_8	$\longrightarrow$	0,	1	0	1	0	1	0	1	…
…										

~~Teorema~~ (sbagliato)
L'insieme di tutti i numeri razionali compresi tra 0 e 1 è più che numerabile.

«Dimostrazione» per assurdo

Sia $a_1, a_2, a_3, \ldots$ una enumerazione di $\mathbb{Q}_{(0;1)}$. Esplicitiamo poi due lemmi del tutto evidenti:

		cifre di a_k nel sistema binario								
a_1	⟶	0,	1	0	0	1	0	0	0	1 …
a_2	⟶	0,	0	0	1	0	0	0	1	0 …
a_3	⟶	0,	0	0	0	1	0	1	1	0 …
a_4	⟶	0,	1	1	1	1	0	1	1	1 …
a_5	⟶	0,	0	1	1	0	0	1	0	…
a_6	⟶	0,	0	1	0	0	0	0	0	…
										…
										…

LEMMA 1
Non esiste alcuna cella sotto la quale, nella stessa colonna, stanno soltanto 0 o soltanto 1.

Spiegazione
Per ogni posizione dopo la virgola, esistono in (0;1) infiniti numeri con la cifra 0 e infiniti con la cifra 1. Se da una riga in poi vi fossero soltanto numeri di un unico tipo, resterebbero fuori dall'enumerazione infiniti numeri.

~~Teorema~~ (sbagliato)
L'insieme di tutti i numeri razionali compresi tra 0 e 1 è più che numerabile.

«Dimostrazione» per assurdo

Sia $a_1, a_2, a_3, \ldots$ una enumerazione di $\mathbb{Q}_{(0;1)}$. Esplicitiamo poi due lemmi del tutto evidenti:

		cifre di a_k nel sistema binario									
a_1	$\longrightarrow$	0,	1	0	0	1	0	0	0	1	...
a_2	$\longrightarrow$	0,	0	0	1	0	0	0	1	0	...
a_3	$\longrightarrow$	0,	0	0	0	1	0	1	1	0	...
a_4	$\longrightarrow$	0,	1	1	1	1	0	1	1	1	...
a_5	$\longrightarrow$	0,	0	1	1	0	0	1	0		...
a_6	$\longrightarrow$	0,	0	1	0	0	0	0	0		...
											...
											...

LEMMA 1
Non esiste alcuna cella sotto la quale, nella stessa colonna, stanno soltanto 0 o oltanto 1.

piegazione
er ogni posizione dopo la virgola, esistono in ;1) infiniti numeri con la cifra 0 e infiniti con la ifra 1. Se da una riga in poi vi fossero soltanto umeri di un unico tipo, resterebbero fuori all'enumerazione infiniti numeri.

LEMMA 2
Scambiando fra loro due righe, si ottiene un'enumerazione diversa che però, nel complesso, contiene gli stessi numeri.

Spiegazione
Si tratta di un'ovvietà: cambiando semplicemente l'ordine di elencazione, non viene modificato l'insieme di ciò che viene elencato.

A questo punto distinguiamo fra righe dispari (sfondo viola) e righe pari (sfondo giallo) e chiamiamo **pivot** le cifre sulla diagonale principale.

Introduciamo poi la seguente definizione:

		cifre di a_k nel sistema binario									
a_1	$\longrightarrow$	0,	**1**	0	0	1	0	0	0	1	...
a_2	$\longrightarrow$	0,	0	**0**	1	0	0	0	1	0	...
a_3	$\longrightarrow$	0,	0	0	**0**	1	0	1	1	0	...
a_4	$\longrightarrow$	0,	1	1	1	**1**	0	1	1	1	...
a_5	$\longrightarrow$	0,	0	1	1	0	**0**	1	0	1	...
a_6	$\longrightarrow$	0,	0	1	0	0	0	**0**	0	1	...
	$\longrightarrow$	0,	0	1	0	1	0	0	**1**	1	...
	$\longrightarrow$	0,	1	0	1	0	1	0	1	**0**	...
...											

REGOLA DI CONCORDANZA

Una riga rispetta la r**egola di concordanza** se numero di riga e pivot sono entrambi pari o entrambi dispari.

Scorriamo ora le righe dall’alto in basso: se la *concordanza* è rispettata non facciamo nulla e passiamo alla riga successiva, altrimenti scambiamo la riga discordante con la prima riga sottostante che permetta di ristabilire la concordanza.

		cifre di a_k nel sistema binario									
a_1	$\longrightarrow$	0,	**1**	0	0	1	0	0	0	1	...
a_2	$\longrightarrow$	0,	0	**0**	1	0	0	0	1	0	...
a_3	$\longrightarrow$	0,	0	0	**0**	1	0	1	1	0	...
a_4	$\longrightarrow$	0,	1	1	1	**1**	0	1	1	1	...
a_5	$\longrightarrow$	0,	0	1	1	0	**0**	1	0	1	...
a_6	$\longrightarrow$	0,	0	1	0	0	0	**0**	0	1	...
	$\longrightarrow$	0,	0	1	0	1	0	0	**1**	1	...
	$\longrightarrow$	0,	1	0	1	0	1	0	1	**0**	...
...											

REGOLA DI CONCORDANZA

Una riga rispetta la r**egola di concordanza** se numero di riga e pivot sono entrambi pari o entrambi dispari.

