

PUNTI DI VISTA SULLE CONICHE

Marta Menghini - Università «Sapienza» di Roma

Alessandro Foschi - Convitto Nazionale

Graziano Surace - Convitto Nazionale + Università «Sapienza» di
Roma

Sede degli incontri del laboratorio PLS /PCTO:

Liceo Lucrezio Caro di Roma (dall'a.s. 2010-2011)

Convitto Nazionale di Roma (dall'a.s. 2012-2013)

Docenti coinvolti:

Bruna Cavallaro, Alessandro Foschi, Marta Menghini, Francesca Ruzzi, Graziano Surace ed altri.

Alunni:

Studenti del 3° o 4° anno di corso di diversi scuole romane (Talete, Vittoria Colonna...)

Gruppi di lavoro Liceo Matematico

Riferimenti: A. Foschi, B. Cavallaro, F. Ruzzi., *I Laboratori matematici del piano lauree scientifiche al Convitto Nazionale «Vittorio Emanuele II» di Roma*, PROGETTO ALICE ANNO 2016-III

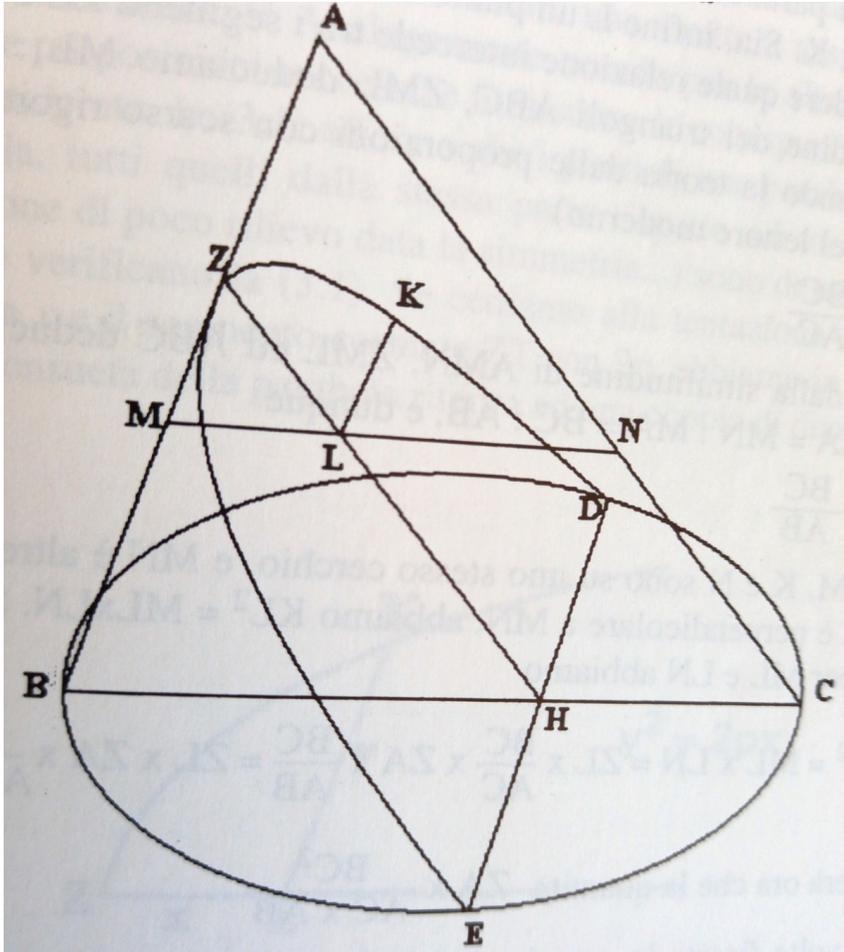
LE CONICHE: PERCHE'?

- **Aspetti storici:** le coniche sono state oggetto di studio da parte dei matematici dal III secolo a.c. ad oggi.
- **Aspetti culturali e didattici:** osservazione di un oggetto da prospettive diverse.
- **Interdisciplinarietà:** le coniche intervengono in ambiti non prettamente matematici (fisica, tecnologia, arte, architettura)

TAPPE DEL PERCORSO

- Panoramica sulle sezioni coniche in cielo e sulla terra (astronomia, architettura, applicazioni)
- Le coniche come sezioni, come luoghi geometrici, le loro equazioni.
- Costruzione di coniche.
- Le quadriche.
- Proprietà focali delle coniche e loro applicazioni
- Coniche in cielo.
- Presentazione ed esposizione dei lavori

Le sezioni del cono: la dimostrazione di Apollonio nel caso della parabola



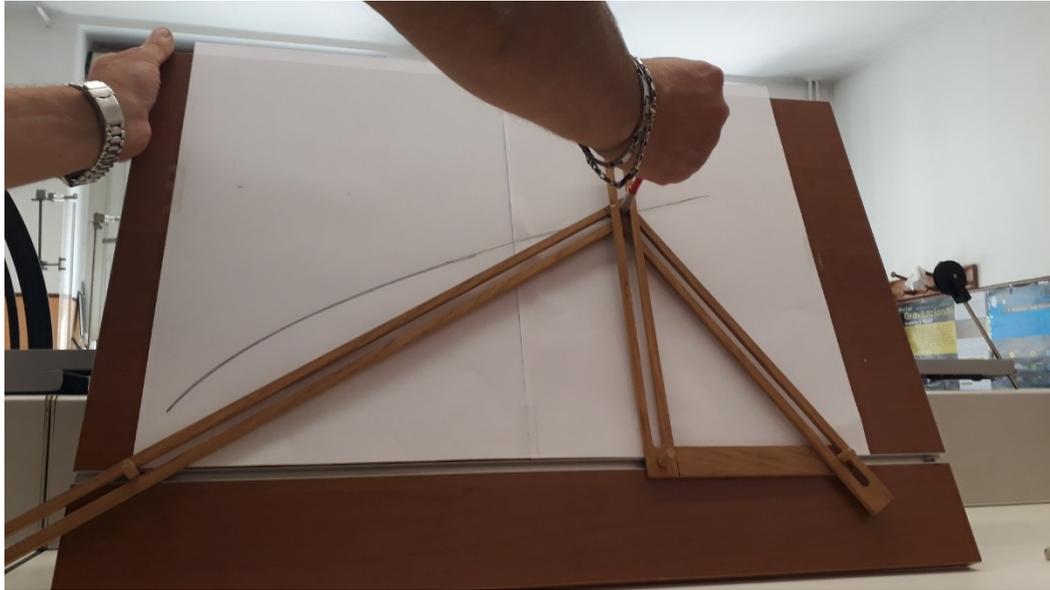
Pensiero funzionale (F. Klein, inizi '900):

Abituare al *pensiero funzionale*, visto come categoria fondante e unificante di tutti gli ambiti della matematica. Collegato all'uso di rappresentazioni mentali dei concetti matematici: comprendere il variare delle quantità in aritmetica e geometria, e la loro relazione reciproca. Osservare la "vitalità" delle quantità.

Ragionamento covariazionale (OCSE-PISA 2022 e altre ricerche). Importante anche nella modellizzazione

2) Le coniche nel piano: costruzione della parabola (con materiale, software). Parabolografo

PARABOLOGRAFO - SCHEDA DI LAVORO



1) Da quante parti è composto il sistema articolato?

.....
.....

2) Quali figure geometriche si formano con tali aste (compresa la scanalatura)?

.....
.....

3) Muovi il meccanismo. Quale segmento del sistema articolato rimane invariato durante il movimento?

.....
.....

4) Quali angoli del sistema articolato rimangono invariati durante il movimento?

.....
.....

5) Inserisci la matita nel punto **P** e traccia la curva muovendo la macchina: quale curva o parte di curva si ottiene?

.....
.....

6) Come puoi dimostrarlo? *Suggerimento (indica con x il segmento AC, con y il segmento PC, dove $P(x,y)$ è il generico punto della parabola)*

.....
.....

