Esperienze di Laboratorio sul Calcolo Infinitesimale
Seminario per gli insegnanti, 13 gennaio 2022

Annalisa Malusa e Alessandro Gambini
Gualtiero Grassucci
Donatella Ricalzone e Noemi Stivali
Giuliana Massotti, Silvia Perini e Anna Rita Petrillo

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Ghigliottina da Liceo Matematico

Achille

Potenza

Dante

Somma

Nepero

Quali sono le due parole misteriose?

Progressione geometrica

$$G_n(x) := 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n = \sum_{k=0}^{n} x^k \qquad n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}\,.$$

Ricordiamo che

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \neq 1\,.$$

Infatti

$$(1-x)\sum_{k=0}^{n} x^k = \sum_{k=0}^{n} x^k - \sum_{k=0}^{n} x^{k+1} = 1 + \sum_{k=1}^{n} x^k - \sum_{j=1}^{n} x^j - x^{n+1} = 1 - x^{n+1}.$$

Quindi

$$\lim_{n\to+\infty} G_n(x) = \frac{1}{1-x}, \qquad \forall x \in (0,1) \qquad \text{(serie geometrica)}.$$

Achille e la tartaruga

- V_A e V_T velocità di Achille e della tartaruga (che si muovono di moto rettilineo uniforme);
- L_0 vantaggio che Achille lascia alla tartaruga alla partenza;

Prima frazione temporale:

$t_0 = \dfrac{L_0}{V_A}$ tempo impiegato da Achille per arrivare in L_0 e

$L_1 = V_T t_0 = L_0 \dfrac{V_T}{V_A}$ posizione raggiunta dalla tartaruga al tempo t_0.

Seconda frazione temporale:

$t_1 = \dfrac{L_1}{V_A} = \dfrac{V_T}{V_A^2} L_0$ tempo impiegato da Achille per arrivare in L_1 e

$L_2 = V_T t_1 = \left(\dfrac{V_T}{V_A}\right)^2 L_0$ contemporaneo spostamento della tartaruga

Achille e la tartaruga

n–esima frazione temporale

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} L_k = L_0 \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{V_T}{V_A}\right)^k \quad \text{spazio percorso da Achille}$$

$$L_{n+1} = \left(\frac{V_T}{V_A}\right)^{n+1} \quad \text{vantaggio della tartaruga}$$

Con un numero finito di passi la tartaruga è irraggiungibile, ma, visto che $V_A > V_T$, se $n \to +\infty$

$$L_{n+1} = \left(\frac{V_T}{V_A}\right)^{n+1} \to 0$$

$$S_n = L_0 \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{V_T}{V_A}\right)^k = L_0 \frac{1 - \left(\frac{V_T}{V_A}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{V_T}{V_A}\right)} \to \frac{L_0}{1 - \left(\frac{V_T}{V_A}\right)} = \underbrace{\frac{L_0}{V_A - V_T}}_{\text{tempo di cattura}} V_A$$

Achille e la tartaruga

Morale: abbiamo suddiviso un intervallo temporale FINITO in INFINITI sottointervalli. Non sempre aggiungere indefinitamente quantità positive fa divergere la sommatoria.

Nota: potevamo arrivare alla stessa conclusione con strumenti elementari della fisica. Infatti, il tempo di cattura τ deve soddisfare

$$\tau V_A = L_0 + \tau V_T \qquad \Longrightarrow \qquad \tau = \frac{L_0}{V_A - V_T}.$$

Ad esempio, se $L_0 = 10\ m$, $V_A = 10\ m/s$, $V_T = 1\ m/s$, la tartaruga viene raggiunta dopo $10/9 \sim 1.1$ secondi.

La moltitudine degli angeli (Paradiso, XXVIII, 88-96)

E poi che le parole sue restaro,
non altrimenti ferro disfavilla
che bolle, come i cerchi sfavillaro.

L'incendio suo seguiva ogne scintilla;
ed eran tante, che 'l numero loro
più che 'l doppiar de li scacchi s'inmilla.