Scorriamo ora le righe dall’alto in basso: se la *concordanza* è rispettata non facciamo nulla e passiamo alla riga successiva, altrimenti scambiamo la riga discordante con la prima riga sottostante che permetta di ristabilire la concordanza.

		cifre di a_k nel sistema binario									
a_1	$\longrightarrow$	0,	1	0	0	1	0	0	0	1	...
a_2	$\longrightarrow$	0,	0	0	1	0	0	0	1	0	...
a_3	$\longrightarrow$	0,	0	0	0	1	0	1	1	0	...
a_4	$\longrightarrow$	0,	1	1	1	1	0	1	1	1	...
a_5	$\longrightarrow$	0,	0	1	1	0	0	1	0		...
a_6	$\longrightarrow$	0,	0	1	0	0	0	0	0		...
a_7	$\longrightarrow$	0,	0	1	0	1	0	0	1		...
a_8	$\longrightarrow$	0,	1	0	1	0	1	0	1		...
...											

REGOLA DI CONCORDANZA

Una riga rispetta la r**egola di concordanza** se numero di riga e pivot sono entrambi pari o entrambi dispari.

Scorriamo ora le righe dall'alto in basso: se la *concordanza* è rispettata non facciamo nulla e passiamo alla riga successiva, altrimenti scambiamo la riga discordante con la prima riga sottostante che permetta di ristabilire la concordanza.

		cifre di a_k nel sistema binario								
a_1	$\longrightarrow$	0,	1	0	0	1	0	0	0	1 …
a_2	$\longrightarrow$	0,	0	0	1	0	0	0	1	0 …
a_3	$\longrightarrow$	0,	0	0	0	1	0	1	1	0 …
a_4	$\longrightarrow$	0,	1	1	1	1	0	1	1	1 …
a_5	$\longrightarrow$	0,	0	1	1	0	0	1	0	…
a_6	$\longrightarrow$	0,	0	1	0	0	0	0	0	…
a_7	$\longrightarrow$	0,	0	1	0	1	0	0	1	…
a_8	$\longrightarrow$	0,	1	0	1	0	1	0	1	…
…										

REGOLA DI CONCORDANZA

Una riga rispetta la r**egola di concordanza** se numero di riga e pivot sono entrambi pari o entrambi dispari.

Scorriamo ora le righe dall'alto in basso: se la *concordanza* è rispettata non facciamo nulla e passiamo alla riga successiva, altrimenti scambiamo la riga discordante con la prima riga sottostante che permetta di ristabilire la concordanza.

		cifre di a_k nel sistema binario									
a_1	⟶	0,	1	0	0	1	0	0	0	1	...
a_2	⟶	0,	0	0	1	0	0	0	1	0	...
a_3	⟶	0,	0	0	0	1	0	1	1	0	...
a_4	⟶	0,	1	1	1	1	0	1	1	1	...
a_5	⟶	0,	0	1	1	0	0	1	0		...
a_6	⟶	0,	0	1	0	0	0	0	0		...
a_7	⟶	0,	0	1	0	1	0	0	1		...
a_8	⟶	0,	1	0	1	0	1	0	1		...
...											

REGOLA DI CONCORDANZA

Una riga rispetta la r**egola di concordanza** se numero di riga e pivot sono entrambi pari o entrambi dispari.

Scorriamo ora le righe dall'alto in basso: se la *concordanza* è rispettata non facciamo nulla e passiamo alla riga successiva, altrimenti scambiamo la riga discordante con la prima riga sottostante che permetta di ristabilire la concordanza.

		cifre di a_k nel sistema binario									
a_1	$\longrightarrow$	0,	1	0	0	1	0	0	0	1	...
a_2	$\longrightarrow$	0,	0	0	1	0	0	0	1	0	...
a_4	$\longrightarrow$	0,	1	1	1	1	0	1	1	1	...
a_3	$\longrightarrow$	0,	0	0	0	1	0	1	1	0	...
a_5	$\longrightarrow$	0,	0	1	1	0	0	1	0		...
a_6	$\longrightarrow$	0,	0	1	0	0	0	0	0		...
a_7	$\longrightarrow$	0,	0	1	0	1	0	0	1		...
a_8	$\longrightarrow$	0,	1	0	1	0	1	0	1		...
...											

REGOLA DI CONCORDANZA

Una riga rispetta la r**egola di concordanza** se numero di riga e pivot sono entrambi pari o entrambi dispari.

Scorriamo ora le righe dall’alto in basso: se la *concordanza* è rispettata non facciamo nulla e passiamo alla riga successiva, altrimenti scambiamo la riga discordante con la prima riga sottostante che permetta di ristabilire la concordanza.

		cifre di a_k nel sistema binario									
a_1	$\longrightarrow$	0,	1	0	0	1	0	0	0	1	...
a_2	$\longrightarrow$	0,	0	0	1	0	0	0	1	0	...
a_4	$\longrightarrow$	0,	1	1	1	1	0	1	1	1	...
a_3	$\longrightarrow$	0,	0	0	0	1	0	1	1	0	...
a_5	$\longrightarrow$	0,	0	1	1	0	0	1	0		...
a_6	$\longrightarrow$	0,	0	1	0	0	0	0	0		...
a_7	$\longrightarrow$	0,	0	1	0	1	0	0	1		...
a_8	$\longrightarrow$	0,	1	0	1	0	1	0	1		...
...											