Definizione di
Menecmo

Liceo Plinio

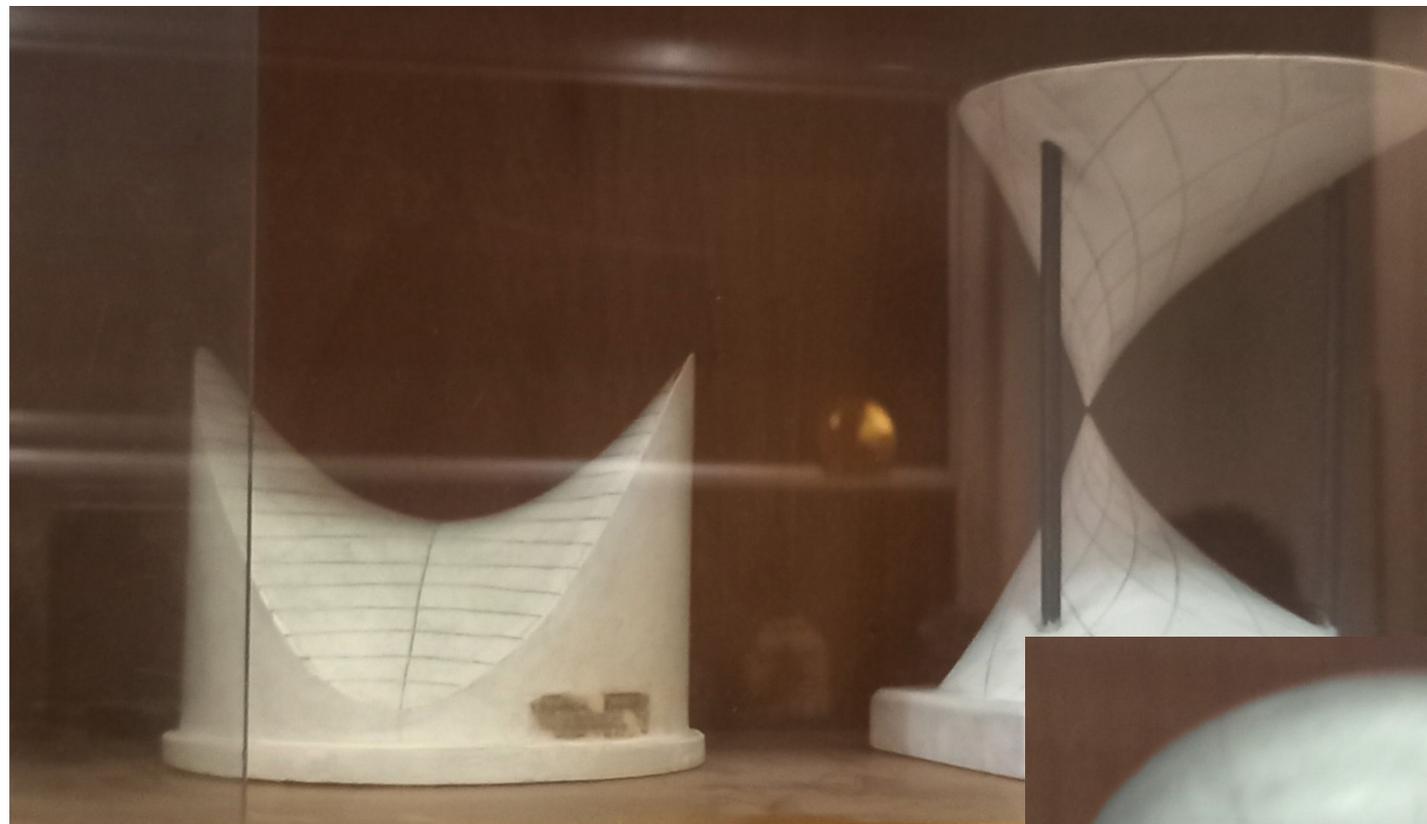
Link al video geogebra

Liceo Azzarita

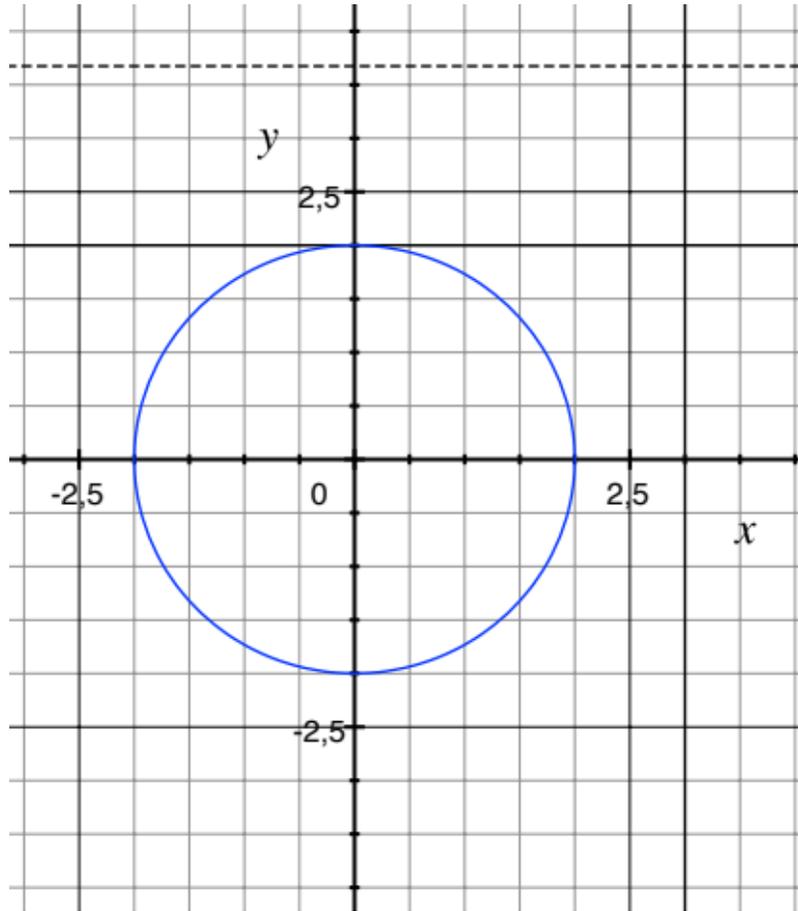


Il cilindro di fili

Le quadriche



Equazioni nel piano e nello spazio



$$x = 0$$

$$y = 0$$

equazione

retta

$$x = 2$$

$$z = 2$$

$$y = 2$$

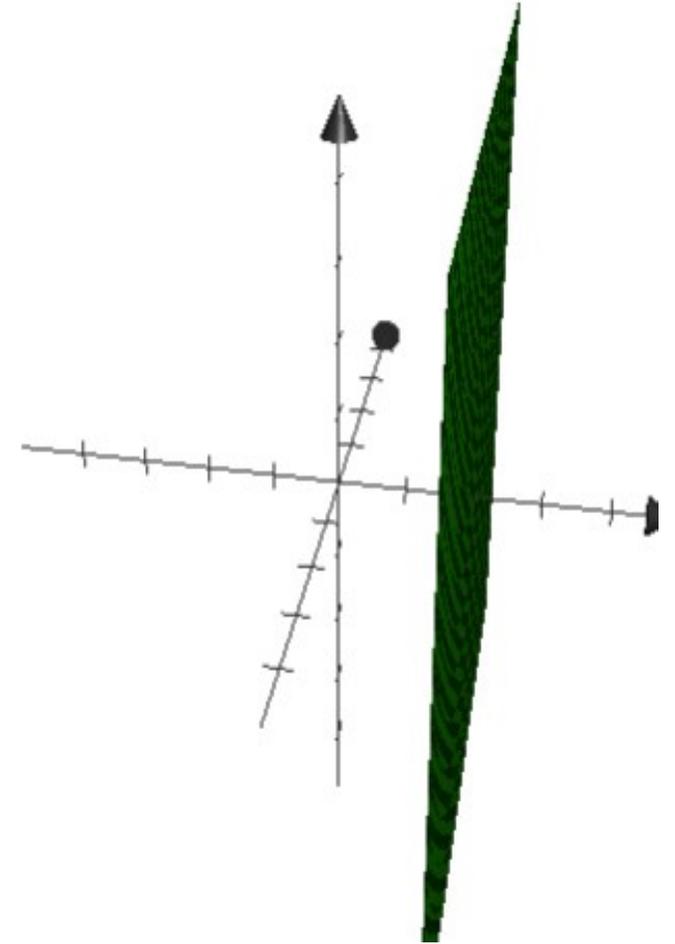
$$x^2 + y^2 = 1$$

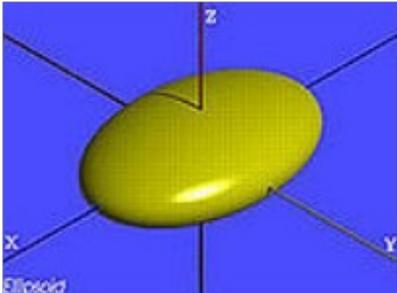
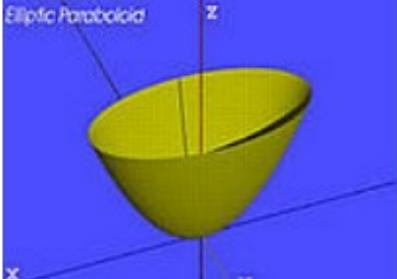
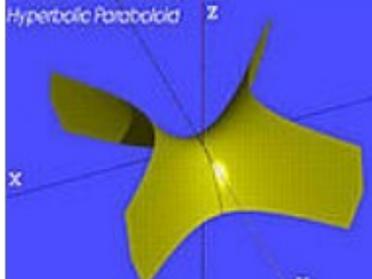
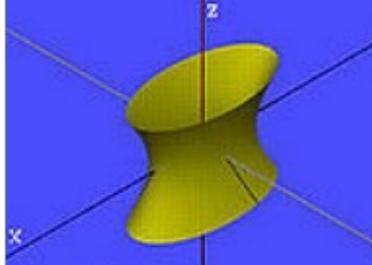
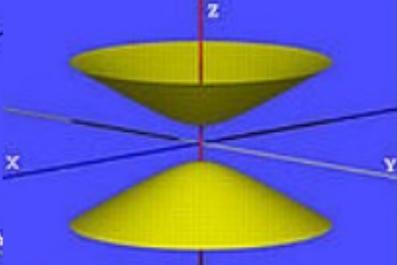
equazione sfera

circonferenza

su un

piano $z=k$



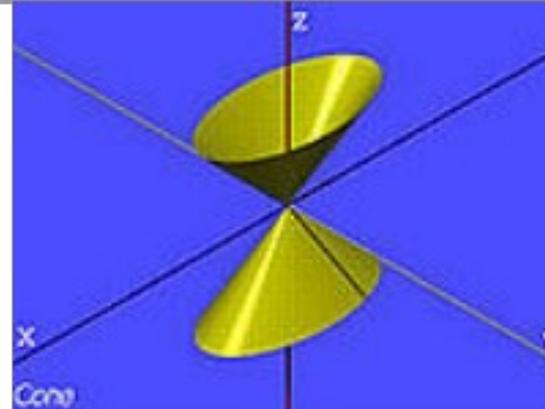
Quadriche non degeneri		
<p>Ellissoide</p> <p>Sferoide (caso particolare di ellissoide)</p> <p>Sfera (caso particolare di sferoide)</p>	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$	 <p>Ellipsoid</p>
<p>Paraboloide ellittico</p> <p>Paraboloide circolare (caso particolare di paraboloide ellittico)</p>	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z = 0$ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - z = 0$	 <p>Elliptic Paraboloid</p>
<p>Paraboloide iperbolico</p> $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - z = 0$	 <p>Hyperbolic Paraboloid</p>	<p>Iperboloide a due falde o iperboloide ellittico</p> <p>(figura sotto)</p> $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$
<p>Iperboloide ad una falda (iperboloide iperbolico)</p> $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	 <p>Hyperboloid of One Sheet</p>	 <p>Hyperboloid of Two Sheets</p>

L'equazione del cono

Quadriche degeneri

Cono

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$



Cilindro iperbolico (figura sotto)

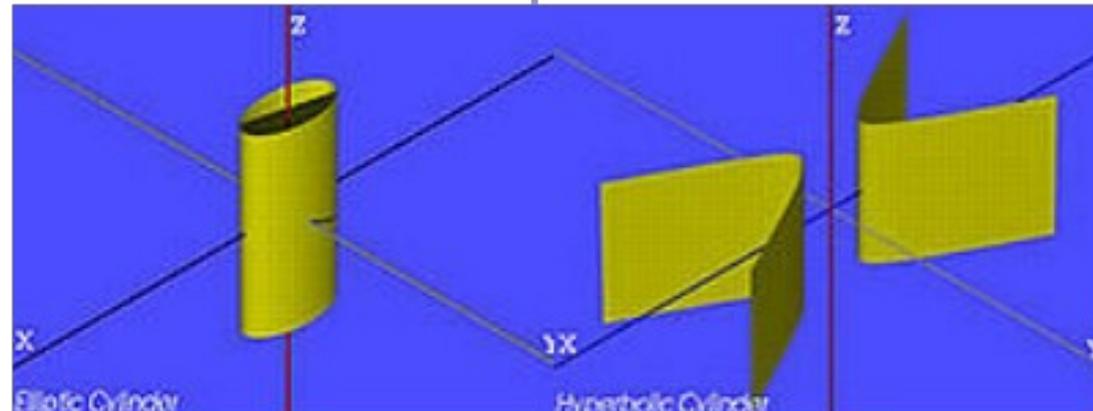
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Cilindro parabolico $x^2 + 2ay = 0$

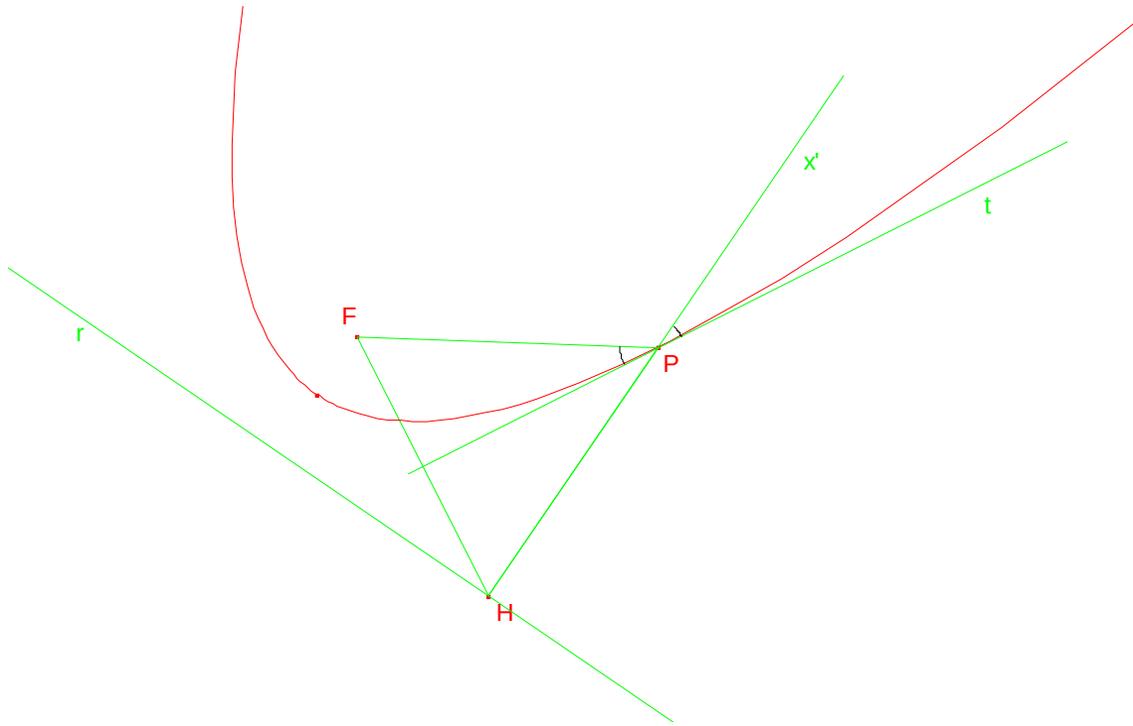
Cilindro ellittico

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Cilindro circolare (caso particolare di cilindro ellittico) se $a = b$.

