Percorso di matematica applicata sull'eredità scientifica di Vito Volterra: dinamica delle popolazioni e dislocazioni

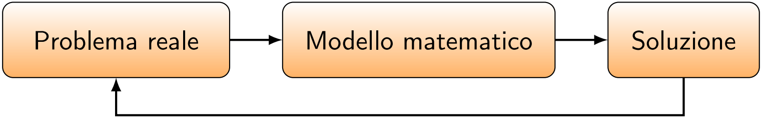
Annalisa Malusa

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Seminario per gli insegnanti – 5 aprile 2024

Fare MATEMATICA APPLICATA in aula

L'attività di laboratorio propone la costruzione di modelli matematici teorico al servizio delle applicazioni, secondo il seguente percorso:



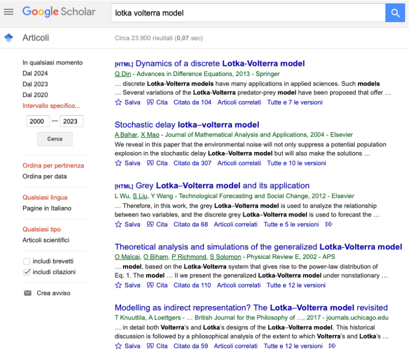
- analisi un problema reale;
- formulazione del problema in termini di incognite, parametri, funzioni, ecc..;
- sviluppo di tecniche matematiche per la risoluzione del problema;
- utilizzo delle tecniche teoriche per determinare la soluzione del problema;
- interpretazione della soluzione nel contesto del problema reale (eventualmente tenendo conto dei limiti del modello che è stato utilizzato).

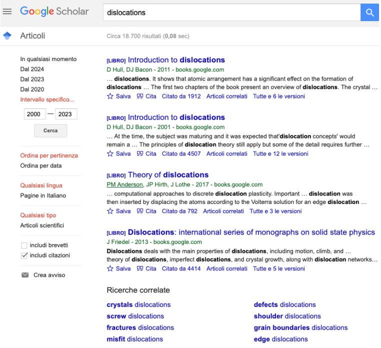
Fare MATEMATICA CONTEMPORANEA in aula

I temi di cui ci siamo occupati

- Dinamica delle popolazioni
- Plasticità nei metalli e dislocazioni

sono tutt'oggi ampiamente studiati.





Percorso sui modelli di dinamica delle popolazioni

Impostazione a partire da argomenti noti:

I conigli di Fibonacci (1202, *Liber Abaci*)

Primo modello moderno:

Modello di Malthus
(1798, *A essay of the principle of the population as it affects the future improvement of society*)

per concludere con il modello a due specie introdotto da Vito Volterra (e, simultaneamente e indipendentemente, dal matematico statunitense di origini ucraine Alfred J. Lotka).

Modello preda–predatore di Lotka e Volterra
(1926, "Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi", Mem. Acad. Lincei Roma, 2, 31–113)

L'idea del modello nacque su sollecitazione del biologo (e genero) Umberto D'Ancona.

I conigli di Fibonacci

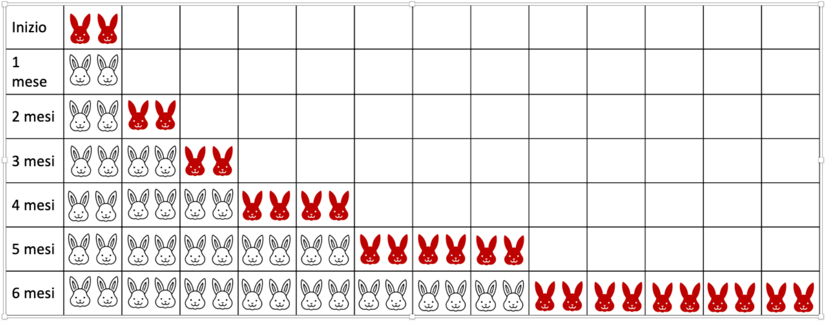
Analizziamo il seguente enigma, tratto dal fondamentale trattato "Liber Abaci" che, tra l'altro, ha avuto il merito di introdurre in Europa il sistema di numerazione posizionale decimale:

Un tale mise una coppia di conigli, un maschio e una femmina, in una grande gabbia. Quante coppie di conigli verranno generate in quella gabbia in un anno, se ogni mese ogni coppia genera una e solo una nuova coppia (formata da un maschio e una femmina) che dal secondo mese di vita in poi è fertile? Si assuma che nessuno dei conigli muoia nel corso dell'anno.

Analisi del problema ed estrazione dei dati

- Dinamica: numero di coppie di conigli al variare del tempo.
- Unità temporale: Il numero di coppie si aggiorna ogni mese.
- Dato iniziale: si parte con una coppia non fertile.
- Cause della variazione della numerosità:
  - il sistema è isolato, non possono entrare o uscire altri conigli
  - ogni coppia diventa fertile dopo un mese dalla nascita
  - ogni coppia fertile genera una nuova coppia maschio-femmina
  - nessun coniglio muore.

Ci viene richiesto di fare un conto ricorsivo: dato per noto il numero dei conigli dei mesi precedenti, determinare il numero dei conigli dell'n–esimo mese.



Indichiamo con K_n il numero di coppie presenti all'n–esimo mese e cerchiamo una legge (la più semplice possibile!) che ci permetta di calcolare K_n conoscendo K_j, $j = 0, \dots k-1$, ossia le numerosità nei mesi precedenti:

$$K_n = K_{n-1} + K_{n-2}, \quad \text{con } K_0 = K_1 = 1.$$

La relazione che abbiamo scritto definisce una successione di numeri, che al crescere di n diventa sempre più grande, la cosiddetta successione dei numeri di Fibonacci

Cosa abbiamo imparato?