REGOLA DI CONCORDANZA

Una riga rispetta la r**egola di concordanza** se numero di riga e pivot sono entrambi pari o entrambi dispari.

Scorriamo ora le righe dall’alto in basso: se la *concordanza* è rispettata non facciamo nulla e passiamo alla riga successiva, altrimenti scambiamo la riga discordante con la prima riga sottostante che permetta di ristabilire la concordanza.

		cifre di a_k nel sistema binario									
a_1	$\longrightarrow$	0,	1	0	0	1	0	0	0	1	...
a_2	$\longrightarrow$	0,	0	0	1	0	0	0	1	0	...
a_4	$\longrightarrow$	0,	1	1	1	1	0	1	1	1	...
a_3	$\longrightarrow$	0,	0	0	0	1	0	1	1	0	...
a_5	$\longrightarrow$	0,	0	1	1	0	0	1	0		...
a_6	$\longrightarrow$	0,	0	1	0	0	0	0	0		...
a_7	$\longrightarrow$	0,	0	1	0	1	0	0	1		...
a_8	$\longrightarrow$	0,	1	0	1	0	1	0	1		...
...											

REGOLA DI CONCORDANZA

Una riga rispetta la **regola di concordanza** se numero di riga e pivot sono entrambi pari o entrambi dispari.

Scorriamo ora le righe dall’alto in basso: se la *concordanza* è rispettata non facciamo nulla e passiamo alla riga successiva, altrimenti scambiamo la riga discordante con la prima riga sottostante che permetta di ristabilire la concordanza.

		cifre di a_k nel sistema binario										
a_1	⟶	0,	1	0	0	1	0	0	0	1	...
a_2	⟶	0,	0	0	1	0	0	0	1	0	...
a_4	⟶	0,	1	1	1	1	0	1	1	1	...
a_5	⟶	0,	0	1	1	0	0	1	0	1	...
a_3	⟶	0,	0	0	0	1	0	1	1		...
a_6	⟶	0,	0	1	0	0	0	0	0		...
a_7	⟶	0,	0	1	0	1	0	0	1		...
a_8	⟶	0,	1	0	1	0	1	0	1		...
...											

REGOLA DI CONCORDANZA

Una riga rispetta la **regola di concordanza** se numero di riga e pivot sono entrambi pari o entrambi dispari.

Scorriamo ora le righe dall’alto in basso: se la *concordanza* è rispettata non facciamo nulla e passiamo alla riga successiva, altrimenti scambiamo la riga discordante con la prima riga sottostante che permetta di ristabilire la concordanza.

		cifre di a_k nel sistema binario									
a_1	$\longrightarrow$	0,	1	0	0	1	0	0	0	1	...
a_2	$\longrightarrow$	0,	0	0	1	0	0	0	1	0	...
a_4	$\longrightarrow$	0,	1	1	1	1	0	1	1	1	...
a_5	$\longrightarrow$	0,	0	1	1	0	0	1	0	1	...
a_3	$\longrightarrow$	0,	0	0	0	1	0	1	1		...
a_6	$\longrightarrow$	0,	0	1	0	0	0	0	0		...
a_7	$\longrightarrow$	0,	0	1	0	1	0	0	1		...
a_8	$\longrightarrow$	0,	1	0	1	0	1	0	1		...
...											

REGOLA DI CONCORDANZA

Una riga rispetta la r**egola di concordanza** se numero di riga e pivot sono entrambi pari o entrambi dispari.

Scorriamo ora le righe dall’alto in basso: se la *concordanza* è rispettata non facciamo nulla e passiamo alla riga successiva, altrimenti scambiamo la riga discordante con la prima riga sottostante che permetta di ristabilire la concordanza.

	cifre di a_k nel sistema binario								
a_1 →	0,	1	0	0	1	0	0	0	1 …
a_2 →	0,	0	0	1	0	0	0	1	0 …
a_4 →	0,	1	1	1	1	0	1	1	1 …
a_5 →	0,	0	1	1	0	0	1	0	1 …
a_3 →	0,	0	0	0	1	0	1	1	…
a_6 →	0,	0	1	0	0	0	0	0	…
a_7 →	0,	0	1	0	1	0	0	1	…
a_8 →	0,	1	0	1	0	1	0	1	…
…									

REGOLA DI CONCORDANZA

Una riga rispetta la r**egola di concordanza** se numero di riga e pivot sono entrambi pari o entrambi dispari.

Scorriamo ora le righe dall'alto in basso: se la *concordanza* è rispettata non facciamo nulla e passiamo alla riga successiva, altrimenti scambiamo la riga discordante con la prima riga sottostante che permetta di ristabilire la concordanza.

		cifre di a_k nel sistema binario									
a_1	$\longrightarrow$	0,	1	0	0	1	0	0	0	1	...
a_2	$\longrightarrow$	0,	0	0	1	0	0	0	1	0	...
a_4	$\longrightarrow$	0,	1	1	1	1	0	1	1	1	...
a_5	$\longrightarrow$	0,	0	1	1	0	0	1	0	1	...
a_8	$\longrightarrow$	0,	1	0	1	0	1	0	1		...
a_6	$\longrightarrow$	0,	0	1	0	0	0	0	0		...
a_7	$\longrightarrow$	0,	0	1	0	1	0	0	1		...
a_3	$\longrightarrow$	0,	0	0	0	1	0	1	1		...
...											