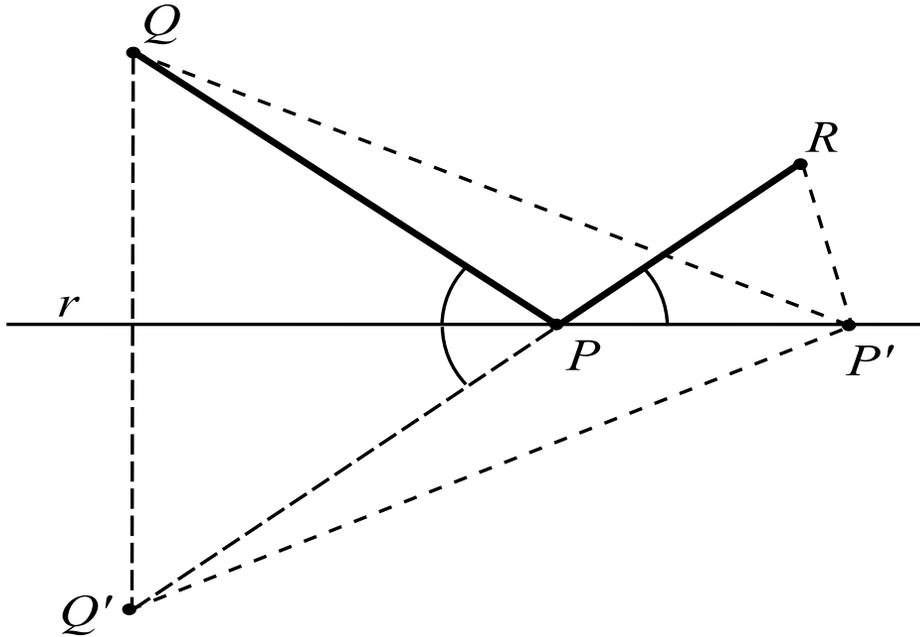


Le proprietà focali delle coniche



Se nel fuoco è posta una sorgente luminosa e la 'parete' interna della parabola è rivestita di materiale riflettente, ogni raggio uscente dal fuoco si riflette in un raggio parallelo all'asse della parabola.

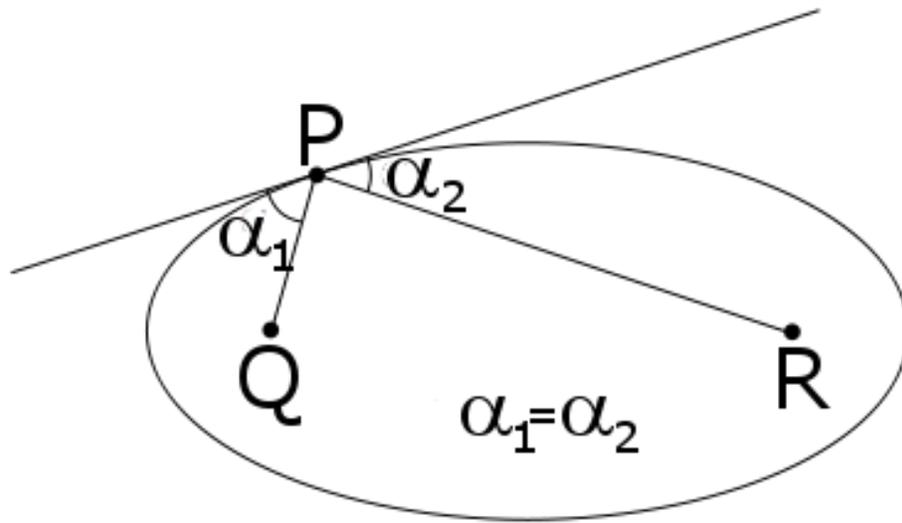
Le proprietà focali delle coniche



TEOREMA DI ERONE:

Data una retta r e due punti esterni Q ed R , il punto P della retta r che minimizza la somma $PQ+PR$ è quel punto tale che i segmenti PQ e PR formano angoli uguali con la retta r .

Le proprietà focali delle coniche

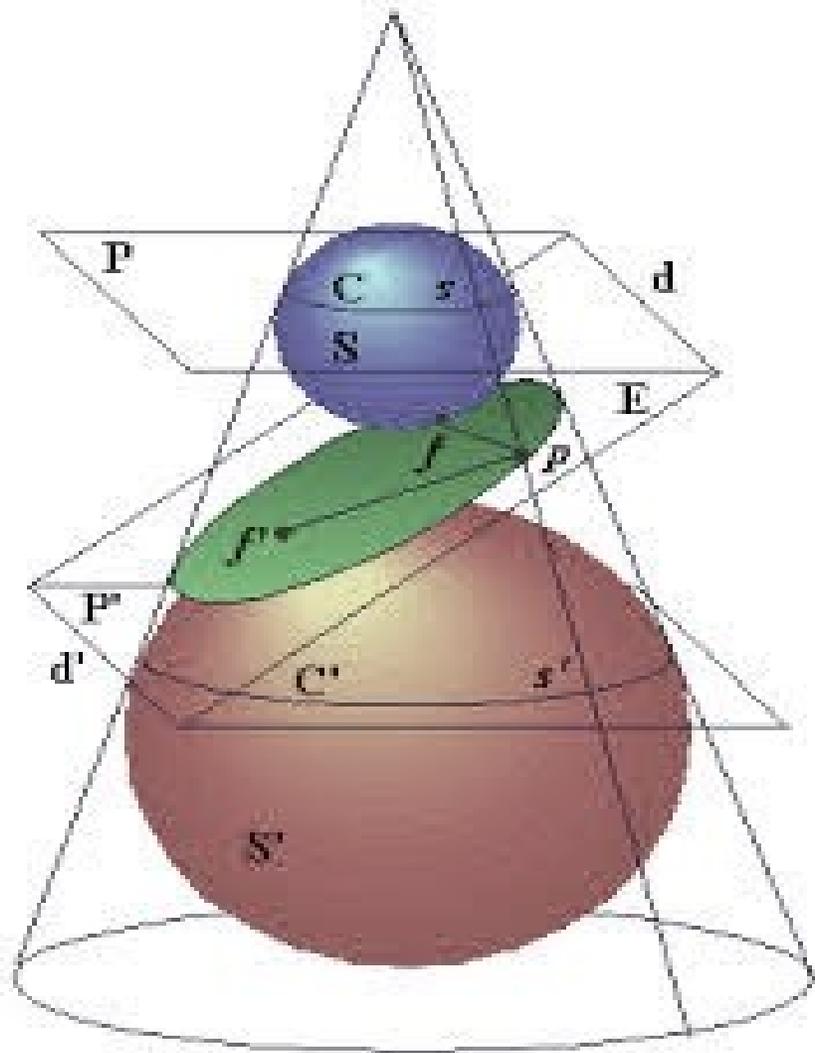


TEOREMA

Una tangente all'ellisse in un suo punto P forma angoli uguali con le rette passanti per P e per ciascuno dei due fuochi.

Se in un fuoco è posta una sorgente luminosa e la 'parete' interna dell'ellisse è rivestita di materiale riflettente, ogni raggio uscente dal fuoco si riflette in un raggio passante per l'altro fuoco dell'ellisse.

Le proprietà focali delle coniche

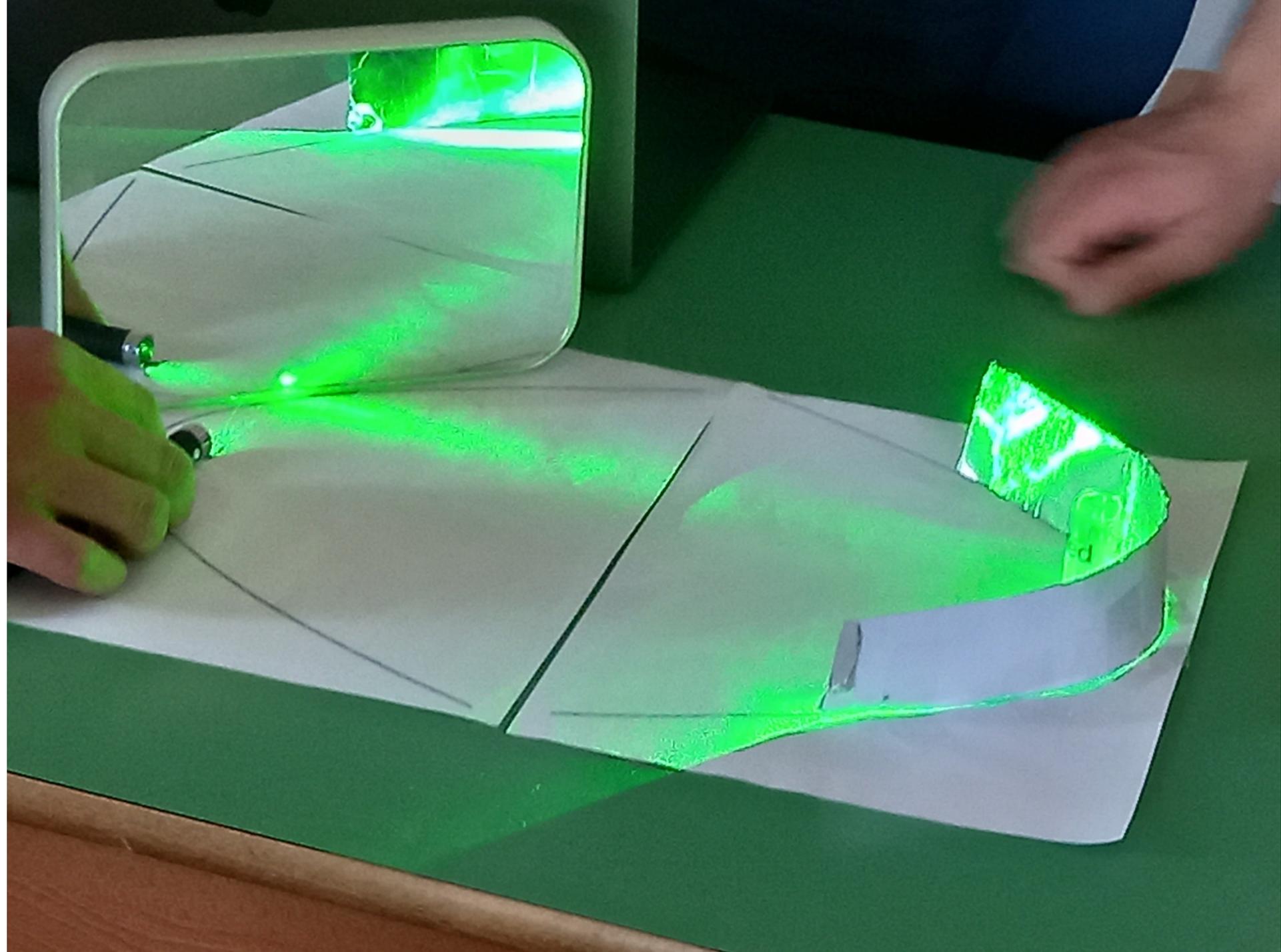


Una sfera di Dandelin è tangente sia al piano sia al cono.