- Un calcolo diretto risponde al quesito di Fibonacci;
- La formalizzazione del calcolo che abbiamo fatto ci fornisce una relazione iterativa permette di conoscere tutta la successione di Fibonacci;
- la teoria matematica che è stata sviluppata per rispondere alla domanda di Fibonacci in realtà permette di descrivere molti altri fenomeni naturali;
- un'informazione matematica è alla base di canoni estetici in arte ed architettura.

Cosa si può migliorare?

Ovviamente non si tratta di un buon modello della realtà

- conigli immortali
- figli a coppie miste

ma è sicuramente un modo semplice e suggestivo di iniziare a parlare di dinamica di popolazioni.

Il modello di Malthus – tasso di crescita costante

Nuovo quesito: il numero di batteri in una provetta raddoppia ogni 4 ore. Se inizialmente è 10.000, quanti batteri ci sono nella provetta dopo 24 ore?

Come abbiamo imparato, analizziamo il problema ed estraiamone i dati:

- Dinamica: numero di batteri al variare del tempo.
- Unità temporale: Il numero di coppie si aggiorna ogni 4 ore.
- Dato iniziale: si parte con 10.000 batteri.
- Cause della variazione della numerosità: la popolazione raddoppia in ogni unità temporale.

Formalizziamo: $t_n = n{\cdot}4$ ore
P_n= popolazione al tempo t_n, $P_0 = 100.000$, $P_{n+1} = 2P_n$

La versione generale dell'esempio precedente è il modello di Malthus, il primo e più semplice modello di crescita delle popolazioni dell'era moderna.

- Si fissa un passo temporale t_n
- Si denota con P_n la numerosità della popolazione dopo n passi temporali
- Si fissa un valore iniziale $P_0 = p$
- Si assume che la variazione di popolazione nella singola stagione sia proporzionale alla numerosità attuale $P_{n+1} - P_n = kP_n$

ottenendo che la dinamica è completamente descritta da

$$P_{n+1} = (1+k)P_n, \qquad P_0 = p$$

Possiamo scrivere esplicitamente la funzione descritta da questa legge:

$$P_n = (1+k)P_{n-1} = (1+k)^2 P_{n-2} = \cdots = (1+k)^n p,$$

Ovviamente, deve essere $1 + k > 0$, perchè il numero di individui è un valore positivo e quindi, al crescere di n,

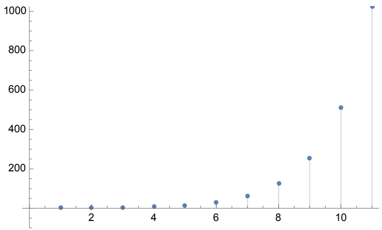
- se $k > 0$ la popolazione cresce indefinitamente;
- se $-1 < k < 0$ la popolazione tende ad estinguersi.

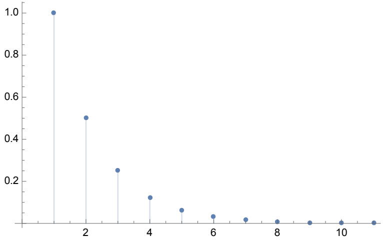
Rappresentazione grafica

La dinamica della popolazione è una successione di valori $P_n = (1+k)^n p$.

Nell'esempio iniziale $k = 1$ e $P_n = 2^n \cdot 100.000$

Possiamo visualizzare l'andamento sul piano cartesiano $(n \mapsto P_n))$, ottenendo una crescita $(k > 0)$ o una decrescita $(-1 < k < 0)$ esponenziale.





Un altro modo molto efficace di rappresentare graficamente l'andamento di $P(n)$ è disegnare il cosiddetto diagramma a ragnatela.