REGOLA DI CONCORDANZA

Una riga rispetta la r**egola di concordanza** se numero di riga e pivot sono entrambi pari o entrambi dispari.

Scorriamo ora le righe dall'alto in basso: se la *concordanza* è rispettata non facciamo nulla e passiamo alla riga successiva, altrimenti scambiamo la riga discordante con la prima riga sottostante che permetta di ristabilire la concordanza.

		cifre di a_k nel sistema binario									
a_1	$\longrightarrow$	0,	1	0	0	1	0	0	0	1	…
a_2	$\longrightarrow$	0,	0	0	1	0	0	0	1	0	…
a_4	$\longrightarrow$	0,	1	1	1	1	0	1	1	1	…
a_5	$\longrightarrow$	0,	0	1	1	0	0	1	0	1	…
a_8	$\longrightarrow$	0,	1	0	1	0	1	0	1		…
a_6	$\longrightarrow$	0,	0	1	0	0	0	0	0		…
a_7	$\longrightarrow$	0,	0	1	0	1	0	0	1		…
a_3	$\longrightarrow$	0,	0	0	0	1	0	1	1		…
…											

REGOLA DI CONCORDANZA

Una riga rispetta la r**egola di concordanza** se numero di riga e pivot sono entrambi pari o entrambi dispari.

Scorriamo ora le righe dall’alto in basso: se la *concordanza* è rispettata non facciamo nulla e passiamo alla riga successiva, altrimenti scambiamo la riga discordante con la prima riga sottostante che permetta di ristabilire la concordanza.

		cifre di a_k nel sistema binario									
a_1	$\longrightarrow$	0,	1	0	0	1	0	0	0	1	...
a_2	$\longrightarrow$	0,	0	0	1	0	0	0	1	0	...
a_4	$\longrightarrow$	0,	1	1	1	1	0	1	1	1	...
a_5	$\longrightarrow$	0,	0	1	1	0	0	1	0	1	...
a_8	$\longrightarrow$	0,	1	0	1	0	1	0	1		...
a_6	$\longrightarrow$	0,	0	1	0	0	0	0	0		...
a_7	$\longrightarrow$	0,	0	1	0	1	0	0	1		...
a_3	$\longrightarrow$	0,	0	0	0	1	0	1	1		...
...											

REGOLA DI CONCORDANZA

Una riga rispetta la **regola di concordanza** se numero di riga e pivot sono entrambi pari o entrambi dispari.

Scorriamo ora le righe dall'alto in basso: se la *concordanza* è rispettata non facciamo nulla e passiamo alla riga successiva, altrimenti scambiamo la riga discordante con la prima riga sottostante che permetta di ristabilire la concordanza.

		cifre di a_k nel sistema binario									
a_1	$\longrightarrow$	0,	1	0	0	1	0	0	0	1	...
a_2	$\longrightarrow$	0,	0	0	1	0	0	0	1	0	...
a_4	$\longrightarrow$	0,	1	1	1	1	0	1	1	1	...
a_5	$\longrightarrow$	0,	0	1	1	0	0	1	0	1	...
a_8	$\longrightarrow$	0,	1	0	1	0	1	0	1		...
a_6	$\longrightarrow$	0,	0	1	0	0	0	0	0		...
a_7	$\longrightarrow$	0,	0	1	0	1	0	0	1		...
a_3	$\longrightarrow$	0,	0	0	0	1	0	1	1		...
...											

REGOLA DI CONCORDANZA

Una riga rispetta la r**egola di concordanza** se numero di riga e pivot sono entrambi pari o entrambi dispari.

Scorriamo ora le righe dall’alto in basso: se la *concordanza* è rispettata non facciamo nulla e passiamo alla riga successiva, altrimenti scambiamo la riga discordante con la prima riga sottostante che permetta di ristabilire la concordanza.

		cifre di a_k nel sistema binario									
a_1	$\longrightarrow$	0,	1	0	0	1	0	0	0	1	...
a_2	$\longrightarrow$	0,	0	0	1	0	0	0	1	0	...
a_4	$\longrightarrow$	0,	1	1	1	1	0	1	1	1	...
a_5	$\longrightarrow$	0,	0	1	1	0	0	1	0	1	...
a_8	$\longrightarrow$	0,	1	0	1	0	1	0	1		...
a_6	$\longrightarrow$	0,	0	1	0	0	0	0	0		...
a_7	$\longrightarrow$	0,	0	1	0	1	0	0	1		...
a_3	$\longrightarrow$	0,	0	0	0	1	0	1	1		...
...											

REGOLA DI CONCORDANZA

Una riga rispetta la r**egola di concordanza** se numero di riga e pivot sono entrambi pari o entrambi dispari.

Abbiamo così ottenuto una nuova enumerazione $b_1, b_2, \ldots$ di $\mathbb{Q}_{(0;1)}$, <u>equivalente alla prima</u> (nel senso che contiene gli stessi numeri) e che rispetta la regola di concordanza.