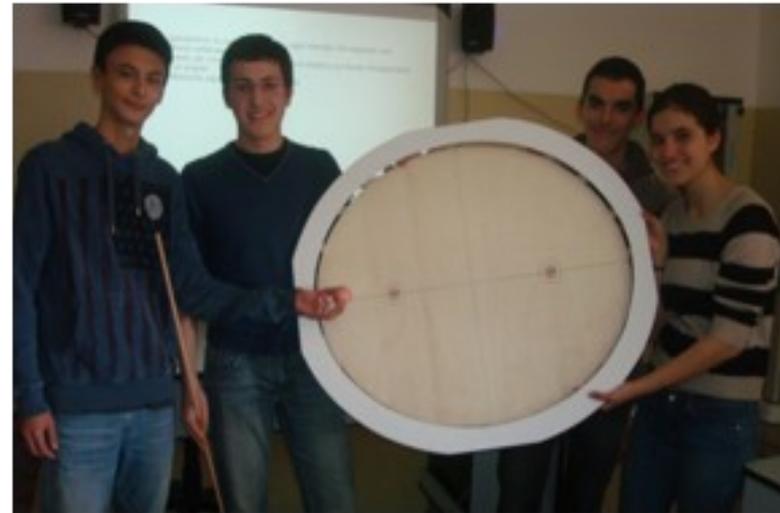
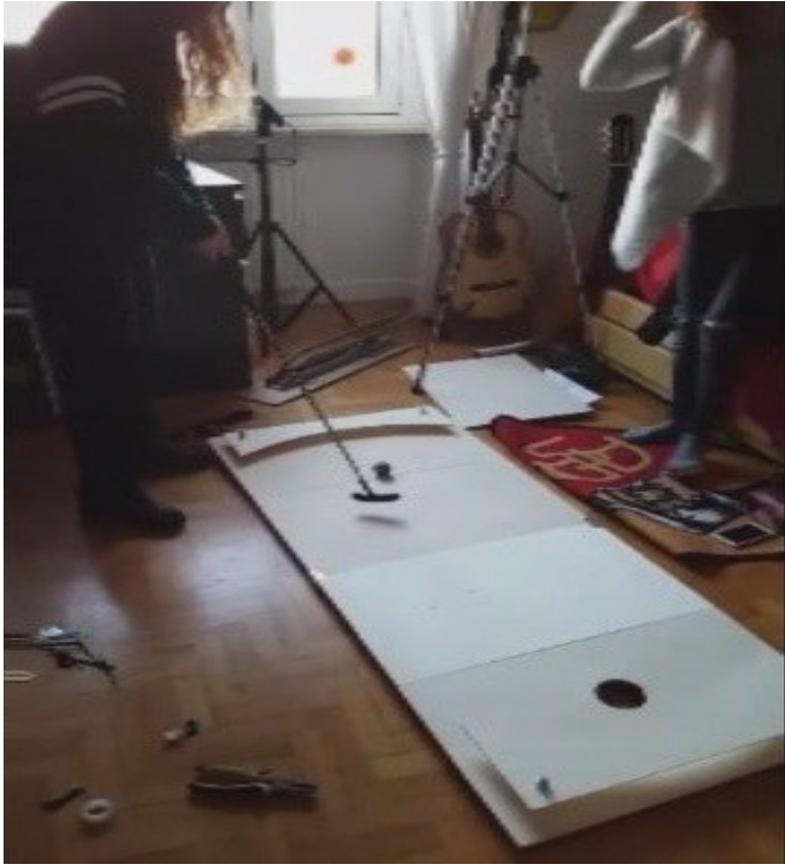
Un'ellisse possiede due sfere di Dandelin, entrambe tangenti alla stessa falda del cono.

Un'iperbole ha due sfere di Dandelin che toccano le falde opposte del cono.

Una parabola possiede una sola sfera di Dandelin nel quale una sfera tocca il piano è un fuoco della sezione conica.



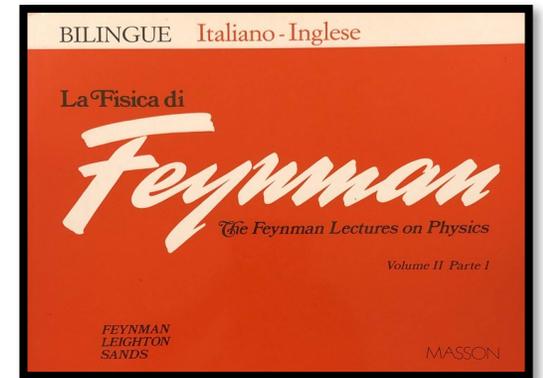
Le proprietà focali delle coniche



Coniche e orbite

- Introduzione storica ai modelli cosmologici dell'universo (modelli geocentrici, eliocentrici e misti; Copernico, Tycho Brahe, Keplero: il problema delle orbite dei pianeti e l'armonia del cosmo).
- Sviluppo della dinamica newtoniana.
- Orbite ellittiche e leggi di Keplero (velocità orbitale, conservazione del momento angolare, piano orbitale, proprietà del perielio).
- Un esempio di interpolazione di dati astronomici: la terza legge di Keplero (con Geogebra ed Excel).
- Una dimostrazione elementare dell'ellitticità di un'orbita (con Geogebra).
- Orbite iperboliche e paraboliche (con Geogebra).

Orbite: una sintesi estrema



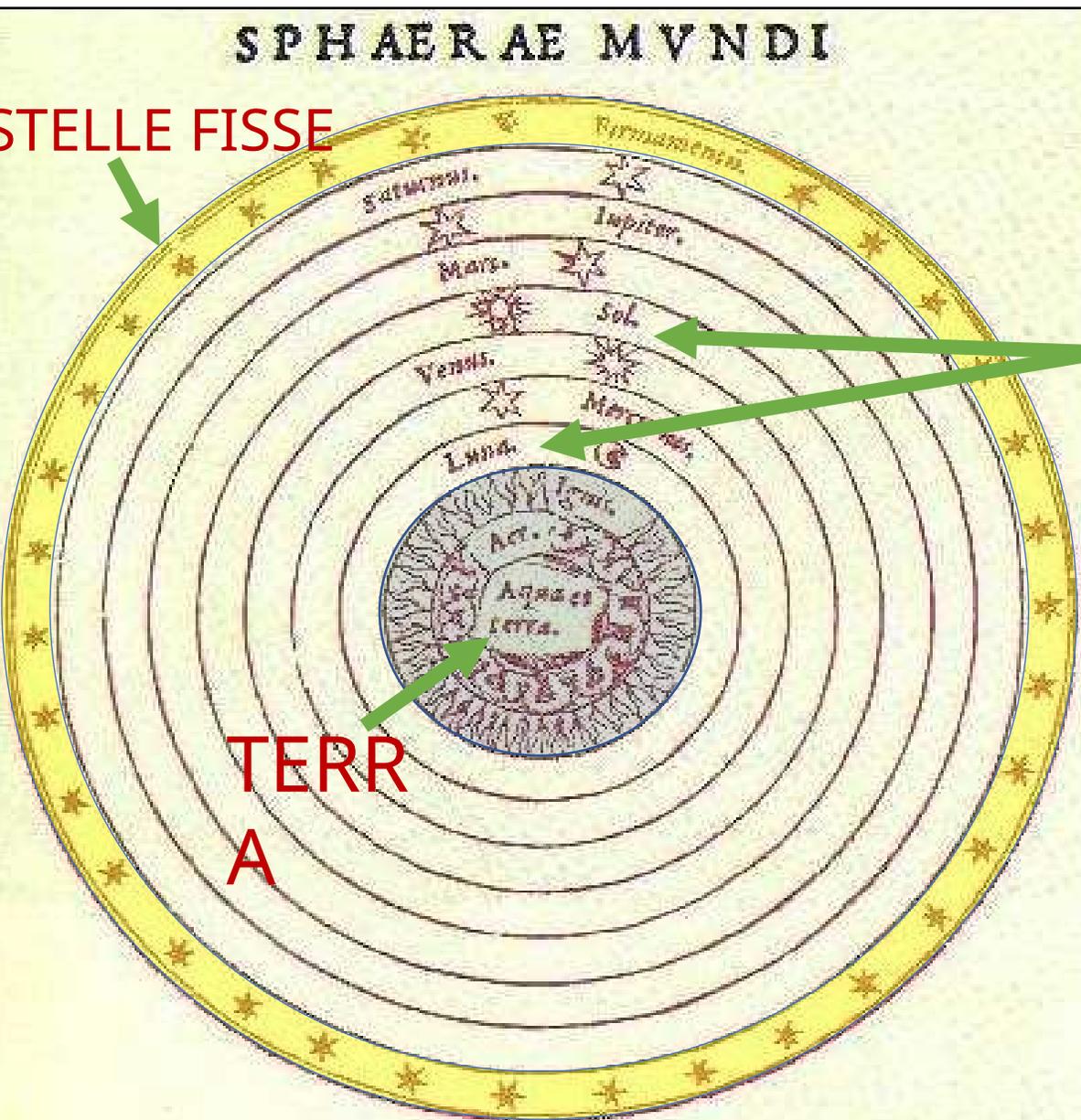
- Nelle famose «Lectures», P.R. Feynman scrive:

«La storia inizia con le **osservazioni degli antichi** sui moti dei **pianeti** fra le stelle ed infine con la deduzione che essi **giravano intorno al Sole**, un fatto che fu **riscoperto** più tardi da **Copernico**. Un po' più di lavoro richiese la **scoperta** di come i pianeti girassero esattamente intorno al Sole ed **esattamente con quale moto**».

P. R. Feynmann, *La Fisica di Feynmann*, vol. 1,
cap. 7-1

- Il problema di descrivere «esattamente» le traiettorie dei pianeti porta a riconoscere le **relazioni fra le orbite dei pianeti (e dei corpi celesti) e le coniche**.

I pianeti nell'antichità ... e oggi



Per gli antichi greci i **pianeti** (*planètes*) erano le **stelle erranti**, cioè le stelle in movimento rispetto alle **stelle fisse**.

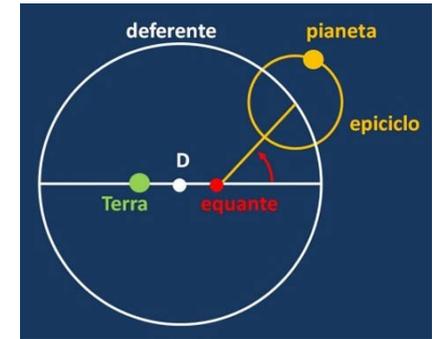
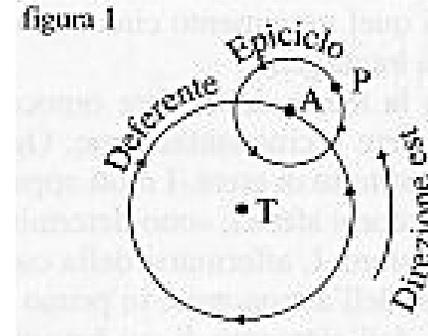
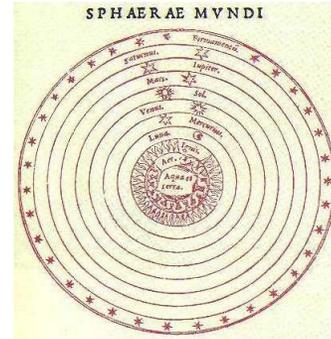
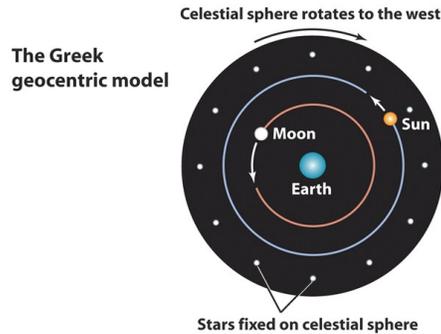
Anche la LUNA e il SOLE erano pianeti...