Diagramma a ragnatela di $P(n+1) = \frac{1}{2}P(n)$, $p = 1$

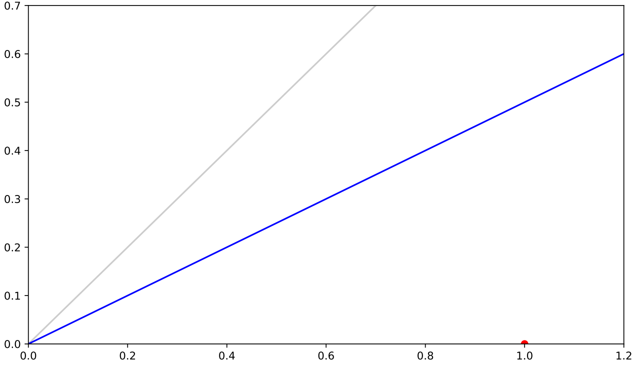


Diagramma a ragnatela di $P(n+1) = \frac{1}{2}P(n)$, $p = 1$

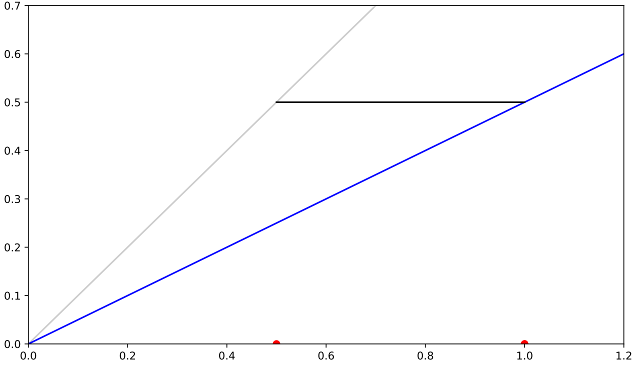


Diagramma a ragnatela di $P(n+1) = \frac{1}{2}P(n)$, $p = 1$

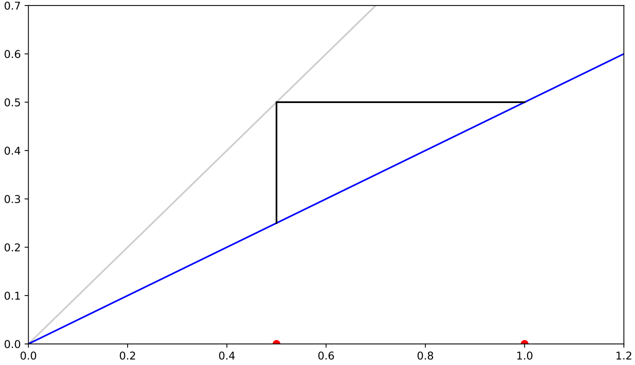


Diagramma a ragnatela di $P(n+1) = \frac{1}{2}P(n)$, $p = 1$

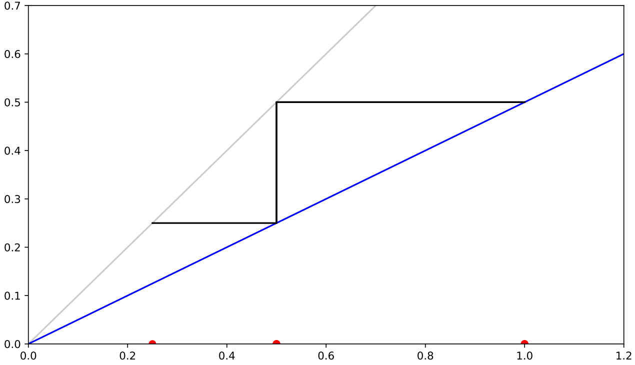


Diagramma a ragnatela di $P(n+1) = \frac{1}{2}P(n)$, $p = 1$

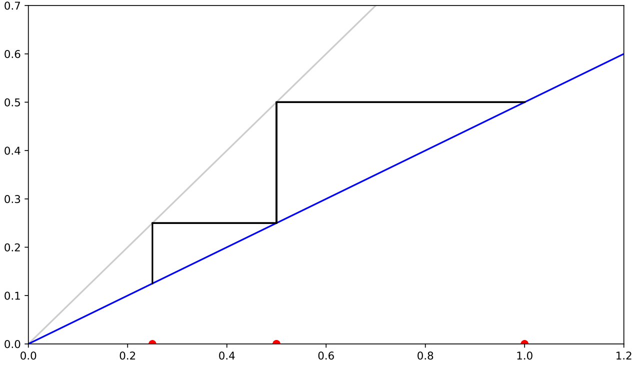


Diagramma a ragnatela di $P(n+1) = \frac{1}{2}P(n)$, $p = 1$

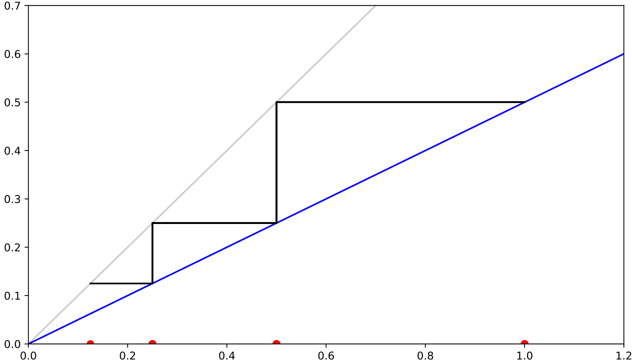


Diagramma a ragnatela di $P(n+1) = \frac{1}{2}P(n)$, $p = 1$

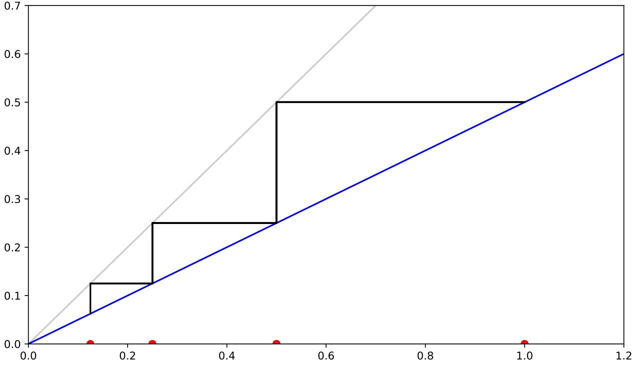


Diagramma a ragnatela di $P(n+1) = \frac{1}{2}P(n)$, $p = 1$

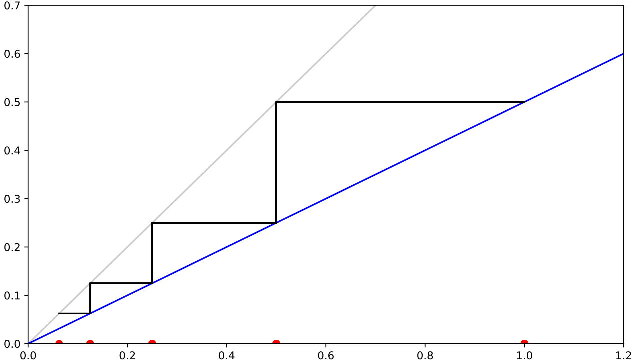


Diagramma a ragnatela di $P(n+1) = \frac{1}{2}P(n)$, $p = 1$

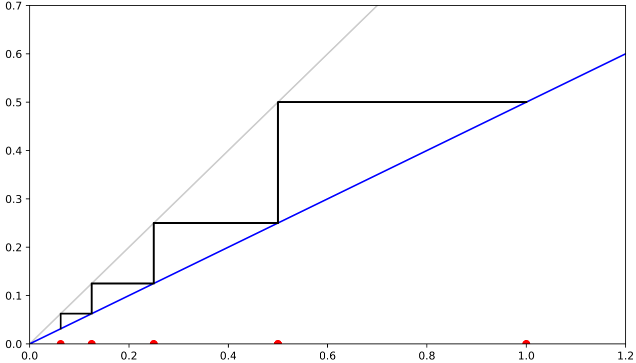


