Problemi con la bilancia a due piatti

RICONOSCERE SITUAZIONI RICORSIVE - INTRODURRE IL PRINCIPIO D’INDUZIONE

UNA BILANCIA A DUE PIATTI

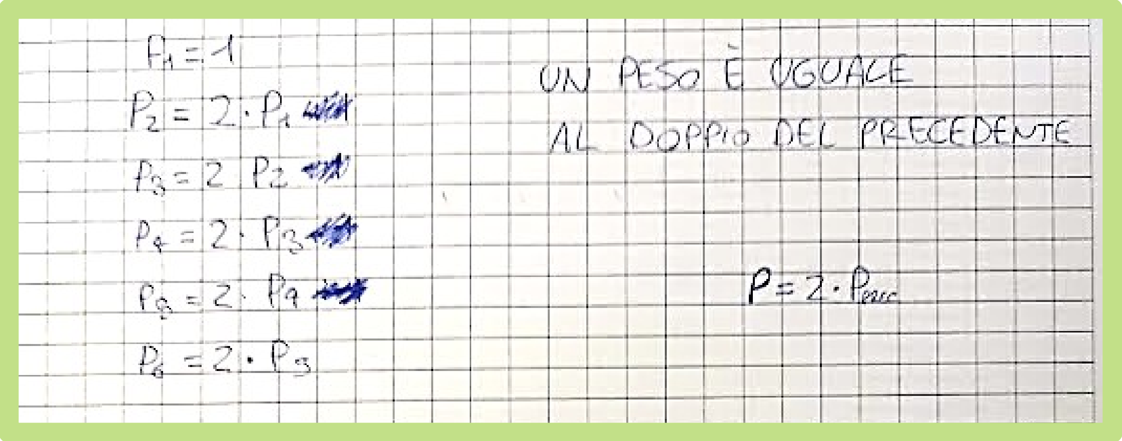
Una persona ha sei pesi con una bilancia a due piatti: su un piatto pone l'oggetto da pesare e sull'altro piatto alcuni dei sei pesi. La persona riesce così a pesare tutti gli oggetti che hanno un peso intero, da 1 libbra fino a 63 libbre.

Si chiede qual è il peso in libbre dei sei pesi.

1	2	4	8	16	32

HO PRESO IN CONSIDERAZIONE IL PRIMO PESO CON
UN PESO PARI A 1 LIBBRA, POI HO CAPITO CHE CON
UN PESO DA 1 NON POTEVO RICAVARE NESSUN ALTRO
NUMERO, QUINDI HO PRESO 2 COME SECONDO PESO, IL METODO
LO AVEVO CAPITO, I NUMERI DA UTILIZZARE ERANO
I SUCCESSIVI ALLA SOMMA DEI NUMERI CHE AVEVO
QUINDI COME 3° NUMERO HO PRESO IL 4 PERCHÉ
CON 1-2 POTEVO TROVARE SOLO IL 3, POI
CON 1-2-4 POTEVO TROVARE 7, QUINDI IL 4° PESO
ERA 8, CON 1-2-4-8 TROVO 15, QUINDI IL 5°
PESO ERA 16 E CON 1-2-4-8-16 TROVO
31 E QUINDI IL NUMERO FINALE È 32

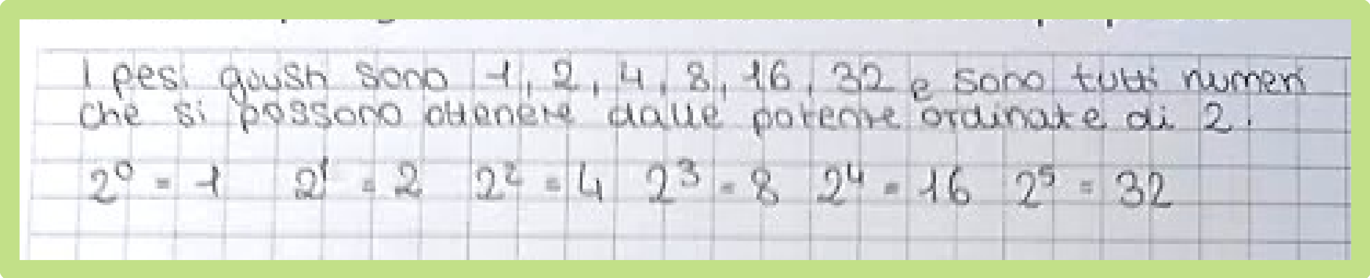
Trovati i pesi giusti, cercane delle proprietà



$P_1 = 1$
$P_2 = 2 \cdot P_1$
$P_3 = 2 \cdot P_2$
$P_4 = 2 \cdot P_3$
$P_5 = 2 \cdot P_4$
$P_6 = 2 \cdot P_5$

UN PESO È UGUALE
AL DOPPIO DEL PRECEDENTE

$P = 2 \cdot P_{prec}$



I pesi giusti sono 1, 2, 4, 8, 16, 32 e sono tutti numeri che si possono ottenere dalle potenze ordinate di 2.