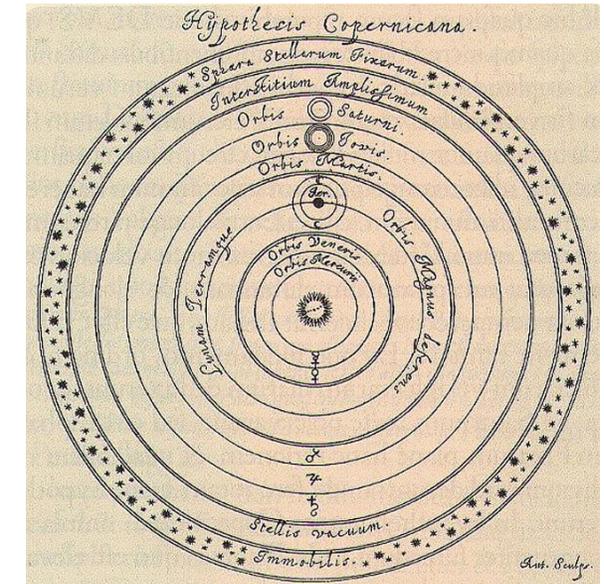
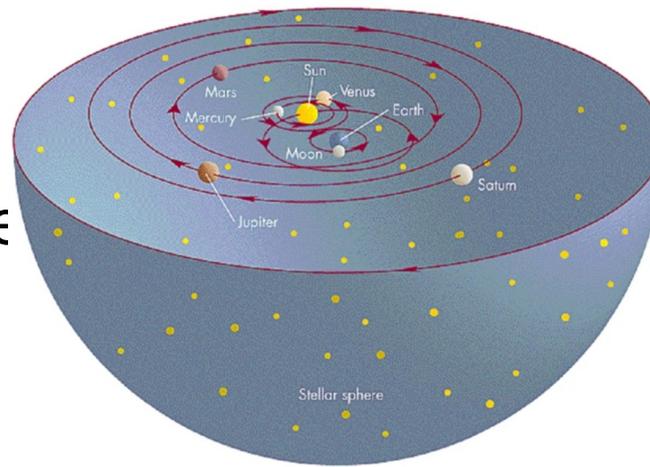
Nel **Sistema Solare** i pianeti sono 8. Il termine «**pianeta**» ha assunto un significato diverso.

Modelli cosmologici

- **Modelli geocentrici** (Platone, Eudosso, Aristotele, Apollonio, Ipparco, Tolomeo)



- **Modelli misti**
(Eraclide Pontico, Tycho Brahe)



- **Modelli eliocentrici** (Aristarco di Samo, Copernico)

Il problema delle orbite

AGLI INIZI DEL XV SECOLO

- **Dibattito** se i pianeti ruotassero o meno intorno al Sole.

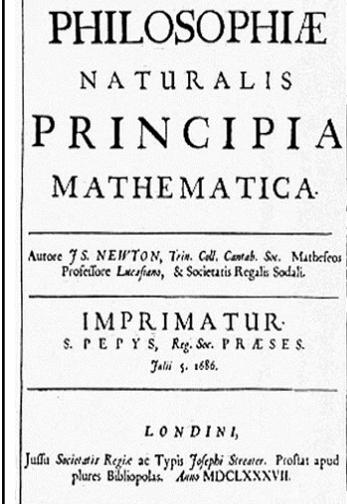
NEL XVI SECOLO

- L'idea rivoluzionaria di **Tycho Brahe (1546 -1601)**: per risolvere le controversie sul **moto dei pianeti bisogna misurarne con precisione la loro posizione nel cielo**. Per vent'anni (1580-1600), presso l'Osservatorio Uraniborg di Hven (Danimarca), T.B. raccoglie una mole di dati astronomici senza l'ausilio di telescopi.



NEL XVI SECOLO

- 1609: Johannes Kepler (1571-1630) formula **le prime due leggi** dei moti planetari (*Astronomia Nova*) elaborando le osservazioni di Tycho B.
- 1618: **Terza legge di Keplero** (*I cinque libri della scienza dell'armonia del mondo*).
- 1688: Isaac Newton (1642 – 1727) dimostra nei *Principia* l'ellitticità delle orbite dei pianeti.

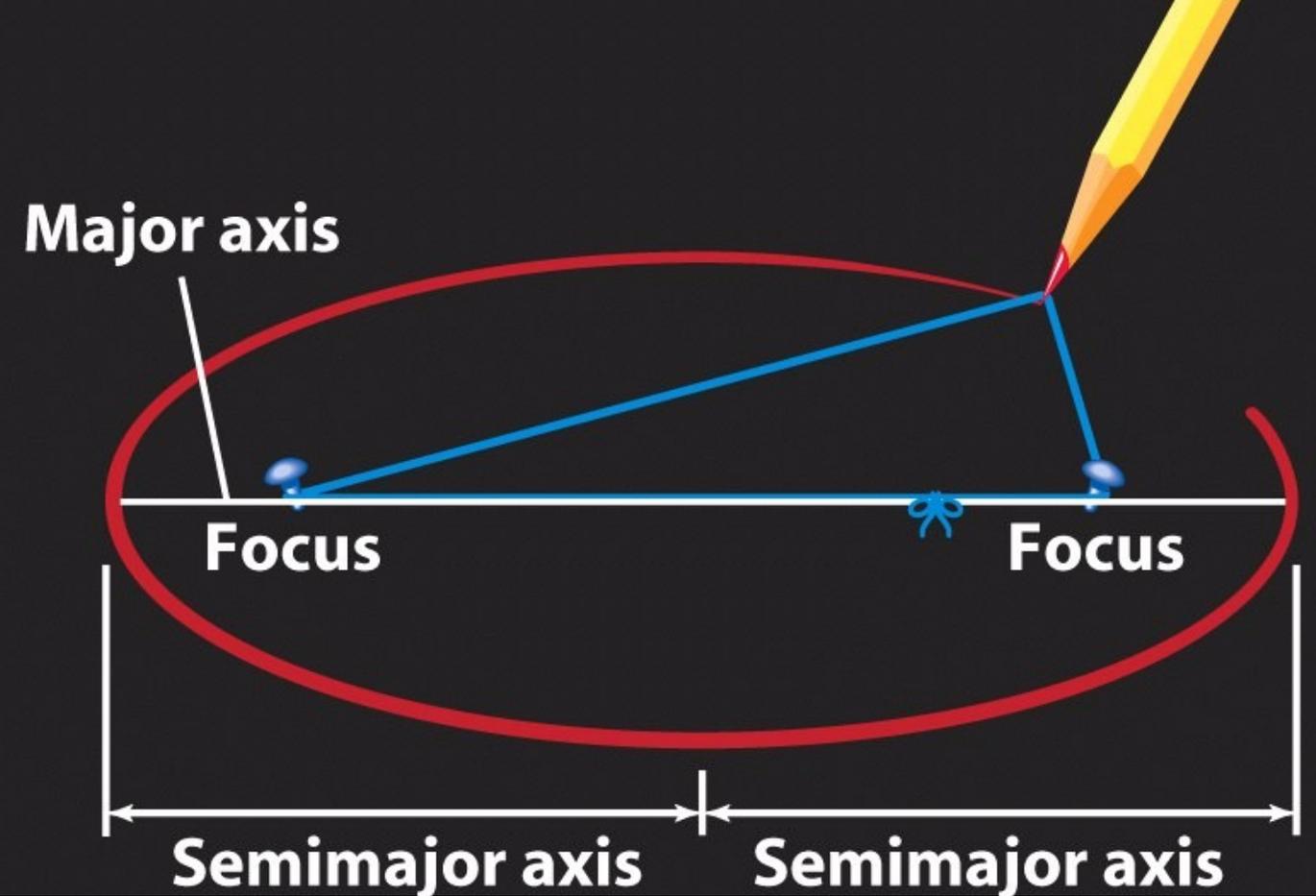


• NELLA DIDATTICA DI OGGI

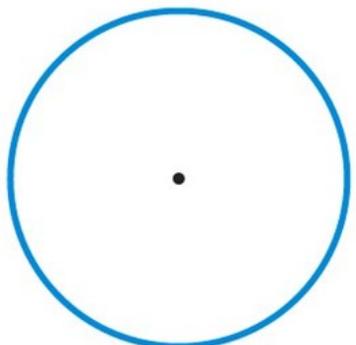
- ❖ Nei CdL in fisica, matematica, ... , dimostrazioni rigorose con equazioni differenziali.

Prima legge di Keplero

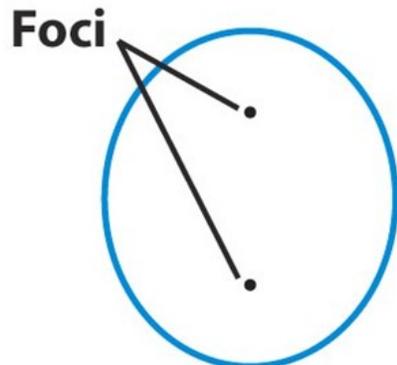
Ogni pianeta si muove intorno al Sole su un'ellisse di cui il Sole occupa uno dei due fuochi.



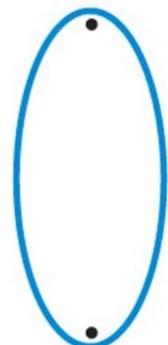
(a)



(b) $e = 0$



$e = 0.50$



$e = 0.90$

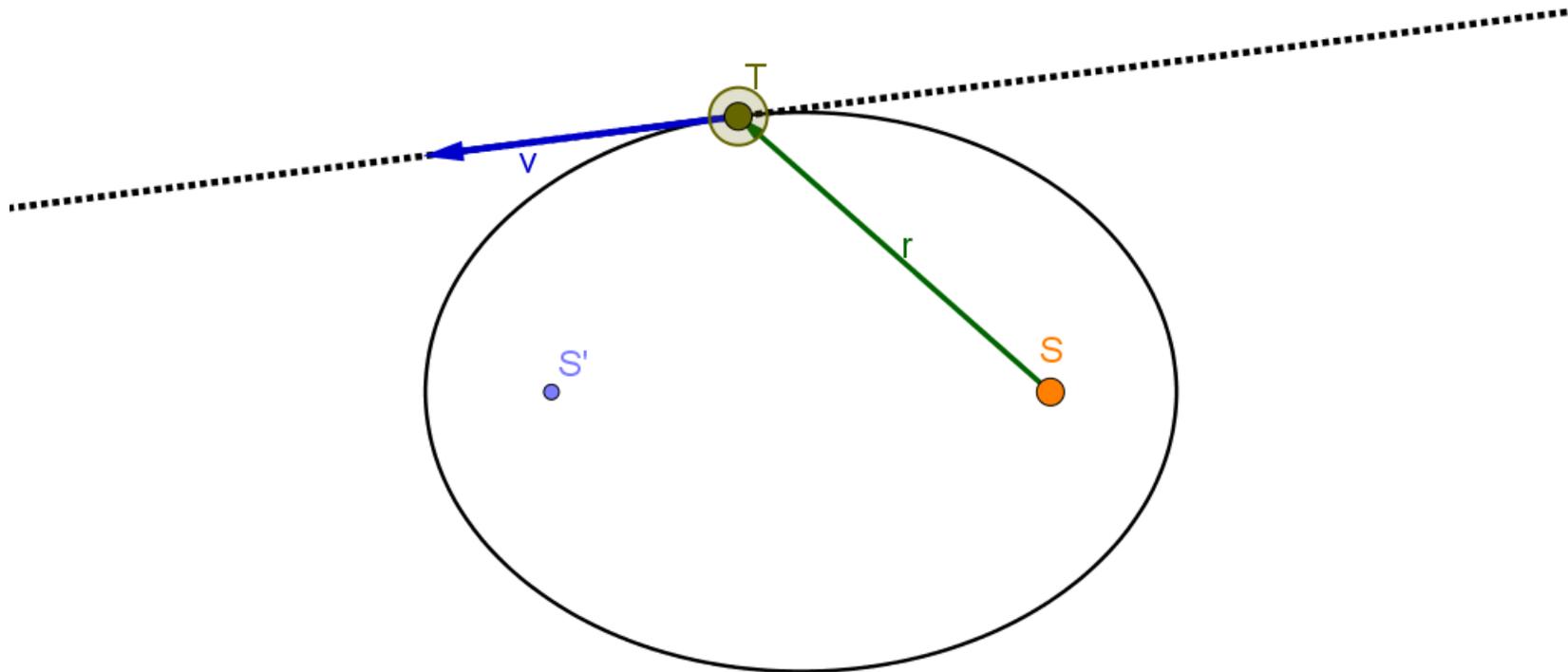


$e = 0.99$

Kepler, J. (1609). *Astronomia Nova*.