Diagramma a ragnatela di $P(n+1) = \frac{1}{2}P(n)$, $p = 1$

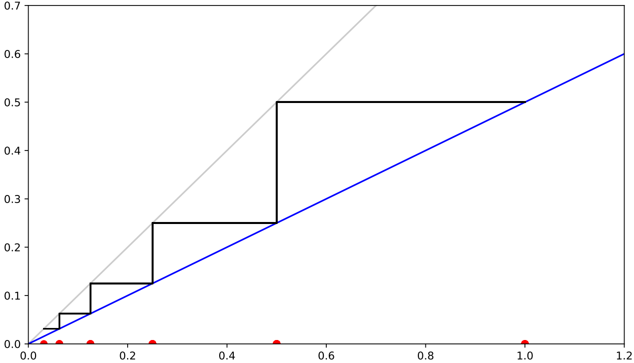


Diagramma a ragnatela di $P(n+1) = \frac{1}{2}P(n)$, $p = 1$

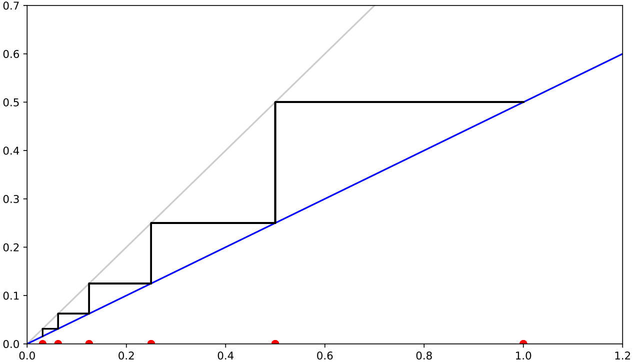


Diagramma a ragnatela di $P(n+1) = \frac{1}{2}P(n)$, $p = 1$

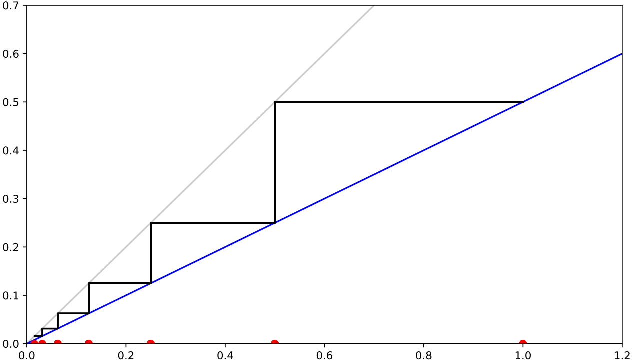


Diagramma a ragnatela di $P(n+1) = \frac{1}{2}P(n)$, $p = 1$

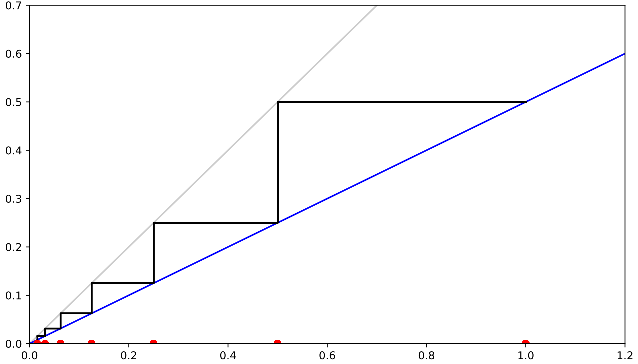


Diagramma a ragnatela di $P(n+1) = \frac{1}{2}P(n)$, $p = 1$

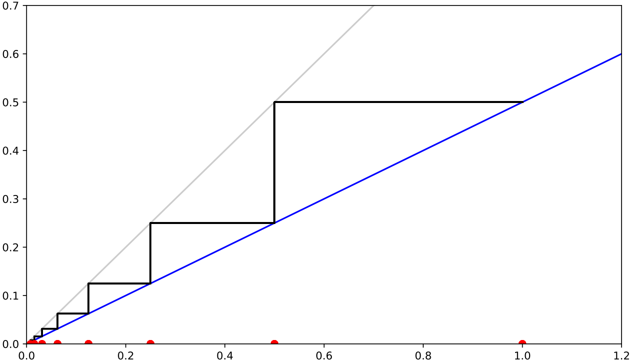


Diagramma a ragnatela di $P(n+1) = \frac{1}{2}P(n)$, $p = 1$

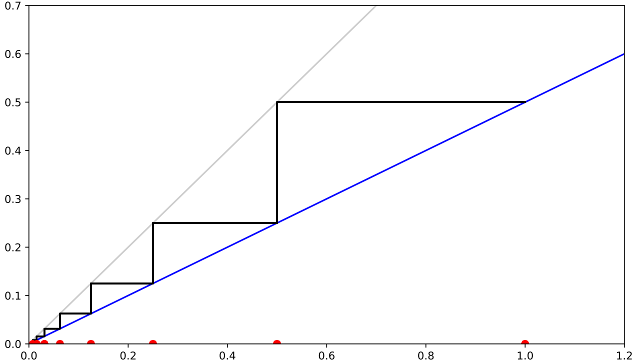


Diagramma a ragnatela di $P(n+1) = \frac{1}{2}P(n)$, $p = 1$

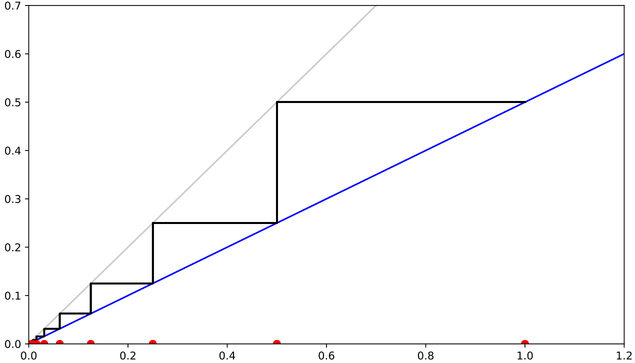


Diagramma a ragnatela di $P(n+1) = \frac{1}{2}P(n)$, $p = 1$

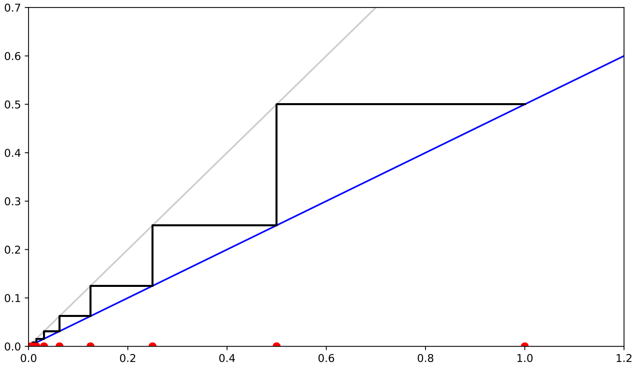


Diagramma a ragnatela di $P(n+1) = \frac{1}{2}P(n)$, $p = 1$

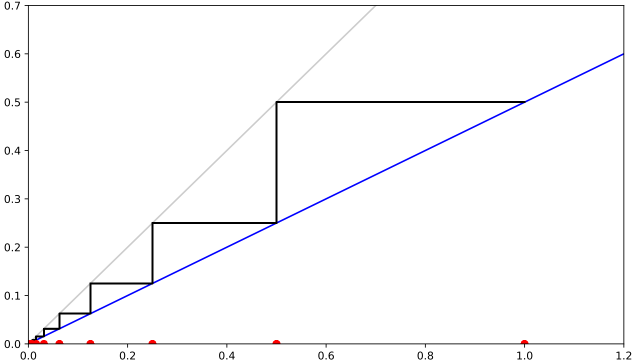