Io sentiva osannar di coro in coro
al punto fisso che li tiene a li ubi,
e terrà sempre, ne' quai sempre fuoro.

Dal IX cielo Dante e Beatrice vedono la luce puntiforme di Dio, circondata dai cori angelici, formati da anelli luminosi. Ogni singolo angelo è descritto come una scintilla che ruota attorno a Dio nell'anello assegnatogli per gerarchia celeste. Gli angeli sono una moltitudine, tantissimi, un numero inimmaginabile. Quanti sono gli angeli?

‘l numero loro più che ‘l doppiar de li scacchi s’inmilla

Dante cita una leggenda sull’invenzione del gioco degli scacchi: un ricco Re d’Oriente cercava un gioco in grado di distrarlo e di aprire il suo cuore a nuovi piaceri. Un suo cortigiano (mago? matematico?) di nome Sissa Nassir inventò e gli propose il gioco degli scacchi. Il sovrano si appassionò talmente al gioco da offire a Sissa qualsiasi ricompensa volesse. La risposta fu

“O Re dei Re, prendi la scacchiera che ti ho donato e poni su di essa un chicco di grano nella prima casella, due nella seconda, quattro nella terza, otto nella quarta, e via raddoppiando fino alla sessantaquattresima; metti tutto il grano in un sacco e dammelo.”

Il Re rimase sorpreso da una così misera richiesta e insistette per un più lauto compenso, ma Sissa Nassir inistette e quindi il Sovrano chiese ai contabili di fare il conto.

‘l numero loro più che ‘l doppiar de li scacchi s’inmilla

Anche noi sappiamo fare quel conto: progressione geometrica di ragione $x = 2$:

$$G_{63}(2) = \sum_{k=0}^{63} 2^k = 2^{64} - 1 = 1,8447x10^{19}$$

Il Re si infuriò per essere stato raggirato, è un numero enorme!

Per capire l’ordine di grandezza, la superficie del globo terrestre è di circa $5,0995x10^{18}$ cm^2 e quindi, distribuendo uniformemente i chicchi avremo circa 3 chicchi e mezzo per ogni cm^2 di superficie terrestre!

‘l numero loro più che ‘l doppiar de li scacchi s’inmilla

Per Dante, il numero di angeli, più che raddoppiarsi in ogni casella della scacchiera, si inmillano (uno dei tanti neologismi danteschi), ossia il numero degli angeli sarebbe

$$\sum_{k=0}^{63} 1000^k = \frac{1 - 1000^{64}}{1 - 1000} \sim 10^{189}$$

Dante si è rivelato un matematico sopraffino, descrivedo in una terzina un numero (finito) che produce comunque un senso di infinità.

Per farsi un’idea di quanto 10^{189} sia inimmaginabilmente grande, facciamo un confronto con una stima del peso in grammi dell’universo. La nostra Galassia contiene circa 10^{11} stelle. La massa del nostro Sole è $2x10^{33}$ g, che possiamo immaginare come massa stellare media ricavando che la massa (visibile) della nostra Galassia è quindi circa 10^{45} g. Nell’Universo vi sono alcune centinaia di miliardi di galassie il che ci da qualcosa come 10^{57} g di materia.

Irrazionalità del numero di Nepero e

Punto di partenza: definire e attraverso la serie convergente

$$e = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\,, \qquad s_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

L'approssimazione di e con s_n è molto buona anche per n piccoli:

$$s_{10} = \frac{9864101}{3628800} = 2.7182818011463845, \qquad e = 2.718281828459045\ldots$$

Usando qualche stima e la serie geometrica si può avere una stima precisa dell'errore.