Il piano orbitale

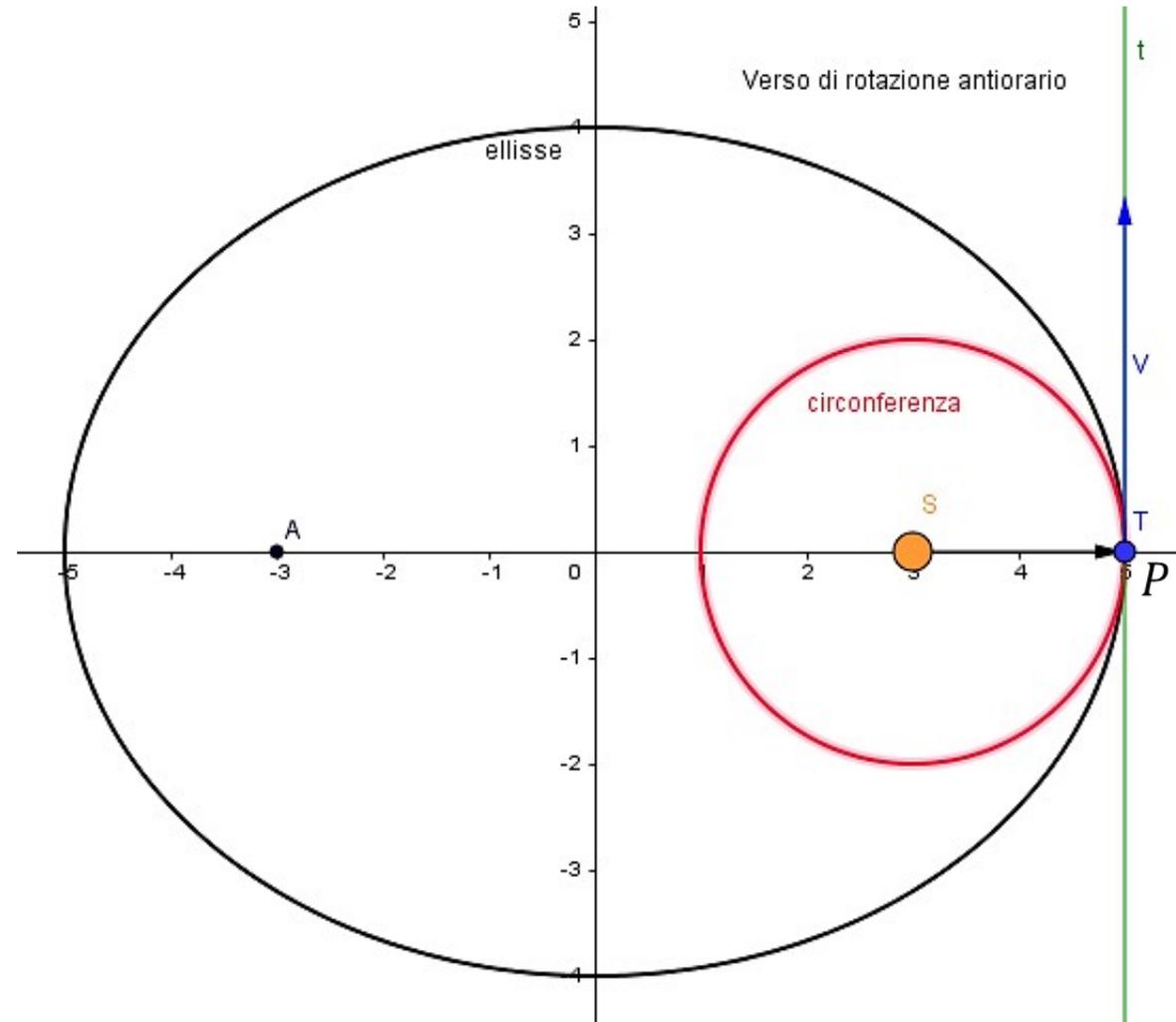
- La Terra e il Sole sono immersi in uno spazio tridimensionale ma l'orbita della Terra non è una curva dello spazio: è una curva piana.
- Si può dimostrare che **la traiettoria orbitale di un pianeta è un'orbita completamente piana.**



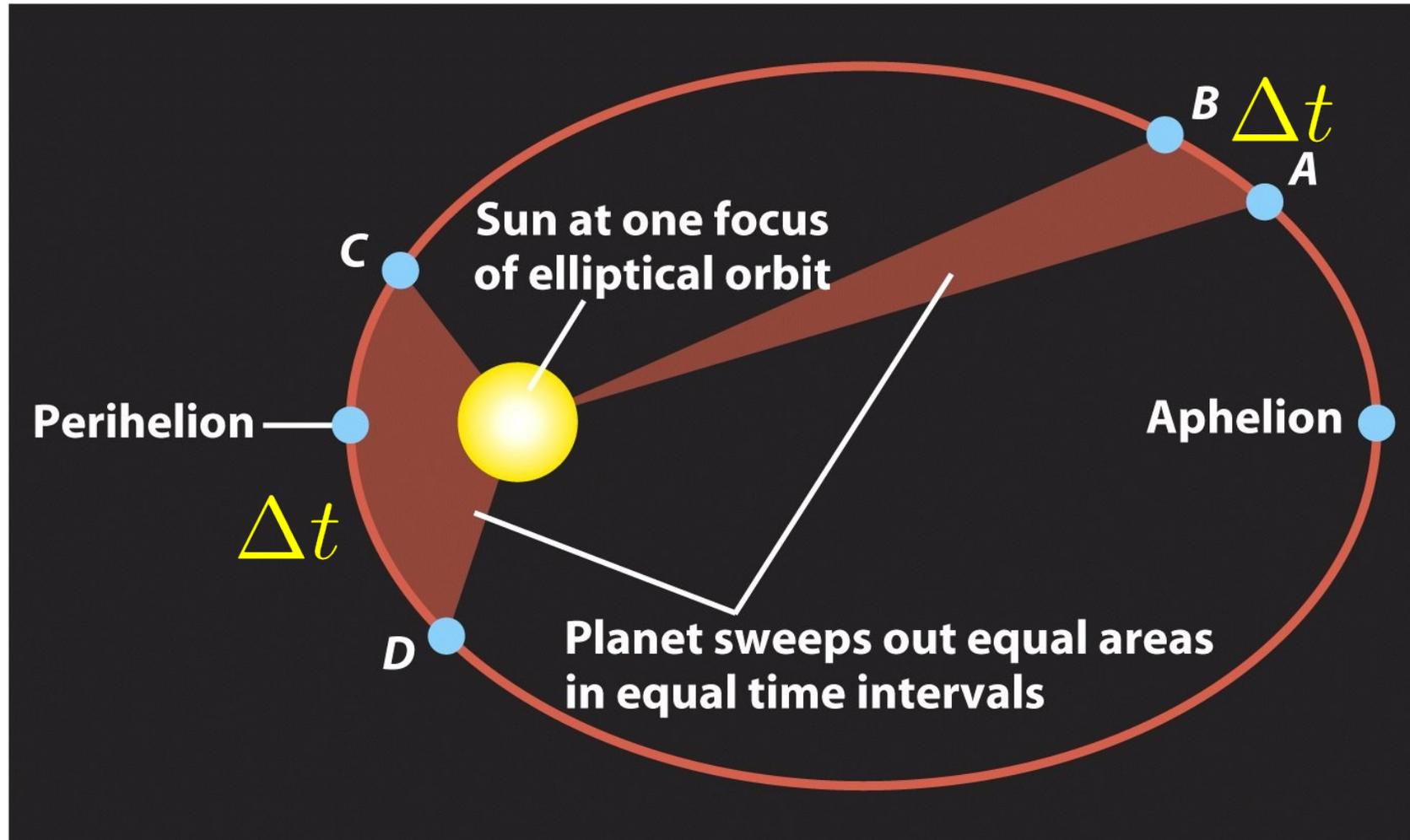
Orbite ellittiche: una proprietà del perielio

In perielio, la velocità del pianeta è perpendicolare al raggio vettore sole-pianeta.

- **Perielio:** punto P di minima distanza ST .
- In P , la circonferenza di raggio ST interseca l'ellisse: **ellisse e circonferenza sono tangenti**.
- In P , **circonferenza e ellisse** hanno una **tangente comune t** .
- In P , la tangente t è **perpendicolare** al raggio della circonferenza, quindi **al raggio vettore ST** .
- In P , il vettore **velocità** del pianeta (giacendo sulla tangente t) è **perpendicolare al raggio vettore ST** .



Seconda legge di Keplero



Il raggio vettore dal sole al pianeta spazza aree uguali in intervalli di tempo uguali

Conservazione del momento angolare

Dimostriamo che l'equivalenza delle aree (v. figura) implica la conservazione del momento angolare.

Supponiamo adesso di dover disegnare la traiettoria descritta dal corpo e di approssimarla con una spezzata, immaginando che esso si muova di moto rettilineo uniforme per piccoli intervalli di tempo Δt e che venga poi improvvisamente deviato verso il Sole dalla forza attrattiva al termine di ogni intervallino (figura 4.1). Il corpo percorrerà la spezzata $T_1T_2T_3T_4$, composta da segmenti di retta.

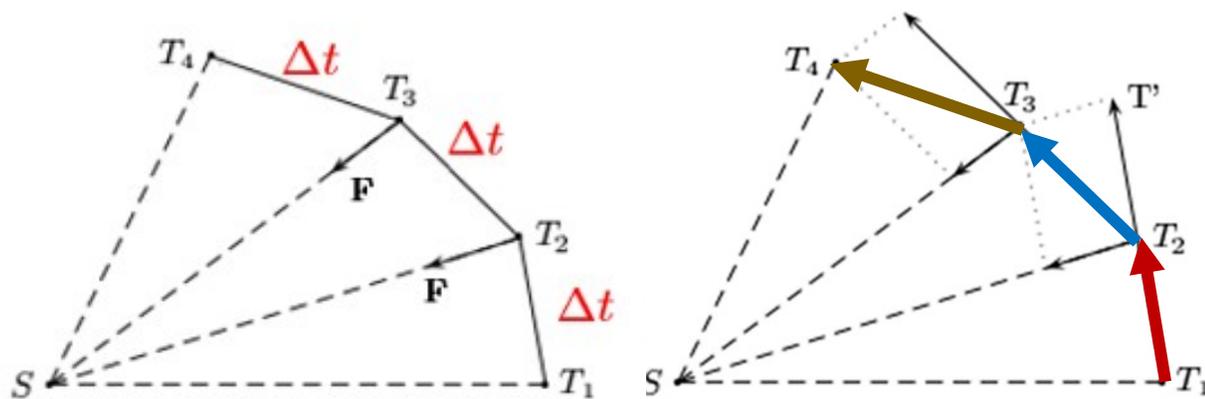
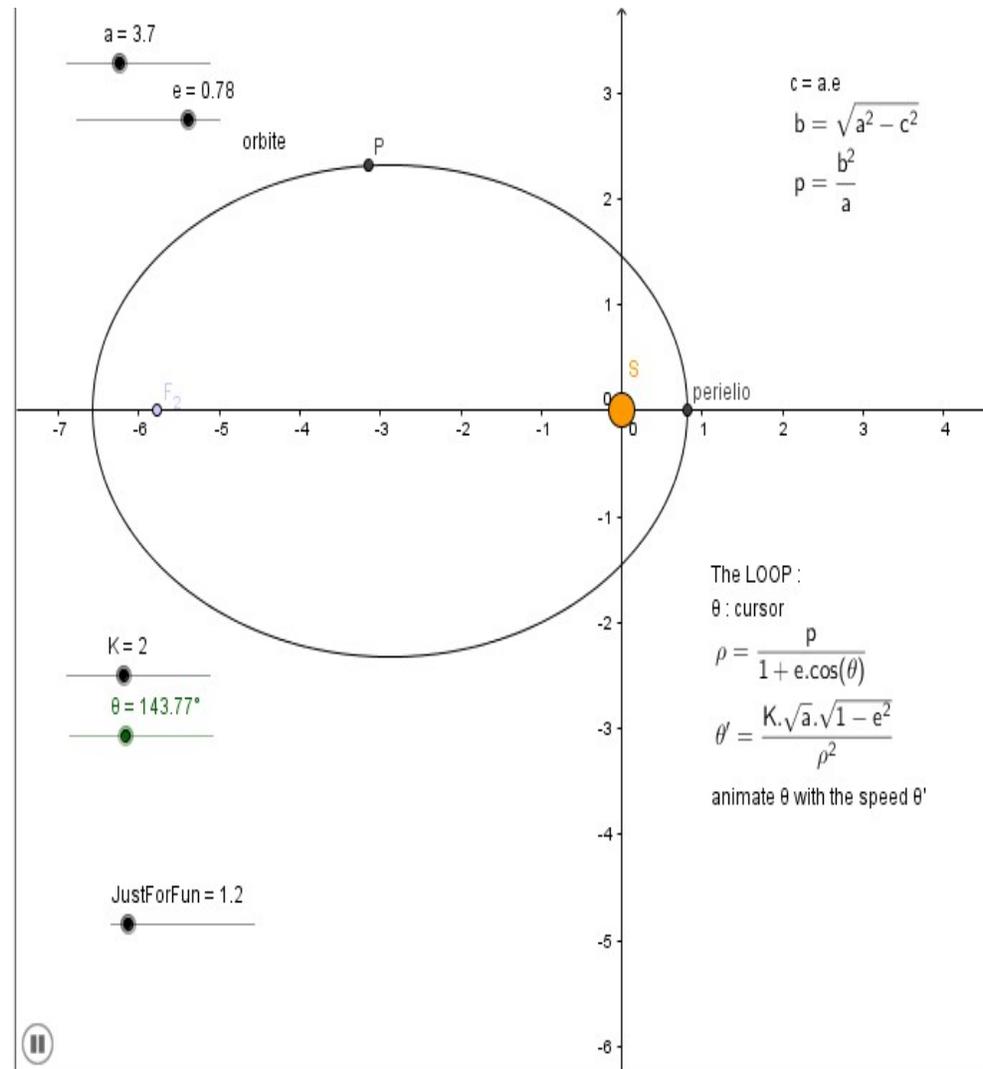