Diagramma a ragnatela di $P(n+1) = \frac{1}{2}P(n)$, $p = 1$

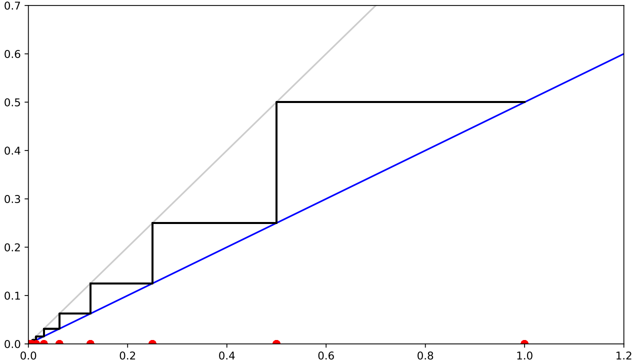


Diagramma a ragnatela di $P(n+1) = 2P(n)$, $p = 1$

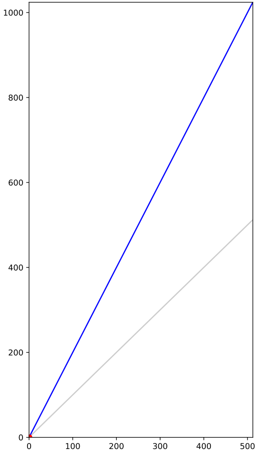


Diagramma a ragnatela di $P(n+1) = 2P(n)$, $p = 1$

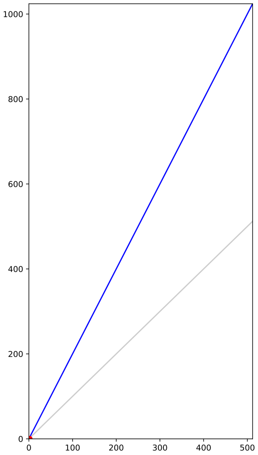


Diagramma a ragnatela di $P(n+1) = 2P(n)$, $p = 1$

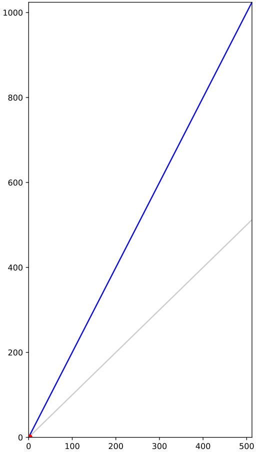


Diagramma a ragnatela di $P(n+1) = 2P(n)$, $p = 1$

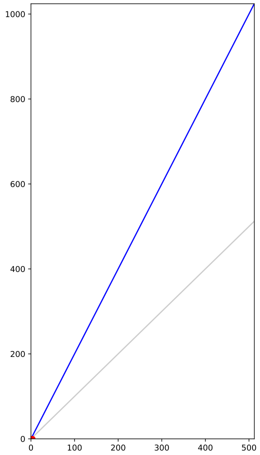


Diagramma a ragnatela di $P(n+1) = 2P(n)$, $p = 1$

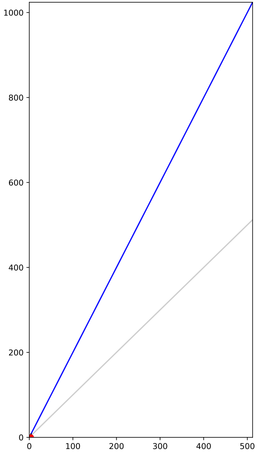


Diagramma a ragnatela di $P(n+1) = 2P(n)$, $p = 1$

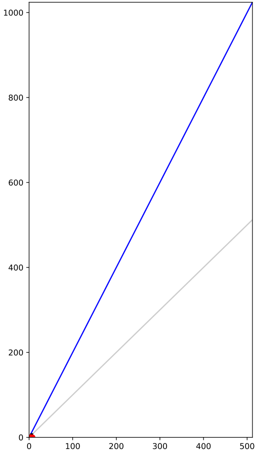


Diagramma a ragnatela di $P(n+1) = 2P(n)$, $p = 1$

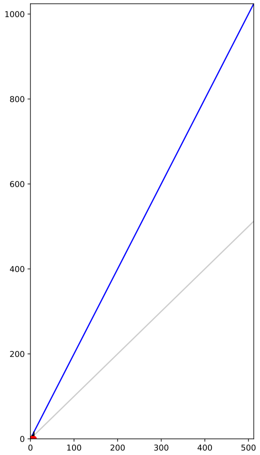


Diagramma a ragnatela di $P(n+1) = 2P(n)$, $p = 1$

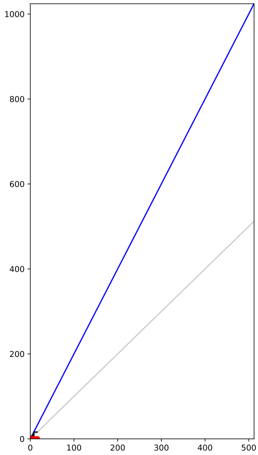


Diagramma a ragnatela di $P(n+1) = 2P(n)$, $p = 1$

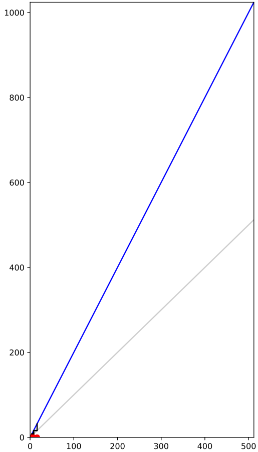