Irrazionalità del numero di Nepero e

Fissiamo $m, n \in \mathbb{N}$, $n > m$

$$0 < s_n - s_m = \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(m+1)!} \sum_{k=m+1}^{n} \frac{(m+1)!}{k!}$$

$$\overset{(1)}{=} \frac{1}{(m+1)!} \sum_{j=0}^{n-m-1} \frac{(m+1)!}{(m+1+j)!} \overset{(2)}{<} \frac{1}{(m+1)!} \sum_{j=0}^{n-m-1} \left(\frac{1}{m+1}\right)^j$$

(1) cambio indice di sommatoria : $j = k - m - 1$;

(2) $\frac{(m+1)!}{(m+1+j)!} = \frac{1}{(m+2)(m+3)\cdots(m+1+j)}$

Passiamo al limite per $n \to +\infty$ e otteniamo che per ogni $m \in \mathbb{N}^+$

$$0 < e - s_m < \frac{1}{(m+1)!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{m+1}} = \frac{1}{m!\, m}$$

Irrazionalità del numero di Nepero e

La stima permette di dimostrare che e è un numero irrazionale. Infatti, supponiamo per assurdo che sia razionale,

$$e = \frac{p}{q}\,, \qquad p, q \in \mathbb{N}^+.$$

Applichiamo la stima precedente con $m = q$

$$0 < e - s_q < \frac{1}{q!\,q} \quad \Longleftrightarrow \quad 0 < q!\left(\frac{p}{q} - s_q\right) < \frac{1}{q} < 1.$$

Ora basta osservare che

$$q!\left(\frac{p}{q} - s_q\right) = (q-1)!\,p + \sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!}, \qquad \text{e } k!/q!\ \forall k \leq q$$

quindi abbiamo esibito un numero intero strettamente compreso fra 0 e 1, il che è assurdo.

Criterio di Leibniz

In analisi matematica, il criterio di Leibniz è un criterio di convergenza applicabile a serie a termini di segno alterno.

Criterio di Leibniz

In analisi matematica, il criterio di Leibniz è un criterio di convergenza applicabile a serie a termini di segno alterno.

Se una successione a termini positivi a_k è decrescente e infinitesima, allora la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$$

converge.

Criterio di Leibniz

In analisi matematica, il criterio di Leibniz è un criterio di convergenza applicabile a serie a termini di segno alterno.

Se una successione a termini positivi a_k è decrescente e infinitesima, allora la serie

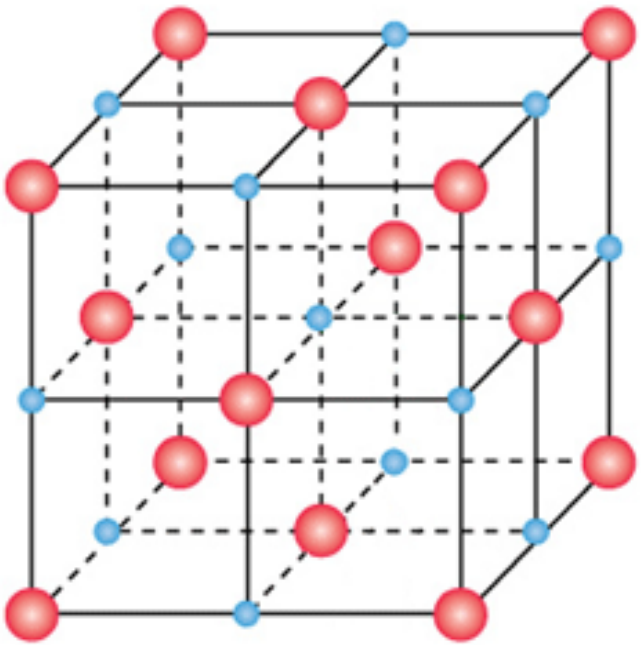
$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$$

converge.

Esistono applicazioni per le serie a termini alterni (di cui Leibniz non era al corrente)?