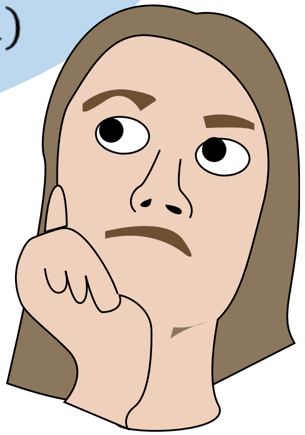
	cifre di a_k nel sistema binario									
b_1 →	0,	1	0	0	1	0	0	0	1	...
b_2 →	0,	0	0	1	0	0	0	1	0	...
b_3 →	0,	1	1	1	1	0	1	1	1	...
b_4 →	0,	0	1	1	0	0	1	0	1	...
b_5 →	0,	1	0	1	0	1	0	1	0	...
b_6 →	0,	0	1	0	0	0	0	0	1	...
b →	0,	0	1	0	1	0	0	1	1	...
→	0,	0	0	0	1	0	1	1	0	...
...										

Abbiamo così ottenuto una nuova enumerazione $b_1, b_2, \ldots$ di $\mathbb{Q}_{(0;1)}$, <u>equivalente alla prima</u> (nel senso che contiene gli stessi numeri) e che rispetta la regola di concordanza.

	cifre di a_k nel sistema binario									
b_1 →	0,	1	0	0	1	0	0	0	1	...
b_2 →	0,	0	0	1	0	0	0	1	0	...
b_3 →	0,	1	1	1	1	0	1	1	1	...
b_4 →	0,	0	1	1	0	0	1	0	1	...
b_5 →	0,	1	0	1	0	1	0	1	0	...
b_6 →	0,	0	1	0	0	0	0	0	1	...
b →	0,	0	1	0	1	0	0	1	1	...
→	0,	0	0	0	1	0	1	1	0	...
...										
c	0,	1	0	1	0	1	0	1	0	...
c	0,	0	1	0	1	0	1	0	1	...

Di nuovo è possibile costruire un numero $\bar{c}$ che differisce di almeno una cifra da ogni numero in elenco.

Ma per come è stato costruito, $\bar{c}$ è periodico, **per cui è un numero razionale.** Siamo arrivati all'assurdo, evidentemente $\mathbb{Q}_{(0;1)}$ non è numerabile.



Di nuovo è possibile costruire un numero $\bar{c}$ che differisce di almeno una cifra da ogni numero in elenco.

	cifre di a_k nel sistema binario									
b_1 →	0,	1	0	0	1	0	0	0	1	…
b_2 →	0,	0	0	1	0	0	0	1	0	…
b_3 →	0,	1	1	1	1	0	1	1	1	…
b_4 →	0,	0	1	1	0	0	1	0	1	…
b_5 →	0,	1	0	1	0	1	0	1	0	…
b_6 →	0,	0	1	0	0	0	0	0	1	…
b →	0,	0	1	0	1	0	0	1	1	…
→	0,	0	0	0	1	0	1	1	0	…
…										

c	~~0,~~	~~1~~	~~0~~	~~1~~	~~0~~	~~1~~	~~0~~	1	0	…
c	0,	0	1	0	1	0	1	0	1	…

Ancora una volta si **discute** in classe sulla dimostrazione.

Per rendere la discussione più proficua e indirizzarla verso la direzione corretta, si cerca di scoprire che numero sia questo $\bar{c} = 0,\overline{01}$ (*ricordiamo che stiamo ragionando in binario*).

Ancora una volta si **discute** in classe sulla dimostrazione.

Per rendere la discussione più proficua e indirizzarla verso la direzione corretta, si cerca di scoprire che numero sia questo $\bar{c} = 0,\overline{01}$ (*ricordiamo che stiamo ragionando in binario*).

$$0,\overline{01} \cdot 11 = 0,\overline{11} = 0,\overline{1} = 1$$

Per far prima, conviene partire da questa identità.

Ancora una volta si **discute** in classe sulla dimostrazione.

Per rendere la discussione più proficua e indirizzarla verso la direzione corretta, si cerca di scoprire che numero sia questo $\bar{c} = 0,\overline{01}$ (*ricordiamo che stiamo ragionando in binario*).

$$0,\overline{01} \cdot 11 = 0,\overline{11} = 0,\overline{1} = 1$$

$$\bar{c} \cdot$$

Ancora una volta si **discute** in classe sulla dimostrazione.

Per rendere la discussione più proficua e indirizzarla verso la direzione corretta, si cerca di scoprire che numero sia questo $\bar{c} = 0,\overline{01}$ (*ricordiamo che stiamo ragionando in binario*).

$$0,\overline{01} \cdot 11 = 0,\overline{11} = 0,\overline{1} = 1$$

$$\bar{c} \cdot 3$$

Ancora una volta si **discute** in classe sulla dimostrazione.