Diagramma a ragnatela di $P(n+1) = 2P(n)$, $p = 1$

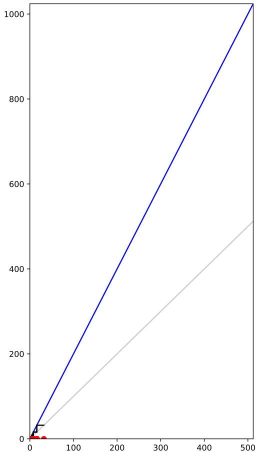


Diagramma a ragnatela di $P(n+1) = 2P(n)$, $p = 1$

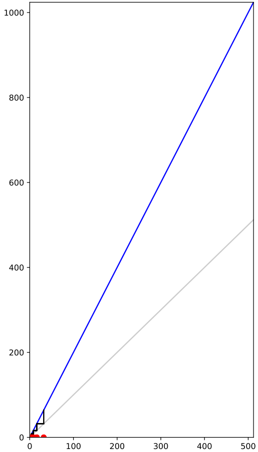


Diagramma a ragnatela di $P(n+1) = 2P(n)$, $p = 1$

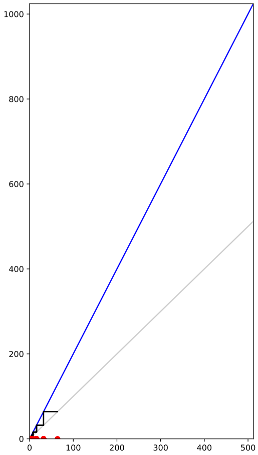


Diagramma a ragnatela di $P(n+1) = 2P(n)$, $p = 1$

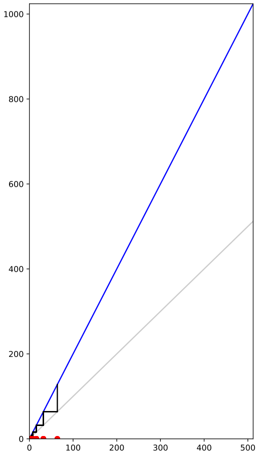


Diagramma a ragnatela di $P(n+1) = 2P(n)$, $p = 1$

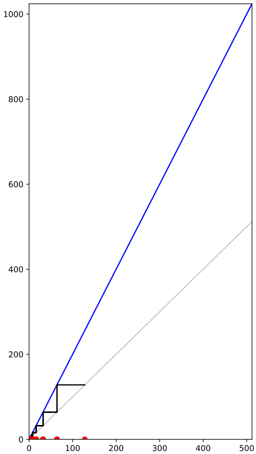


Diagramma a ragnatela di $P(n+1) = 2P(n)$, $p = 1$

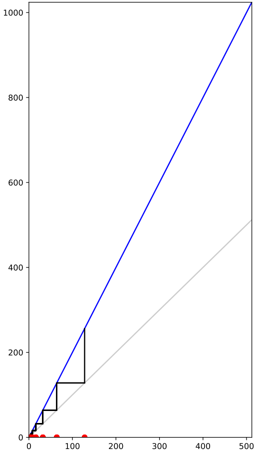


Diagramma a ragnatela di $P(n+1) = 2P(n)$, $p = 1$

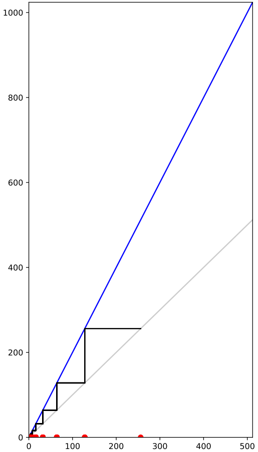


Diagramma a ragnatela di $P(n+1) = 2P(n)$, $p = 1$

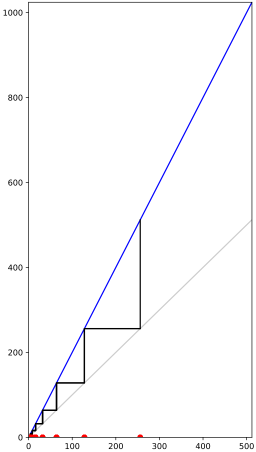


Diagramma a ragnatela di $P(n+1) = 2P(n)$, $p = 1$

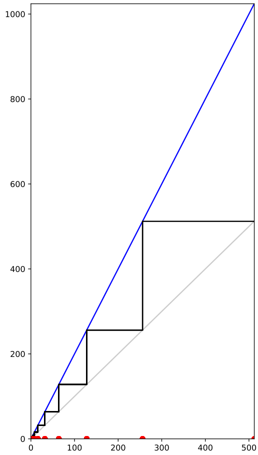
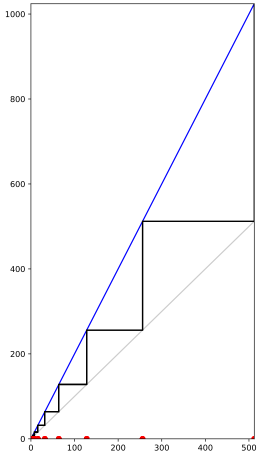


Diagramma a ragnatela di $P(n+1) = 2P(n)$, $p = 1$



Cosa abbiamo imparato?