$2^0 = 1$ $2^1 = 2$ $2^2 = 4$ $2^3 = 8$ $2^4 = 16$ $2^5 = 32$

Libbre	Pesi da usare in libbre	Corrispondenza in base 2
1	1	1
2	2	10
3	2+1	11
4	4	100
5	4+1	101
6	4+2	110
7	4+2+1	111
8	8	1000
9	…	…
10	…	…
…	…	…

Prova a scrivere il valore dei pesi trovati in base due.

Scritto il numero di pesi in questo modo, cioè trasformato il numero in base due, quanti e quali pesi occorrono per pesare 13 libbre? E per pesarne 130?

Cosa osservi scrivendo il valore dei pesi in numerazione binaria?

Il problema visto è un problema matematico molto antico, se ne parla già nel medioevo.
E’ un problema pratico proposto dai commercianti dell’epoca che, dovendosi spostare da un mercato all’altro, cercavano il numero minimo di pesi da portare per le loro necessità.

Tartaglia nel 1556 nel suo Trattato (*Trattato de' numeri e misure, 1556, libro I, cap. XVI, art. 32*) ne dà una soluzione usando il "metodo del mangione": in pratica, si va avanti il più a lungo possibile con i pesi esistenti prima di introdurne uno nuovo, e quando non si può fare a meno di aggiungerne un altro, non si prende un peso che già si ha, ma il successivo della loro somma cioè sempre un peso più grande dei precedenti.


LA PRIMA PARTE DEL GENERAL TRATTATO DI NVMERI, ET MISVRE DI NICOLO TARTAGLIA,

NELLAQVALE IN DIECISETTE LIBRI SI DICHIARA TVTTI GLI ATTI OPERATIVI, PRATICHE, ET REGOLE NECESSARIE NON SOLAmente in tutta l'arte negotiaria, & mercantile, ma anchor in ogni altra arte, scientia, ouer disciplina, doue interuenghi il calculo.

MALIGNITA'

NOIAR NON PVO

A' FORTEZZA

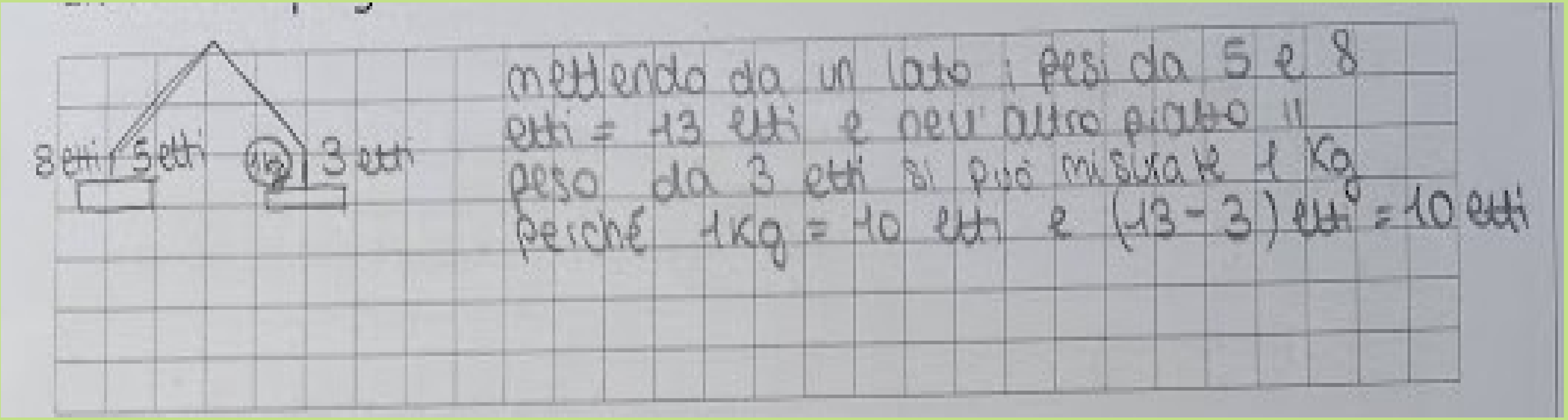
CON LI SVOI PRIVILEGII.

In Vinegia per Curtio Troiano dei Nauò.

M D LVI.

Dai test d’ingresso di medicina

Con tre pesi di 3 etti, 5 etti e 8 etti posso pesare esattamente un chilo?