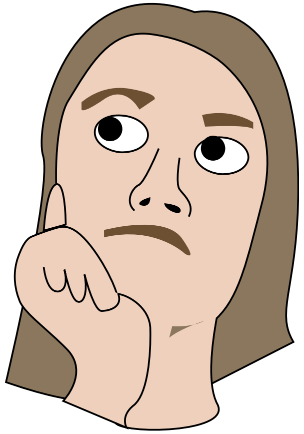
Per rendere la discussione più proficua e indirizzarla verso la direzione corretta, si cerca di scoprire che numero sia questo $\bar{c} = 0,\overline{01}$ (*ricordiamo che stiamo ragionando in binario*).

$$0,\overline{01} \cdot 11 = 0,\overline{11} = 0,\overline{1} = 1$$

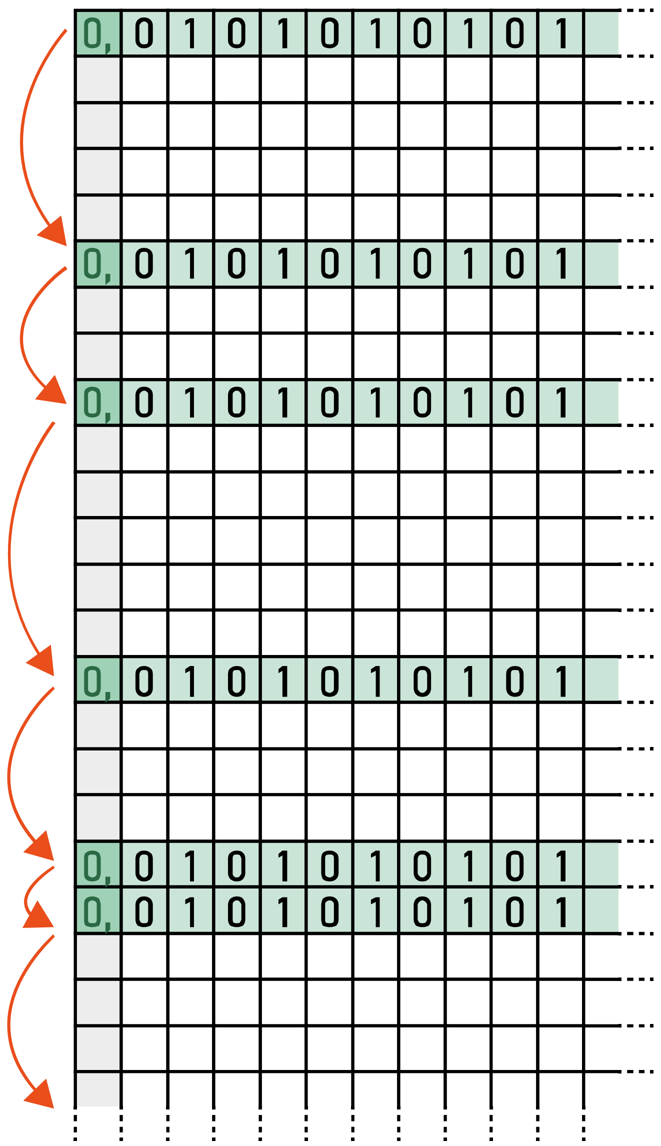
$$\bar{c} \cdot 3 = 1$$

Avremmo quindi dimostrato che qualsiasi enumerazione di $\mathbb{Q}_{(0;1)}$ non contiene $\frac{1}{3}$… Questa sì che è un’assurdità (basterebbe aggiungerlo)!

$$\bar{c} \cdot 3 = 1 \Rightarrow \bar{c} = \frac{1}{3}$$



Il **lemma 2**, ineccepibile nel caso di scambi effettuati un numero finito di volte, perde validità nel caso di infinite applicazioni: alcuni numeri, come 1/3, vengono infatti spostati «in basso» tutte le volte che vengono incrociati e finiscono, all'infinito, per essere «espulsi dalla tabella».



Questa dimostrazione sbagliata mostra come i passaggi «all'infinito» nei ragionamenti debbano poggiare su basi solide ed essere svincolati da semplici analogie con il caso finito.

Vediamo ora la seconda dimostrazione «sbagliata»: essa prende spunto dal concetto di «numero definibile» e costituisce il **paradosso di Richard**.

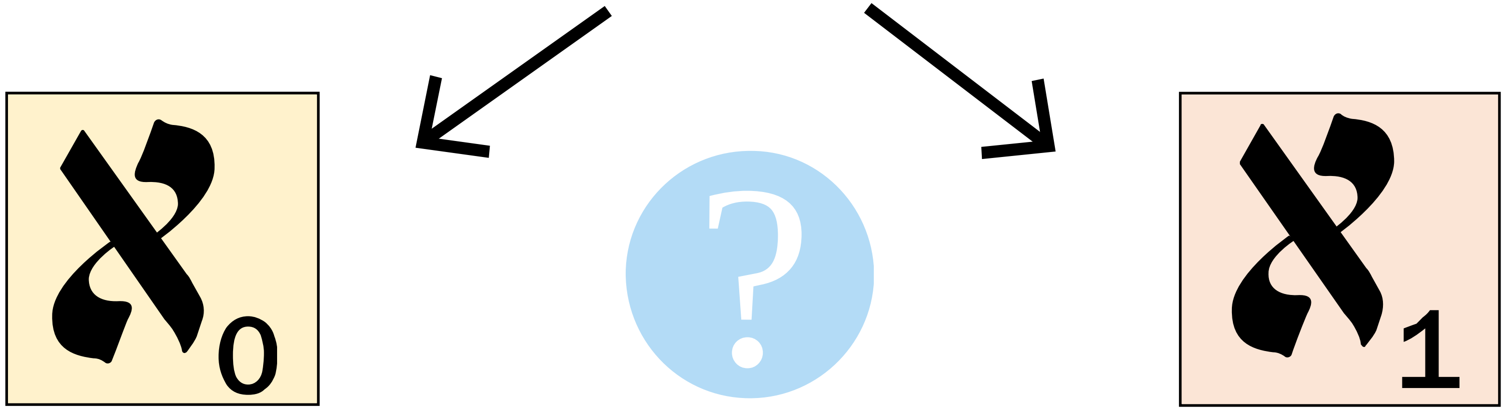
Problema

Consideriamo ora **l'insieme D di tutti i numeri reali compresi tra 0 e 1 descrivibili**, cioè di tutti i numeri tra 0 e 1 che possano essere descritti mediante una proprietà o una procedura di calcolo, in maniera non ambigua utilizzando un insieme finito di simboli.