- Un modello di dinamica di popolazioni di tipo stagionale si formalizza matematicamente con una legge di ricorrenza;
- I dati che vengono fissati a priori sono
  - l'intervallo temporale significativo per la dinamica;
  - la legge (ricorsiva) che fornisce la numerosità alla stagione successiva una volta nota la numerosità alla stagione precedente;
  - il valore iniziale osservato.
- La dinamica può essere descritta anche con un diagramma a ragnatela

Nel modello di Malthus l'andamento della dinamica è esponenziale e cresce indefinitamente, oppure tende all'estinzione per tempi lunghi.

Cosa si può migliorare?

Ancora non si tratta di un buon modello della realtà:

- risorse illimitate
- nessun pericolo esterno

Complichiamo un po' le cose: supponiamo che la popolazione sia gustosa per un'altra popolazione...

Il modello preda–predatore di Lotka e Volterra

Come nel caso precedente ci troviamo in un ambiente chiuso (non possono arrivare né uscire elementi), ma questo volta le popolazioni presenti sono due:

le prede (galline) G_n che
- hanno cibo illimitato
- in assenza di lupi hanno tasso di crescita costante
- muoiono solo a causa dei lupi

i predatori (lupi) L_n che
- si nutrono solo di galline
- in assenza di galline diminuiscono con tasso costante
- aumentano proporzionalmente a quanto riescono a mangiare

per ora non diamo dettagli sul passo temporale t_n.

Costruiamo il modello

In assenza dell'altra specie, il tasso di crescita di lupi e galline è lo stesso del caso precedente:

$$\begin{cases} G_{n+1} = G_n + a\,G_n \\ L_{n+1} = L_n - c\,L_n \end{cases} \qquad a > 0,\ 0 < c < 1.$$

In presenza dell'altra specie, ragionevolmente si ha:

- il numero di galline uccise nella stagione è proporzionale al numero di incontri tra loro e i lupi che possiamo immaginare essere proporzionale, a sua volta, al prodotto $G_n L_n$;
- il numero di lupi cresce in maniera proporzionale al numero delle galline predate, anch'esso proporzionale al $G_n L_n$.

Quindi la dinamica viene descritta dal sistema

$$\begin{cases} G_{n+1} = G_n + a\,G_n - b\,G_n L_n \\ L_{n+1} = L_n - c\,L_n + d\,G_n L_n \end{cases}$$

dove tutte le costanti a, b, c, d sono strettamente positive.

Una volta fissate le condizioni iniziali $G_0 = g$, $L_0 = l$, la dinamica è quindi descritta iterativamente da

$$\begin{cases} G_{n+1} = G_n + G_n(a - b\,L_n) \\ L_{n+1} = L_n + L_n(d\,G_n - c) \end{cases}$$

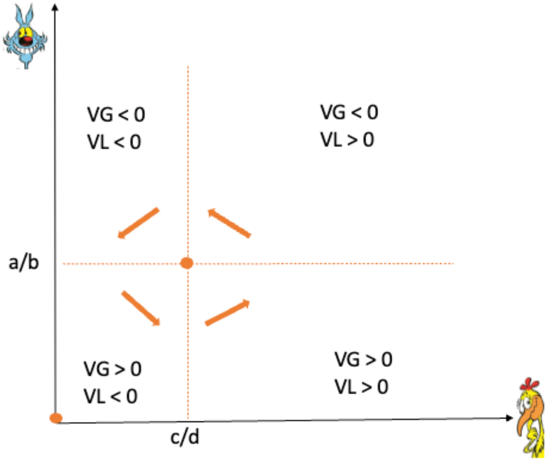
dove è stato evidenziato il termine di differenza tra la numerosità della nuova stagione e quella della precedente.

Il sistema ci fornisce una coppia di informazioni (G_n, L_n) per ogni stagione che possiamo visualizzare come punti del piano cartesiano.

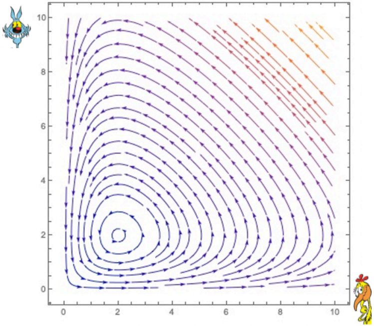
Vediamo subito che se $g = c/d$ e $l = a/b$ il numero di lupi e galline resta sempre costante nel tempo (così come se $g = 0$ e $l = 0$). In questi casi si dice che il sistema è all'equilibrio.

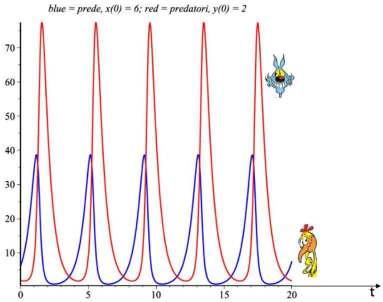
Inoltre, tracciando le rette orizzontale e verticale passanti per il punto di equilibrio, suddividiamo il quadrante in 4 parti in cui possiamo conoscere il segno della variazione di numerosità.

$$G_{n+1} = G_n + \overbrace{G_n(a - b\,L_n)}^{VG} \qquad L_{n+1} = L_n + \underbrace{L_n(d\,G_n - c)}_{VL}$$



Con un po' di lavoro aggiuntivo si riesce a fare una descrizione precisa della dinamica:





Sia il numero di prede che quello dei predatori varia in maniera periodica e la dinamica sul piano prede–predatori (ritratto di fase) è una curva chiusa (dinamica ciclica) che dipende dalle numerosità inziali.