Problema assegnato al MYMC 2019

Una persona ha 4 pesi con cui riesce a determinare tutti i pesi interi da 1 a 40 libbre.

Si chiede di quali pesi si tratta.

Sapendo che sono necessari quello da 1 e da 3 e che per pesare i numeri pari basta aggiungere dal lato opposto della bilancia il peso da 1, gli altri due pesi devono essere numeri dispari.
il numero più alto tra quelli dispari (5-7-9) che permette insieme agli altri pesi di ottenere quelli più piccoli è il 9, quindi serve il peso da 9 libbre.
Sommando tutti i pesi si ottiene 13, per arrivare a 40 manca 27, quindi l'unico modo per pesare 40 libbre è avere un peso da 27 libbre.
Si ottiene quindi che i pesi necessari sono 1-3-9 e 27 libbre.

- Ogni numero $n \leq 40$ si esprime al massimo con 4 cifre in base tre .
- Il numero di libbre scritto in base tre, può sempre essere scomposto come somma o differenza di numeri che non contengono la cifra 2 e che non hanno la cifra 1 nella stessa posizione.

..., possiamo notare che il due puo' essere formato solamente sottraendo 3 e 1. Di conseguenza, ogni numero contenente 2 necessita di una sottrazione per formarlo

Libbre	Pesi da usare in libbre	Corrispondenza in base 3
1	1	1
2	3-1	2=10-1
3	3	10
4	3+1	11
5	9-(3+1)	12=100-10-1
6	9-3	20=100-10
7	9-(3-1)	21=100-10+1
8	9-1	22=100-10+10-1
9	9	100
10	9+1	101
11	9+(3-1)	102=100+10-1
12	9+3	110
13	9+(3+1)	111
14	27-9-3-1	112=1000-100-10-1

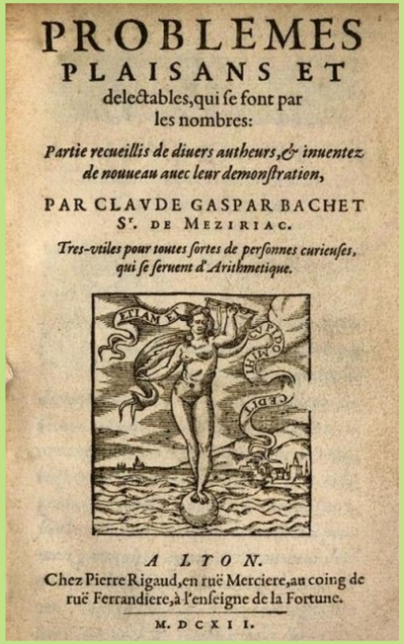
Quali pesi mi servono per pesare 32 libbre?

Come sono disposti i pesi sui due piatti della bilancia?

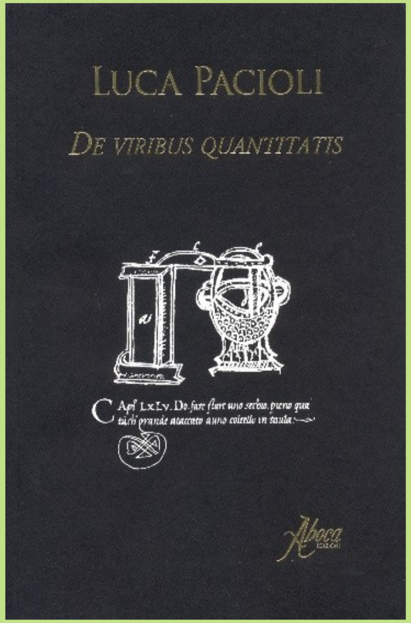
$$32_{10} = 1012_3 = (1010 + 10 - 1)_3 = (1020 - 1)_3 = (1000 + 100 - 10 - 1)_3$$

Con i pesi che vanno da 1 a 3^4 libbre, fino a quale peso posso pesare?

$$(1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4) \text{ libbre}$$

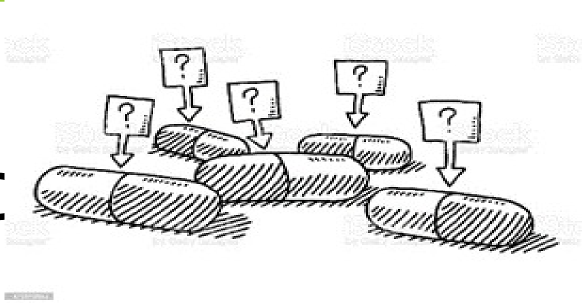


Questo problema e' internazionalmente noto come problema di Bachet, perche' appare nei suoi Problemes (*Bachet de Mezierac, Problemes plaisans et delectable, 1612, prob.V, pag. 154*) che è considerata la prima raccolta storica di problemi ricreativi.