Chimica: i cristalli

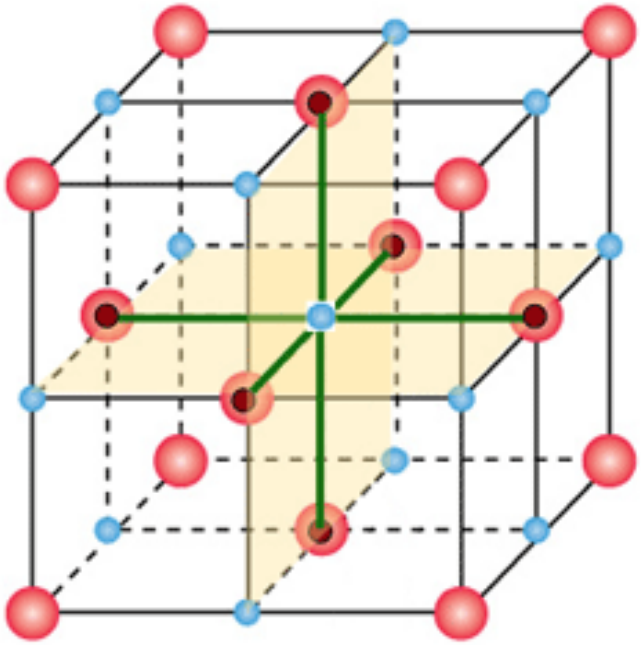
Consideriamo un cristallo, ad esempio il Cloruro di Sodio.
Consideriamo un reticolo cubico come in figura in cui gli ioni di Na^+ sono azzurri e gli ioni Cl^- rossi.



Chimica: i cristalli

Lo ione Na^+ centrale è a contatto diretto con 6 ioni Cl^- (vertici di un ottaedro di cui Na^+ è il centro) in modo attrattivo a distanza R.

Interagisce inoltre in termini repulsivi con altri 12 Na^+ a distanza $\sqrt{2}R$.



Chimica: i cristalli

L'energia potenziale di interazione tra due cariche è $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{R}$.

L'interazione del Na^+ con i 6 Cl^- più vicini* è dato da

$$E = k\frac{e(-6e)}{R} = -k\frac{6e^2}{R}$$

Chimica: i cristalli

L'energia potenziale di interazione tra due cariche è $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{R}$.

L'interazione del Na^+ con i 6 Cl^- più vicini* è dato da

$$E = k\frac{e(-6e)}{R} = -k\frac{6e^2}{R}$$

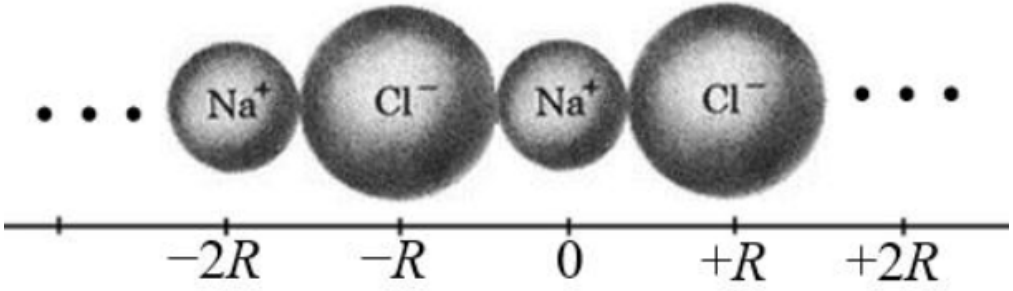
L'interazione del Na^+ con i 12 Na^+ a distanza $\sqrt{2}R$ è dato da

$$E = k\frac{12e^2}{\sqrt{2}R}$$

E così via

Reticolo monodimensionale

Meglio partire da un cristallo monodimesionale* per poi passare a uno bidimensionale e infine tridimensionale.



Lo ione centrale interagisce in modo attrattivo con i due Cl^- a distanza R, in modo repulsivo con i due Na^+ a distanza $2R$ e così via.

Reticolo monodimensionale

Se immaginiamo questa sequenza infinita l'energia di interazione l'energia reticolare si può scrivere nel modo seguente:

$$E = -\frac{2ke^2}{R}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots\right)$$

(Energia di Madelung)

Reticolo monodimensionale

Se immaginiamo questa sequenza infinita l'energia di interazione l'energia reticolare si può scrivere nel modo seguente:

$$E = -\frac{2ke^2}{R}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots\right)$$

(Energia di Madelung)

La serie $2\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots\right)$ è convergente per il criterio di Leibniz e

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} = 2\ln 2$$