Problema

Consideriamo ora **l'insieme D di tutti i numeri reali compresi tra 0 e 1 descrivibili**, cioè di tutti i numeri tra 0 e 1 che possano essere descritti mediante una proprietà o una procedura di calcolo, in maniera non ambigua utilizzando un insieme finito di simboli.

La domanda è la solita: quale è la cardinalità di D?



Problema

Consideriamo ora **l'insieme D di tutti i numeri reali compresi tra 0 e 1 <u>descrivibili</u>**, cioè di tutti i numeri tra 0 e 1 che possano essere descritti mediante una proprietà o una procedura di calcolo, <u>in maniera non ambigua</u> utilizzando un insieme finito di simboli.

La domanda è la solita: quale è la cardinalità di D?

$\aleph_0$? $\aleph_1$

Purtroppo esistono due modi per valutare la cardinalità di D <u>che portano a risultati diversi</u>.

$\aleph_0$

Sia A l'insieme finito che rappresenta il nostro alfabeto di simboli (A potrebbe per esempio contenere tutti i simboli dell'alfabeto aggiunti a quelli che si trovano in «inserisci simbolo» in un comune programma di videoscrittura).

Ogni «descrizione» e in generale ogni «frase» è una sequenza finita di simboli di A di una certa lunghezza. Supponiamo di ordinare tutte le frasi in ordine crescente secondo la loro lunghezza (per cui una frase come «**il primo numero primo**» verrebbe prima di «**il primo quadrato perfetto**» semplicemente perché la prima frase è più breve). A parità di lunghezza, ordiniamo le frasi secondo un qualche ordine alfabetico (definito, per esempio, dalla posizione nel codice «ASCII»).

Ordinando tutte le frasi in questo modo, possiamo enumerarle una dopo l'altra senza perderne nessuna. Ma allora le frasi che descrivono numeri reali tra 0 e 1 sono numerabili e $\boxed{\text{quindi } |D| = \aleph_0}$

$\aleph_1$

Consideriamo ora l'ordine lessicografico introdotto prima, relativo a tutte le possibili descrizioni di numeri reali compresi tra 0 e 1. Scriviamo quindi in ordine non le descrizioni, ma i numeri che esse individuano (nel sistema binario), con la solita convenzione di aggiungere infiniti 0 in coda ai numeri decimali finiti.

DESCRIZIONI

Cifre (binarie) dei numeri descritti

DESCRIZIONI											
F_1	$\longrightarrow$	0,	1	0	0	1	0	0	0	1	...
F_2	$\longrightarrow$	0,	0	0	1	0	0	0	1	0	...
F_3	$\longrightarrow$	0,	0	0	0	1	0	1	1	1	...
F_4	$\longrightarrow$	0,	1	1	1	1	0	1	1	1	...
F_5	$\longrightarrow$	0,	0	1	1	0	0	1	0	1	...
F_6	$\longrightarrow$	0,	0	1	0	0	1	1	0	1	...
F_7	$\longrightarrow$	0,	0	1	0	1	0	0	1	1	...
F_8	$\longrightarrow$	0,	1	0	1	0	1	0	1	0	...
...											
b		0,	1	0	0	1	0	1	1	0	...
$\bar{b}$		0,	0	1	1	0	1	0	0	1	...

$\aleph_1$

Consideriamo ora l'ordine lessicografico introdotto prima, relativo a tutte le possibili descrizioni di numeri reali compresi tra 0 e 1. Scriviamo quindi in ordine non le descrizioni, ma i numeri che esse individuano (nel sistema binario), con la solita convenzione di aggiungere infiniti 0 in coda ai numeri decimali finiti.

Come al solito creiamo il numero «diagonale» b e quindi «l'antidiagonale» $\bar{b}$, un numero che differisce da tutti gli altri in tabella di almeno una cifra.

DESCRIZIONI		Cifre (binarie) dei numeri descritti								
F_1	$\longrightarrow$	0,	1	0	0	1	0	0	0	1 ...
F_2	$\longrightarrow$	0,	0	0	1	0	0	0	1	0 ...
F_3	$\longrightarrow$	0,	0	0	0	1	0	1	1	1 ...
F_4	$\longrightarrow$	0,	1	1	1	1	0	1	1	1 ...
F_5	$\longrightarrow$	0,	0	1	1	0	0	1	0	1 ...
F_6	$\longrightarrow$	0,	0	1	0	0	1	1	0	1 ...
F_7	$\longrightarrow$	0,	0	1	0	1	0	0	1	1 ...
F_8	$\longrightarrow$	0,	1	0	1	0	1	0	1	0 ...
...										
b		0,	1	0	0	1	0	1	1	0 ...
$\bar{b}$		0,	0	1	1	0	1	0	0	1 ...