In realtà moltissimi dei problemi del Bachet sono tratti da un manoscritto di Luca Pacioli, il De Viribus Quantitatis nel quale si riprendono i problemi di Fibonacci.

LA PILLOLA DIFETTOSA *(dai test d'ingresso a medicina)*



Elisa ha 5 compresse apparentemente identic
una più pesante delle altre.
Quale sarà il numero minimo di pesate su una bilancia a due piatti per individuare la compressa più pesante?

IL NUMERO MINIMO DI PESATE È 2.
NEL CASO DELLA PRIMA PROVA INDIVIDUIAMO L'UGUAGLIANZA O LA DIFFERENZA DI PESO TRA LE 2 PILLOLE, NEL CASO PEGGIORE IN CUI IL PESO RIMANESSE INVARIATO PROCEDIAMO CON IL SECONDO TENTATIVO PER POI CAPIRE IL PESO MAGGIORE GRAZIE ALL'ULTIMA PILLOLA CHE NON ABBIAMO PESATO.

Risolvi lo stesso problema di prima ma con 15 compresse di cui una più pesante.

Con una pesata tra quante compresse al massimo riesci a distinguerne una più pesante? E con due pesate? E con tre?

Con n pesate, tra quante compresse indistinguibili possiamo trovare la sola pallina più pesante?

Esamina i casi uno alla volta distinguendo le situazioni a seconda del numero di pesate.

N. pesate	N. compresse	compresse piatto1	compresse piatto 2	compresse fuori dalla bilancia
1	2	1	1	0
	3	1	1	1
2	4	2	2	0
	5	2	2	1
	6	2	2	2
	7	3	3	1
	8	3	3	2
	9	3	3	3
3	10	5	5	0
	11			
	…			
	…			
	…			
	27	9	9	9

Pesate	N. max compresse	Variazione
1	3	
2	9	
3	27	
4	81	

Pesate	N. max compresse	Variazione
1	3	
2	9	$9-3=2\cdot 3$
3	27	$27-9=2\cdot 3^2$
4	81	$81-27=2\cdot 3^3$

Consultando la tabella, si vede che il numero massimo di compresse da confrontare, passando da un numero di pesate (n) al successivo (n +1), aumenta di $2 \cdot 3^n$

Se con P(n) indichiamo il numero massimo di compresse confrontabili con n pesate si ha:

$P(1) = 3$; $P(2)=9$; $P(3)=27$… $P(n+1) = P(n) + 2 \cdot 3^n$ se $n \geq 1$

(in quanto è il numero precedente aumentato della variazione, cioè di $2 \cdot 3^n$ compresse)

Allora la congettura relativa al numero massimo di compresse da mettere in gioco con n pesate è:

$P(n) = 3^n$ con $n \geq 1$

Bisogna verificare, allora, che la formula, dato P(1) e P(n) è vera per P(n+1).

Numeri «grandi»

UN SEMPLICE LABORATORIO SU NUMERI CON ORDINE DI GRANDEZZA ELEVATO

Classe prima

L’attività

Attività laboratoriale finalizzata ad acquisire il **senso del numero**, specialmente dei numeri «grandi» espressi sottoforma di potenze

Due fasi:

- Una sfida tra gli studenti della classe
- La determinazione del vincitore tramite l’analisi dei risultati

