Lucio Boccardo

Minimizzazione di funzionali integrali ed equazioni ellittiche con termini di ordine inferiori a crescita naturale

(Corso per il dottorato 2017)
Il corso sarà autocontenuto, seguendo le linee seguenti.

È noto dai "classici" ed è facile vedere che funzionali integrali (sotto ipotesi "classiche") come questo

$$I(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega a(x,v)|\nabla v|^2 - \int_\Omega f(x)v(x), \tag{1}$$

ammettono minimo in $W_0^{1,2}(\Omega)$, Ω aperto di $I\!R^N$, ma non sono Gateaux-differenziabili: ammettono solo derivate lungo le direzioni $W_0^{1,2}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$. Pertanto la equazione di Euler-Lagrange

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(a(x,u)\nabla u) + \frac{1}{2}a'(x,u)|\nabla u|^2 = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

ha questo significato (in forma debole, $\forall\ v \in W_0^{1,2}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$)

$$u \in W_0^{1,2}(\Omega) : \int_\Omega a(x,u)\nabla u \nabla v + \frac{1}{2}\int_\Omega a'(x,u)|\nabla u|^2\, v = \int_\Omega f\, v.$$

Motivato dal Calcolo delle Variazioni, sorge spontaneo l'interesse allo studio (esistenza di soluzioni e loro proprietà) di problemi di Dirichlet, non necessariamente variazionali, del tipo

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(a(x,u)\nabla u) + b(x,u)|\nabla u|^2 = f(x) & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega, \end{cases}$$

o piú generali, avendo, in prima istanza, ambiente $W_0^{1,2}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$. La crescita quadratica rispetto al gradiente del termine di ordine inferiore è detta anche naturale, per il legame col Calcolo delle Variazioni appena visto.

Un altro spunto è dato dai funzionali J, sottoclasse di I, con

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega [A(x) + |v|^r]|\nabla v|^2 - \int_\Omega f(x)v(x)$$

(o piú generali) che hanno equazione di Euler-Lagrange

$$\int_\Omega [A(x) + |u|^r]\nabla u \nabla v + \frac{r}{2}\int_\Omega u|u|^{r-2}|\nabla u|^2\, v = \int_\Omega f\, v,\ \forall\, v \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega). \tag{2}$$

Osservazioni:

- difficoltà ulteriori sono: la non limitatezza rispetto a $|u|$ della parte principale e del termine di ordine inferiore;
- lato positivo: l'effetto "regolarizzante" che permette di trattare anche termini noti molto irregolari; possibilità di soluzioni non limitate;
- caso $0 < r < 1$, che rende singolare il termine di ordine inferiore.

Prerequisiti:

- nozioni essenziali di Analisi Reale e Analisi Funzionale,
- definizione e proprietà basiche degli spazi di Sobolev $W^{1,2}$ $(W^{1,p})$,
- Teorema di punto fisso di Schauder.