Figura 4.1: Una spezzata approssimante la traiettoria

Assunzioni:

- La traiettoria del corpo è la spezzata $T_1T_2T_3T_4$
- MRU in T_1T_2, T_2T_3, \dots
- Forza attrattiva solo a fine intervallo (deviazione dalla retta)

Velocità orbitali ($v_P > v_A$)



Una conseguenza della conservazione del momento angolare è che la velocità in perielio è maggiore di quella in afelio.

Infatti:

$$L_A = L_P$$

$$m v_P r_P = m v_A r_A$$

$\rightarrow v \perp r$

per cui

$$\frac{v_P}{v_A} = \frac{r_A}{r_P}$$

Ma poiché $\frac{r_A}{r_P} > 1$, segue che $\frac{v_P}{v_A} > 1$, $v_P > v_A$.

Terza legge di Keplero: i dati astronomici

table 4-3

A Demonstration of Kepler's Third Law ($P^2 = a^3$)

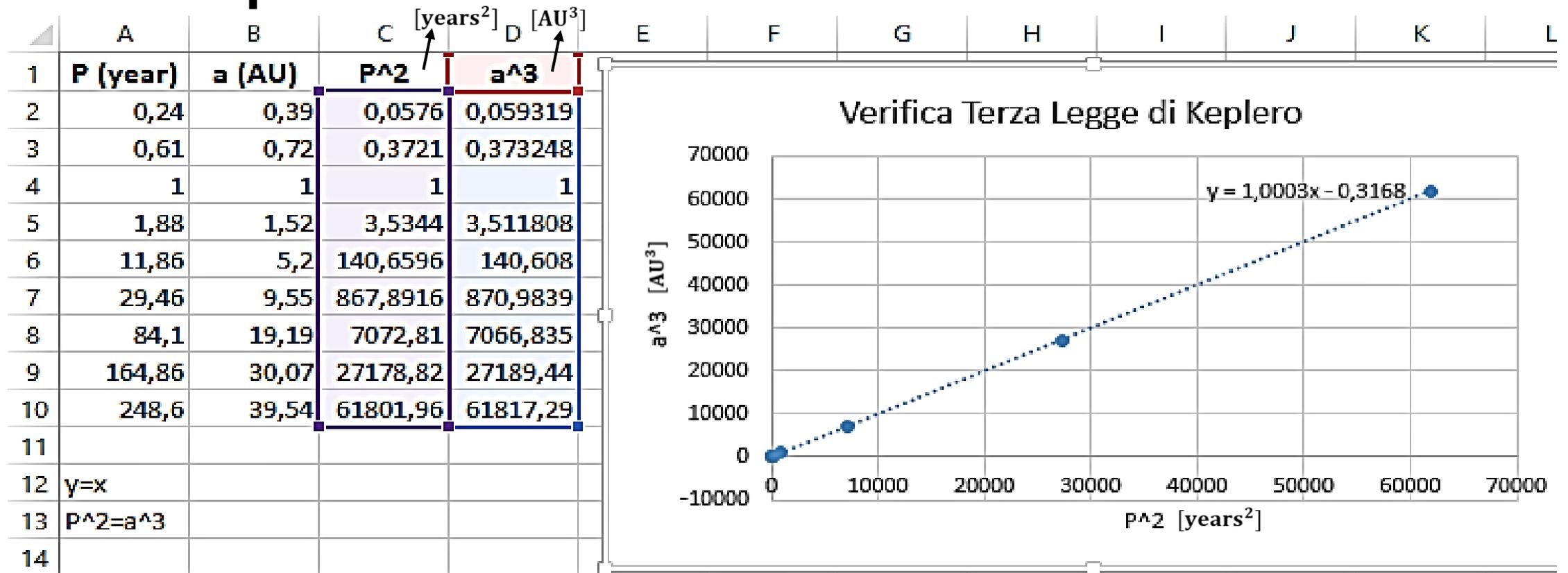
Planet	Sidereal period P (years)	Semimajor axis a (AU)	P^2	a^3
Mercury	0.24	0.39	0.06	0.06
Venus	0.61	0.72	0.37	0.37
Earth	1.00	1.00	1.00	1.00
Mars	1.88	1.52	3.53	3.51
Jupiter	11.86	5.20	140.7	140.6
Saturn	29.46	9.55	867.9	871.0
Uranus	84.10	19.19	7,072	7,067
Neptune	164.86	30.07	27,180	27,190
Pluto	248.60	39.54	61,800	61,820

$$P^2 = a^3$$

P = planet's sidereal period (in years)
 a = planet's semimajor axis (in AU)

Keplero, J. *L'armonia del mondo*.

Terza legge di Keplero: interpolazione

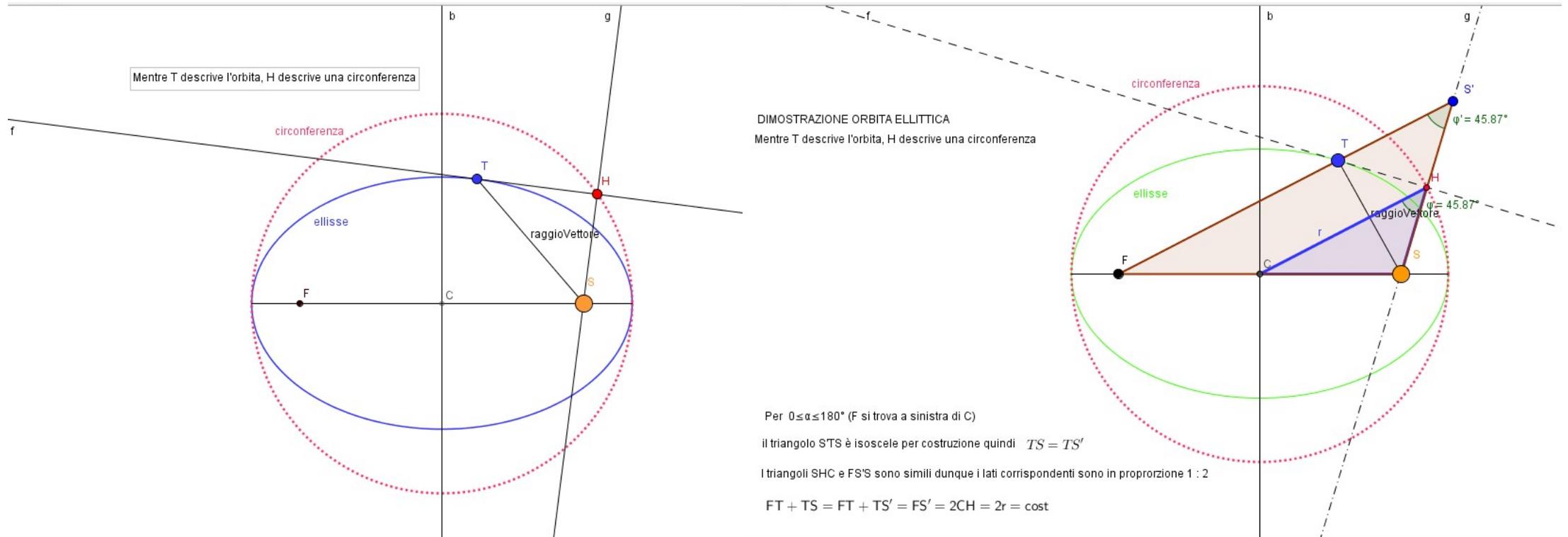


$$P^2 = a^3$$

P = planet's sidereal period [years]

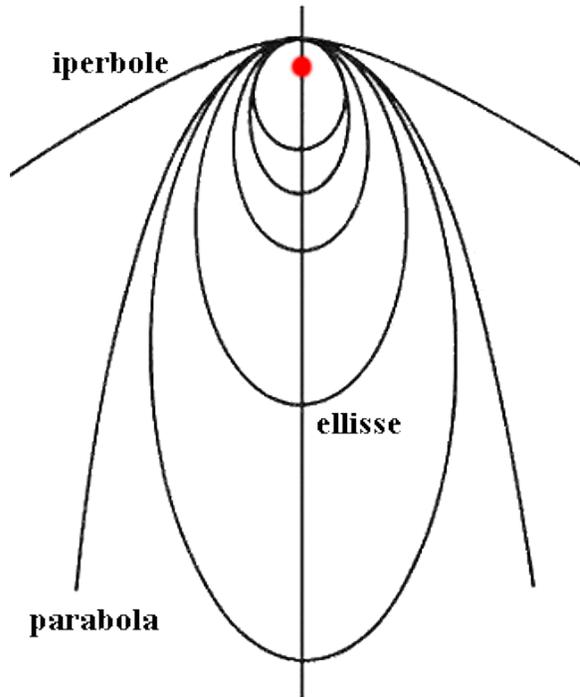
a = planet's semimajor axis [AU]

Dimostrazione dell'ellitticità di un'orbita



Coniche e orbite dei pianeti

Moti planetari (seguendo un suggerimento di Feynman; Newton's Laws of Dynamics <http://www.feynmanlectures.caltech.edu/>)



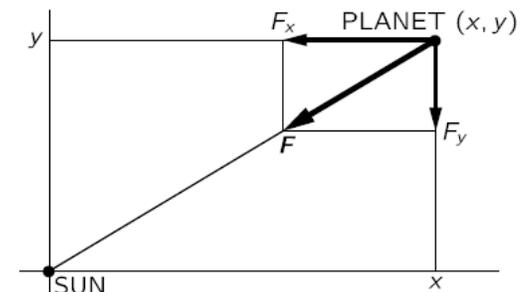
In questa scheda verificherai che l'orbita di un pianeta attorno al Sole richiama una forma ellittica

Sappiamo che il Sole ha una massa molto grande. Supponiamo di non tener conto del suo moto e che un pianeta cominci a muoversi da una posizione iniziale con una certa velocità, compiendo una qualche traiettoria curva attorno al Sole. Con le leggi e la teoria della gravitazione di Newton, analizzeremo il moto di questo ipotetico pianeta.