Fase 1

LE PROPRIETÀ DELLE POTENZE

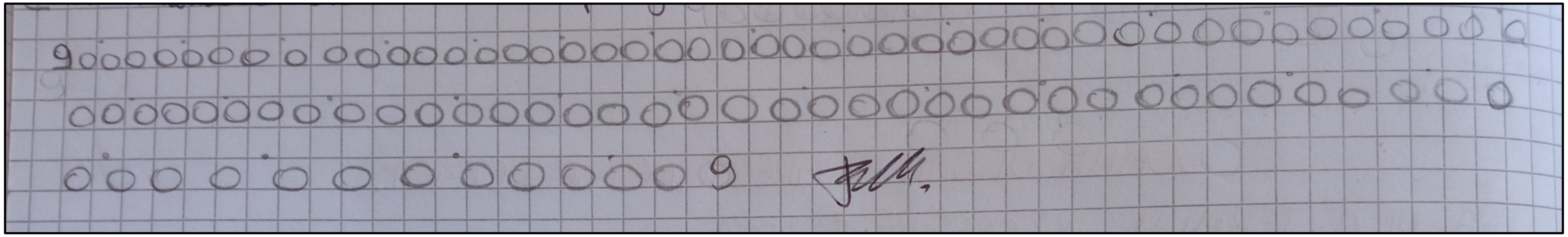
Un’insolita sfida

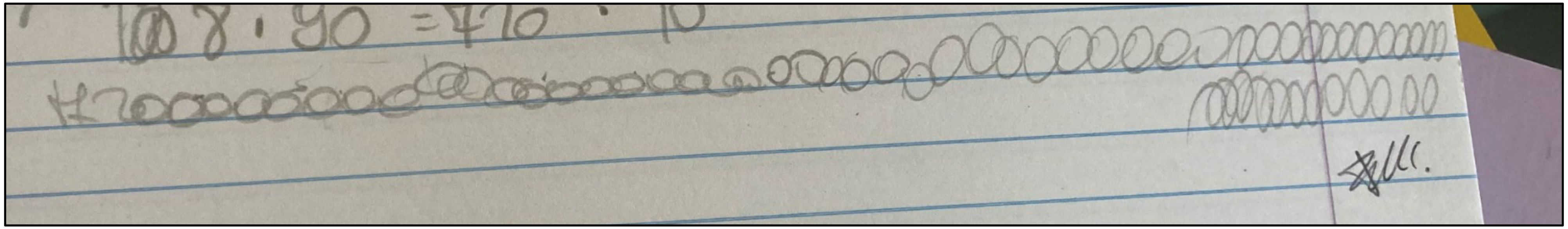
Avendo a disposizione carta e penna, scrivere il numero più grande possibile in un minuto.

Regole:

- Il numero deve essere naturale
- «infinito» non è una risposta accettabile
- Il numero del mio compagno +1 non è accettabile

I primi tentativi…





È solo una gara di velocità?

Alcuni hanno usato la strategia di scrivere un numero del tipo:

$$99999 \ldots 99999$$

Se scriviamo due nove al secondo, tenendo il ritmo, avremo un numero formato da 10 nove.

È solo una gara di velocità?

Ma i più, mentre scrivevano i 9, si sono accorti che forse era preferibile scrivere un numero del tipo:

$$10000\ldots0000$$

Forse si riescono a scrivere anche tre zeri al secondo arrivando ad un numero con un 1 seguito da 180 zeri.

È solo una gara di velocità?

Nel primo caso abbiamo un numero che è poco meno di 10^{120}.

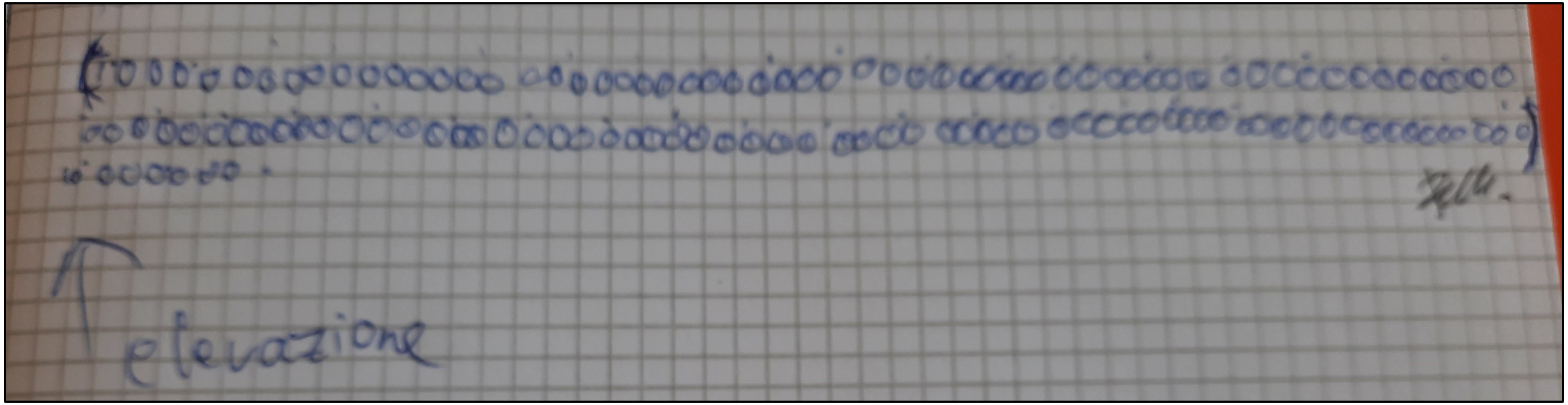
Nel secondo caso abbiamo 10^{180}.