$\aleph_1$

Consideriamo ora l'ordine lessicografico introdotto prima, relativo a tutte le possibili descrizioni di numeri reali compresi tra 0 e 1. Scriviamo quindi in ordine non le descrizioni, ma i numeri che esse individuano (nel sistema binario), con la solita convenzione di aggiungere infiniti 0 in coda ai numeri decimali finiti.

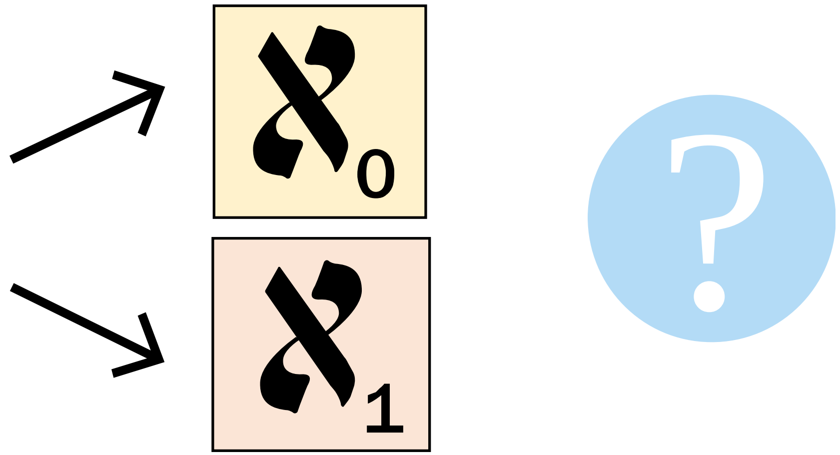
Come al solito creiamo il numero «diagonale» b e quindi «l'antidiagonale» $\bar{b}$, un numero che differisce da tutti gli altri in tabella di almeno una cifra. Il problema è che $\bar{b}$ è appena stato descritto con un numero finito di simboli e dovrebbe quindi stare in tabella. L'unica soluzione alla contraddizione è che le «descrizioni» non si possano enumerare, che quindi abbiano una cardinalità $|D| = \aleph_1$.

DESCRIZIONI

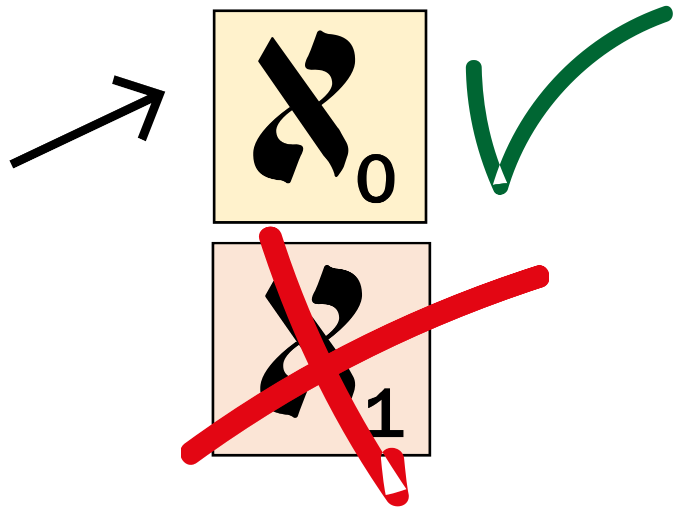
Cifre (binarie) dei numeri descritti

F_1	$\longrightarrow$	0,	1	0	0	1	0	0	0	1 ...
F_2	$\longrightarrow$	0,	0	0	1	0	0	0	1	0 ...
F_3	$\longrightarrow$	0,	0	0	0	1	0	1	1	1 ...
F_4	$\longrightarrow$	0,	1	1	1	1	0	1	1	1 ...
F_5	$\longrightarrow$	0,	0	1	1	0	0	1	0	1 ...
F_6	$\longrightarrow$	0,	0	1	0	0	1	1	0	1 ...
F_7	$\longrightarrow$	0,	0	1	0	1	0	0	1	1 ...
F_8	$\longrightarrow$	0,	1	0	1	0	1	0	1	0 ...
...										
b		0,	1	0	0	1	0	1	1	0 ...
$\bar{b}$		0,	0	1	1	0	1	0	0	1 ...

Secondo voi quale dei due ragionamenti conteneva un errore (e quale)?



Secondo voi quale dei due ragionamenti conteneva un errore (e quale)?



Premesso che la questione della «definibilità» andrebbe inquadrata in termini più rigorosi (infatti il concetto di «definibile» non è stato a sua volta ben definito), dovremmo accettare che $|D| = \aleph_0$.

La contraddizione è stata costruita sostenendo che $\bar{b}$ dovesse stare in tabella «perché descritto»: la sua descrizione, per essere tale, dovrebbe però essere univoca e idealmente consentire di ricostruire il numero stesso. Ciò presuppone la conoscenza di tutti i numeri in tabella (dai quali deve differire sulla diagonale): si tratta quindi di una «vera descrizione» solo se $\bar{b}$ viene scritto «dopo tutti gli altri numeri in elenco»: si tratta di una situazione peggiore di 1/3, questo numero «nasce espulso»!

Spero che vi siate divertiti.

Alex Saltuari

Liceo Majorana, Roma