Che tipo di curva sarà la sua traiettoria?

Ricordare che: due corpi nell'universo si attraggono l'un l'altro con una forza \vec{F} il cui modulo è direttamente proporzionale al prodotto delle loro masse e inversamente proporzionale al quadrato della distanza r che separa i loro baricentri:

$$|\vec{F}| = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2}$$



Quale accelerazione sarà prodotta da questa forza?

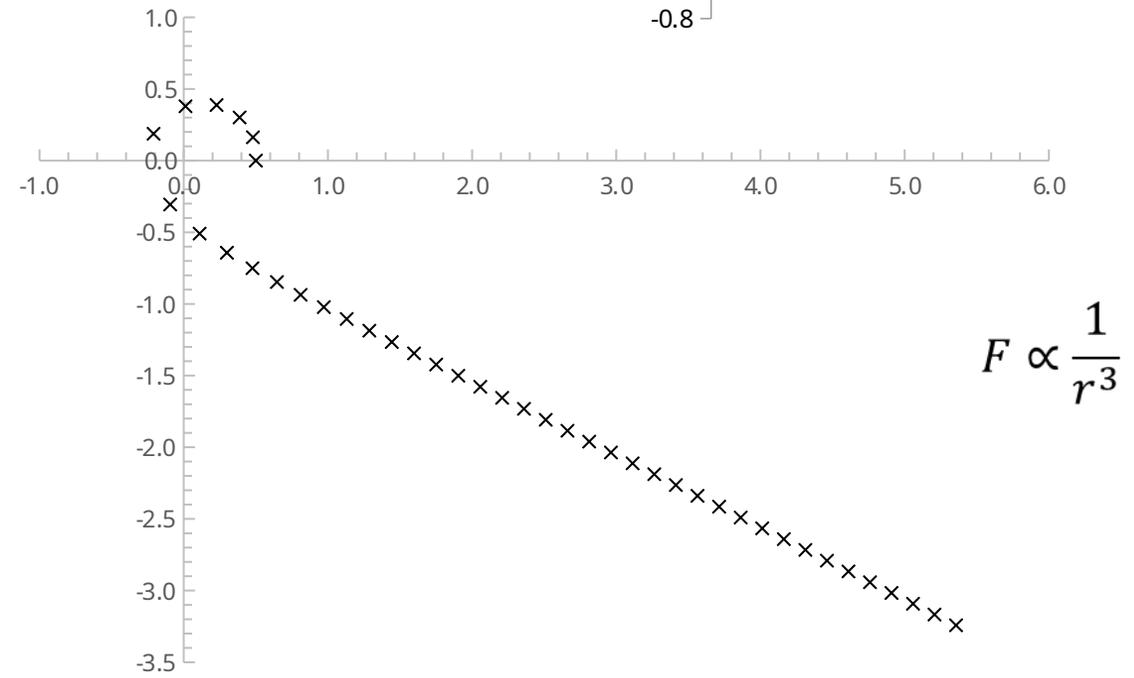
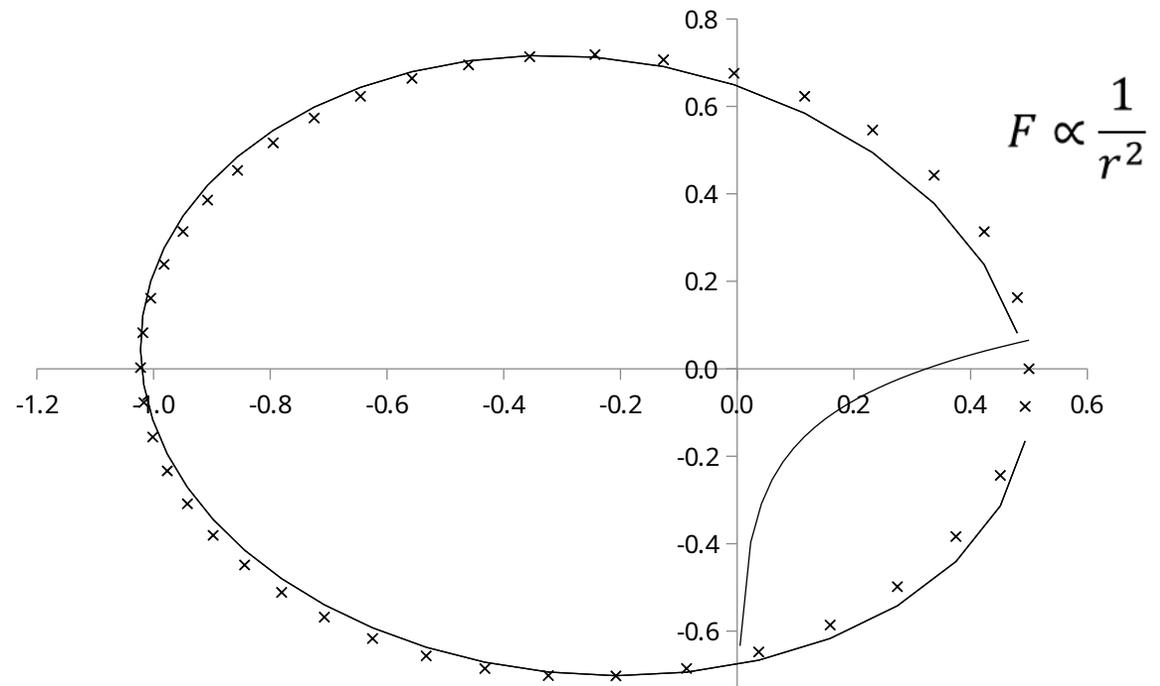
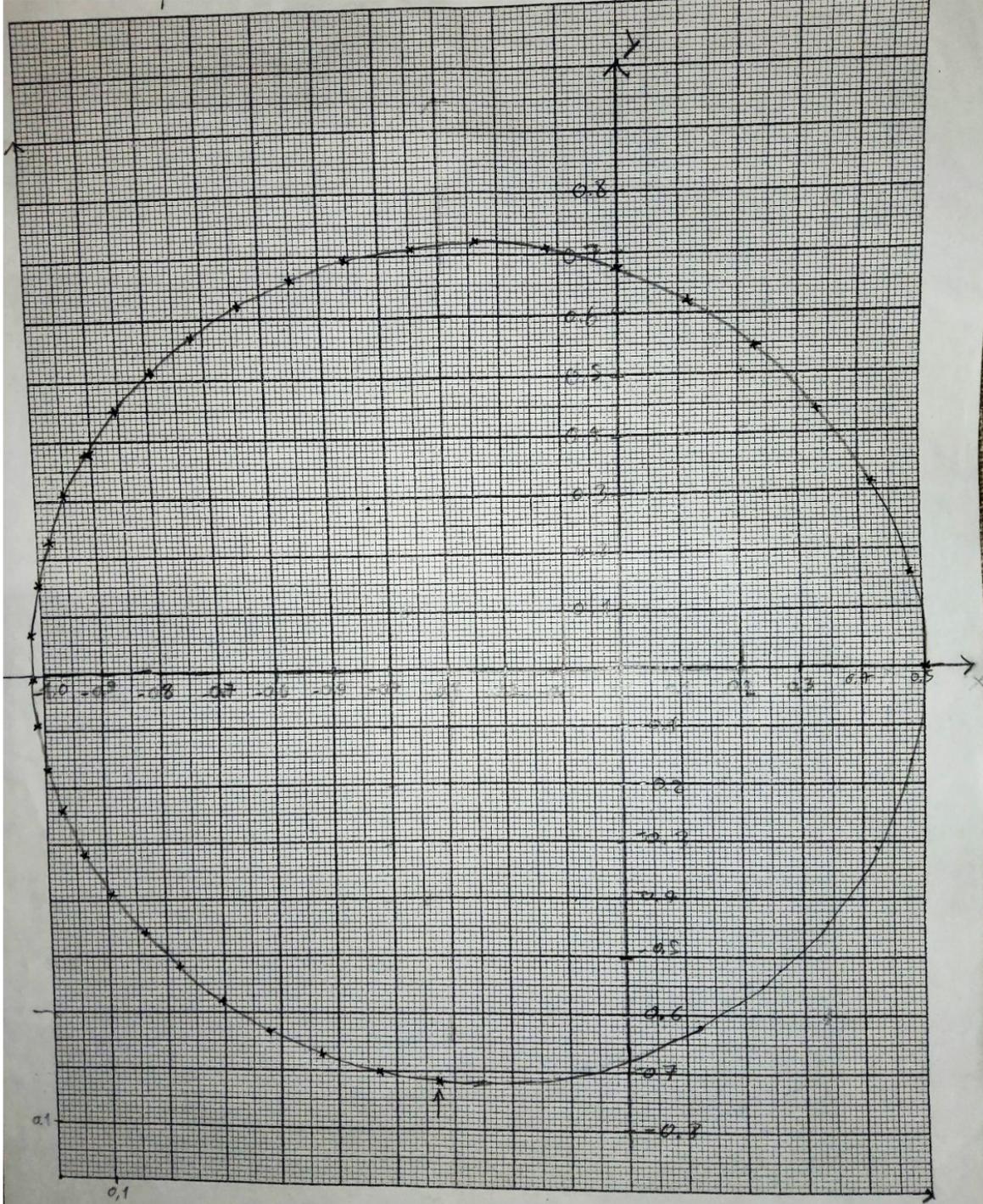
Ora, dato un istante t_0 , possiamo esprimere la posizione e la velocità all'istante $t_0 + \varepsilon$ con un'approssimazione molto buona, se ε è molto piccolo, in termini della posizione e della velocità all'istante t_0 :

$$x(t_0 + \varepsilon) = x(t_0) + v_x(t_0) \cdot \varepsilon \qquad y(t_0 + \varepsilon) = y(t_0) + v_y(t_0) \cdot \varepsilon$$

$$v_x(t_0 + \varepsilon) = v_x(t_0) + a_x(t_0) \cdot \varepsilon = v_x(t_0) - \frac{x(t_0)}{r^3} \cdot \varepsilon$$

$$v_y(t_0 + \varepsilon) = v_y(t_0) + a_y(t_0) \cdot \varepsilon = v_y(t_0) - \frac{y(t_0)}{r^3} \cdot \varepsilon$$

Per avere un numero di dati sufficientemente significativo, dovremmo prendere il tempuscolo ε molto, molto piccolo, per esempio $\varepsilon = 0,01$, o anche meno, ma questo comporterebbe numerosi cicli di calcoli. Ecco allora un modo di procedere che tiene conto di un ε abbastanza piccolo ma non troppo da indurci a un numero eccessivo di calcoli e che migliora la nostra prima analisi.



Riferimenti bibliografici

- P. R. Feynmann , La fisica di Feynmann (vol. 1). Meccanica, radiazione calore. Zanichelli.
<http://www.feynmanlectures.caltech.edu/>
- L. Gariboldi (a cura di), Copernico. Rivoluzione nel cielo, Grandangolo Scienza - Corriere della Sera, 2017
- G. Parravicini (a cura di), Galileo. La scienza dal dogma all'esperimento, Grandangolo Scienza - Corriere della Sera, 2017
- A. M. Lombardi (a cura di), Keplero. Il cosmo come armonia di movimenti, Grandangolo Scienza - Corriere della Sera, 2017
- F. Poloni, Una dimostrazione elementare dell'ellitticità delle orbite. <http://www.di.unipi.it/~fpoloni/study/files/ellissi.pdf>
- <http://www.yorku.ca/bwall/nats1730/powerpoint/13-tychoandkepler.ppt>
- <http://physics.gmu.edu/~hgeller/astr111/ch04.ppt>
- http://www.niu.edu/~mfortner/PHYS253/Part%204%20Circles/p253_04l.ppt
- <http://www.mogi-vice.com/Pagine/Scaricamento.html>
- <http://Inx.classicoscaduto.it/w3/wp-content/uploads/2014/11/La-storia-dei-modelli-cosmologici.pdf>