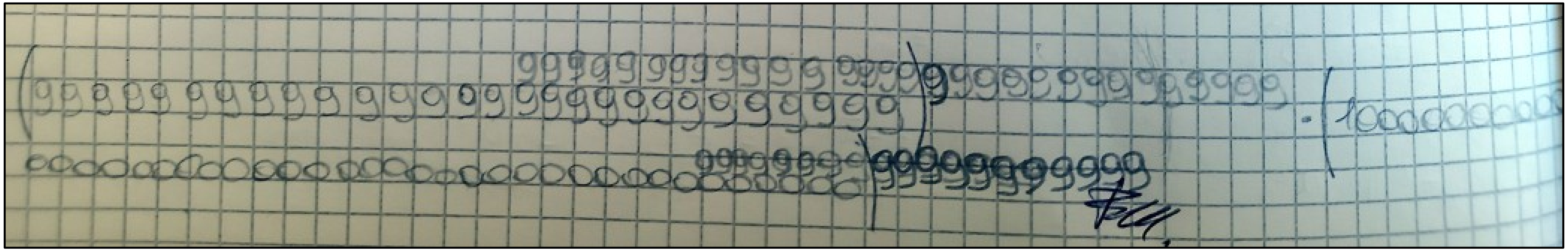
IDEA

Possiamo usare le potenze per scrivere il numero e risparmiamo del tempo.

Per scrivere 10^{180} bastano, infatti, due secondi.

Un passo in avanti…





Primo dubbio

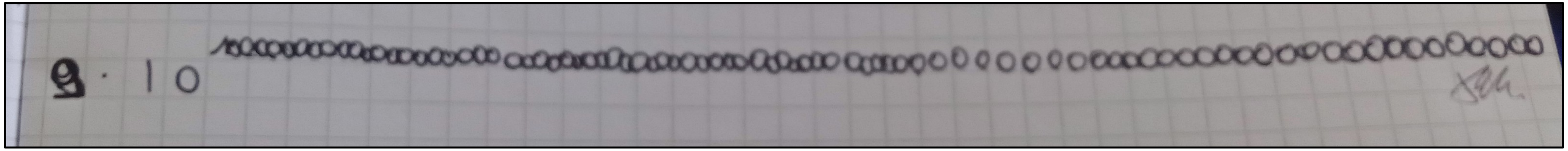
È più grande 10^{1000} o 1000^{10}?

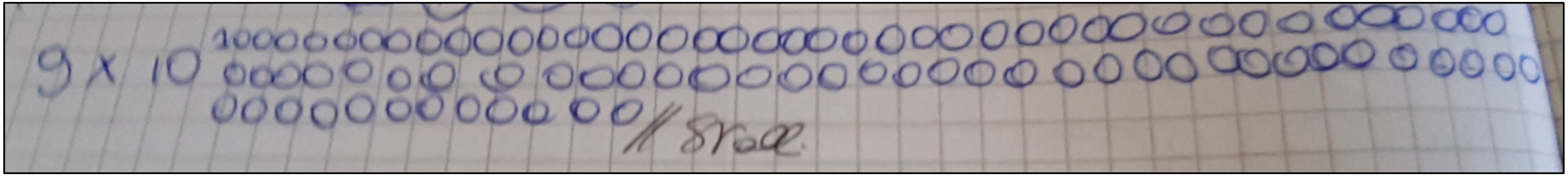
$$1000^{10} = (10^3)^{10} = 10^{30} < 10^{1000}$$

Quindi se scriviamo 10^{1000}, abbiamo un numero molto più grande e vinciamo. Una buona scelta è scrivere un numero del tipo:

$$10^{10000\ldots0000}$$

Ancora un miglioramento…





Ma si può fare meglio?

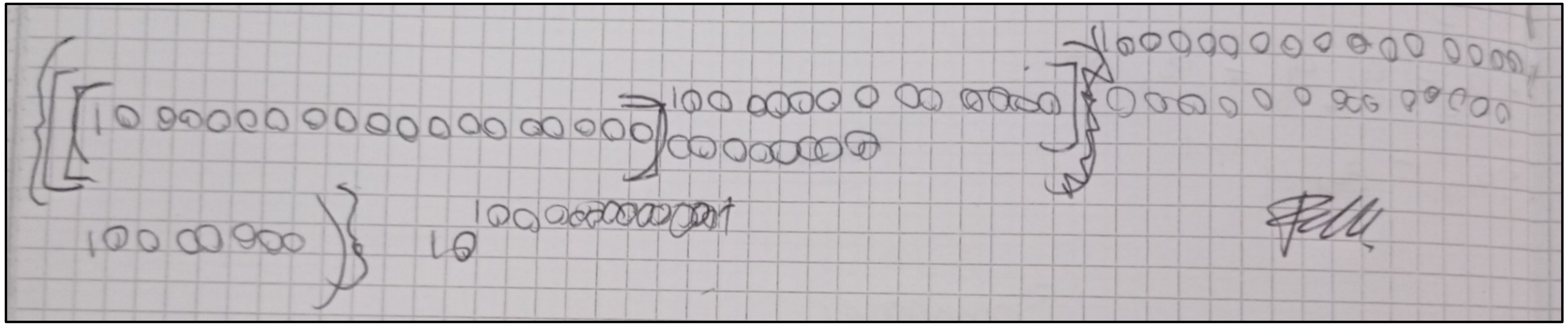
Ci viene l'idea che possiamo scrivere anche l'esponente come potenza, cioè:

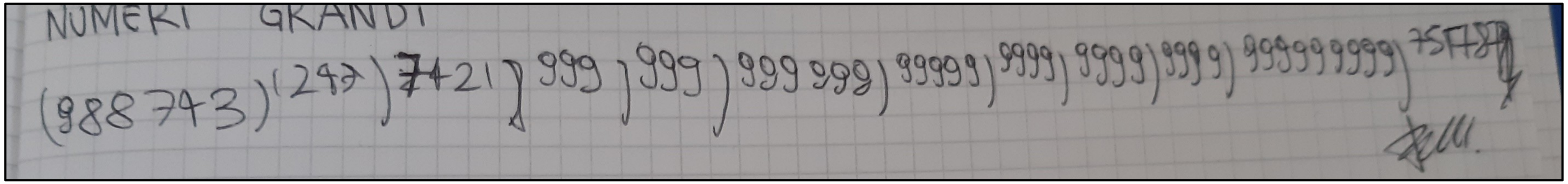
$$10^{10^{10}}$$

Però bisogna essere precisi perché l'elevamento a potenza non gode della proprietà associativa. Ad esempio:

$$2^{(3^2)} = 2^9 = 512 \qquad (2^3)^2 = 8^2 = 64$$

Ci siamo quasi…





Secondo dubbio

È più grande $(10^{10})^{10}$ o $10^{\left(10^{10}\right)}$?

$$(10^{10})^{10} = 10^{10\cdot 10} = 10^{100} < 10^{10\,000\,000\,000} = 10^{\left(10^{10}\right)}$$

A questo punto risulta chiaro che si vincerà facilmente la gara se si scriverà un numero del tipo:

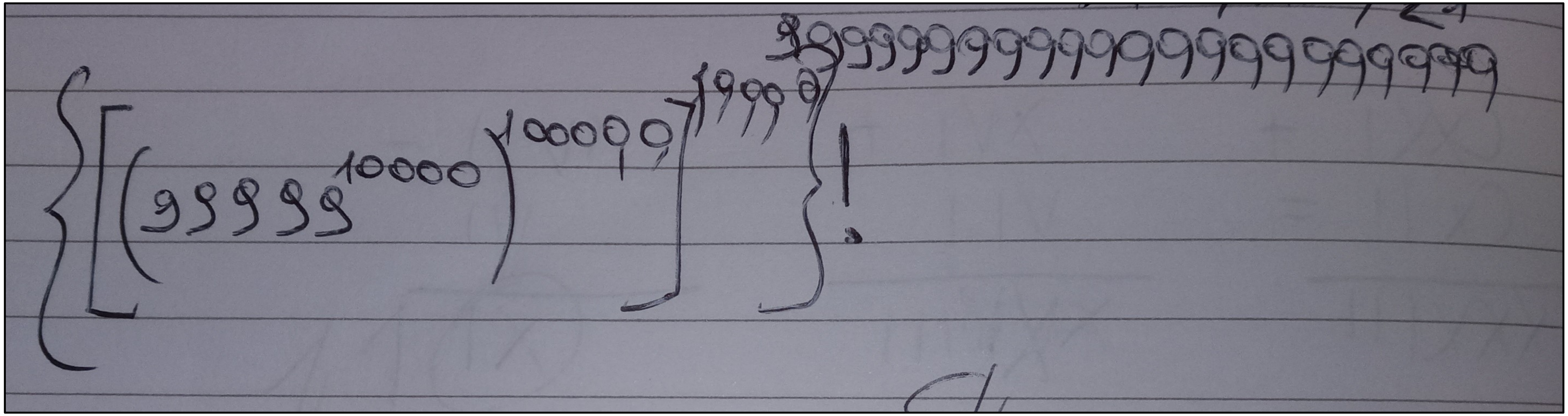
$$10^{\left(10^{\left(10^{\left(10^{\cdots}\right)}\right)}\right)}$$

Nessuno ha attuato la migliore strategia!

Eppure il vincitore della sfida ha fatto di meglio...

Un risultato inatteso!

Eppure il vincitore della sfida ha fatto di meglio...



Fase 2

GLI ORDINI DI GRANDEZZA

Numeri «grandi»

- Supponendo di impiegare un secondo a numero, quanto tempo occorre per contare fino a un milione?

$$10^6\, s \approx 16{,}7 \cdot 10^3\, min \approx 278\, h \approx 11\, giorni\ e\ mezzo$$

- E per contare fino a un miliardo?

$$10^9\, s \approx 16{,}6 \cdot 10^6\, min \approx 2{,}78 \cdot 10^5\, h \approx 11{,}5 \cdot 10^3\, d \approx\ 31\, anni\ e\ mezzo$$

Numeri «grandi»

Nel corpo umano ci sono all'incirca 10^{15} atomi.

- Sapreste stimare il numero di atomi presenti sulla Terra?

$$10^{50}$$

- E il numero di atomi presenti nell'intero Universo?

$$10^{80}$$

Morale

Aumentando anche di poco l’esponente, il valore di una potenza aumenta molto rapidamente!

Stimiamo i numeri della sfida

Vogliamo stimare il numero:

$$\mathbf{4567^{80}}$$

IDEA

Scriviamo la base in notazione scientifica, ne calcoliamo l'ordine di grandezza e poi usiamo le proprietà delle potenze:

$$\mathbf{(4567)^{80} = \left(4,567 \cdot 10^{3}\right)^{80} \approx \left(10^{4}\right)^{80} = 10^{320}}$$

Dov’è l’errore?

Sembra tutto corretto. Eppure usando la calcolatrice troviamo:

$$(4567)^{80} = 5,89496090 \cdot 10^{292} \approx 10^{293}$$

Tra 320 e 293, abbiamo una differenza di 27 cifre, cioè una differenza di:

$$1000000000000000000000000000$$

Un milione di quadrilioni!

Un secondo tentativo

Non possiamo calcolare l’ordine di grandezza della base di una potenza e poi calcolarla: commettiamo un errore troppo alto.

NUOVA IDEA

$$(4567)^{80} = \left(4,567 \cdot 10^3\right)^{80} = (4,567)^{80} \cdot \left(10^3\right)^{80} = (4,567)^{80} \cdot 10^{240}$$

Allora potremmo stimare la base della potenza che è diversa da 10:

$$1 < 4,567 < 10$$

La stima dell’ordine di grandezza

$$\mathbf{10^{240} = 1^{80} \cdot 10^{240} < (4,567)^{80} \cdot 10^{240} < 10^{80} 10^{240} \cdot 10^{320}}$$

Ma così la stima è grossolana, è meno utile del tentativo precedente.

Come raffinarla?

$$\mathbf{4,567 > 4 = 2^2}$$

Allora:

$$\mathbf{(4,567)^{80} > \left(2^2\right)^{80} = \left(2^{10}\right)^{16} = (1024)^{16} > \left(10^3\right)^{16} = 10^{48}}$$

La stima dell'ordine di grandezza

Ecco, allora, una stima più precisa:

$$\mathbf{10^{288} = 10^{48} \cdot 10^{240} < (4,567)^{80} \cdot 10^{240} < 10^{320}}$$

Ma si può ulteriormente raffinare perché $4{,}567 < 5$. Allora:

$$\mathbf{(4,567)^{80} < (5)^{80} = \left(5^4\right)^{20} = (625)^{20} < \left(10^3\right)^{20} = 10^{60}}$$

Abbiamo, quindi, una stima decisamente migliore:

$$\mathbf{10^{288} < (4,567)^{80} \cdot 10^{240} < 10^{60} \cdot 10^{240} = 10^{300}}$$

E per il numero vincitore?

$$\{[(99999^{10000})^{100099}]^{99999}\}^{9999999999999999999999}!$$

Possiamo approssimare un po' grossolanamente come:

$$\left(\left(\left(\left(\mathbf{10^5}\right)^{\mathbf{10^4}}\right)^{\mathbf{10^5+10^2}}\right)^{\mathbf{10^5}}\right)^{\mathbf{10^{22}}}! = \mathbf{10^{5\cdot 10^4\cdot(10^5+10^2)\cdot 10^5\cdot 10^{22}}}! = \mathbf{10^{5\cdot(10^{36}+10^{33})}}!$$

E per il numero vincitore?

Ma per dare una stima del fattoriale abbiamo necessariamente bisogno della formula di Stirling:

$$\boldsymbol{n}! \approx \sqrt{2\pi} \cdot n^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^{n}$$

Per semplificare i calcoli, abbiamo proposto alla classe di applicarla a:

$$n = 10^{10^{37}}$$

Ne è uscito fuori un utile esercizio sull'applicazione delle proprietà delle potenze.