Strumenti informatici:

- Codice Pyton su Google Colab (prof. Davide Passaro)
- Simulazione online con Geogebra

Ritorno alla realtà

Le previsioni che si ottengono con questo modello sono perfettamente coerenti (per opportuni valori delle costanti a, b, c, e d) ai valori raccolti dal biologo Umberto d'Ancona, genero di Vito Volterra, per uno studio statistico sulle variazioni delle popolazioni di diverse specie ittiche nel mar Adriatico settentrionale.
Le sue stime erano basate sulle quantità di pesci di ciascuna specie venduti, tra il 1905 e il 1923, sui mercati di Trieste, Fiume e Venezia, nell'ipotesi che queste rispecchiassero le reali proporzioni dell'ambiente marino.

Secondo il suo studio, le quantità di pesci grandi e di pesci piccoli variavano con lo stesso periodo, ma piuttosto sfasate. In questo caso i pesci grandi sono i predatori che mangiano quelli piccoli.

Scienza dei materiali: le dislocazioni

Una delle intuizioni più sorprendenti e significative di Vito Volterra riguarda il comportamento dei metalli. La questione è la seguente:

come fanno i metalli a deformarsi con tanta facilità a dispetto della loro struttura atomica estremamente rigida?

Quando viene progettato un oggetto è fondamentale scegliere il materiale da utilizzare in base alla funzione per cui l'oggetto viene progettato.

La scienza dei materiali, sviluppata a partire dalla fine del 1700 da fisici, chimici, ingegneri e matematici, si occupa di descrivere le proprietà dei materiali ed, eventualmente, di inventarne di nuovi con le proprietà richieste per gli obiettivi richiesti dallo sviluppo tecnologico.

Vito Volterra ha contribuito in maniera sostanziale alla comprensione del meccanismo di deformazione plastica dei metalli teorizzando (nel 1907) la presenza di difetti del reticolo cristallino (le dislocazioni) che permettevano di spiegare sia la la duttilità dei metalli che l'aumento di resistenza del metallo alla deformazione (incrudimento) a seguito di ripetuti cicli di deformazione.

TIMELINE:

1907 Volterra teorizza le dislocazioni, quando non era ancora nota la struttura cristallina dei metalli.

1934 I risultati di Volterra vengono ripresi dal matematico e fisico inglese Geoffry Ingram Taylor, che con Michael Polanyi ed Egon Orowan (ungheresi) costituisce la terna degli "inventori" delle dislocazioni.

1952 Sir William L. Bragg (premio Nobel per la fisica 1915, a soli 25 anni) produce un esperimento "a bolle" sulla presenza delle dislocazioni ed il loro ruolo nella deformazione plastica dei cristalli. Video: `https://www.youtube.com/watch?v=UEB39-jlmdw`

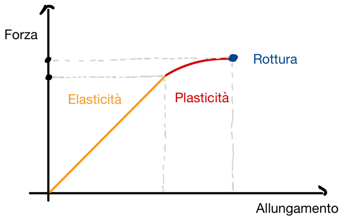
1956 Prima osservazione, al microscopio elettronico a trasmissione, delle dislocazioni.

Una teoria matematica ha "inventato" la realtà!

Fisica: Elasticità e plasticità

Forza abbastanza piccola: **regime elastico**:

- l'allungamento è proporzionale al carico,
- la deformazione è reversibile.

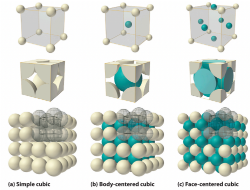


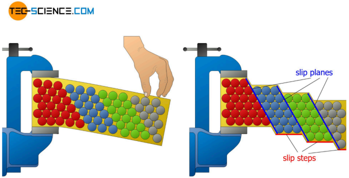
Sopra la soglia di carico critica: **regime plastico** fino al carico di rottura:

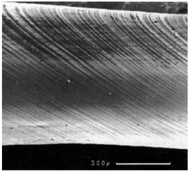
- l'allungamento resta crescente, ma non è più proporzionale al carico;
- la deformazione è irreversibile.

Chimica: struttura cristallina dei metalli

Intorno al 1930, utilizzando microscopi a raggi X, si è capito che i metalli hanno struttura cristallina, ossia in assenza di sollecitazioni esterne i loro atomi sono organizzati in maniera regolare, che si ripete con periodicità.







http://www.doitpoms.ac.uk/tlplib/slip/index.php

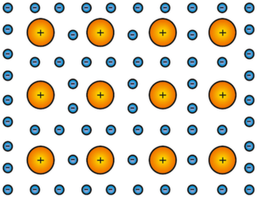
Ci occuperemo solo di deformazioni per slittamento dei piani cristallini (che è quello che si ottiene, per esempio, flettendo una barra di metallo, senza torcerla)
Dopo una deformazione plastica, il metallo è deformato, ma la struttura atomica interna mantiene la geometria cristallina:

gli atomi hanno la loro posizione reciproca preferita e tendono a mantenerla.

Il legame metallico

Gli atomi sono solidamente legati uno all'altro attraverso il legame metallico, che si può descrivere con il classico modello a nube elettronica:

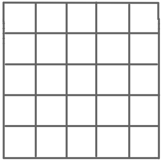
- gli atomi del metallo perdono i loro elettroni di valenza, trasformandosi in ioni positivi.
- gli ioni massimizzano l'impacchettamento (struttura cristallina) e sono tenuti insieme dagli elettroni.



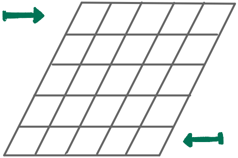
I metalli sono buoni conduttori perchè gli elettroni sono liberi di muoversi

I metalli sono malleabili: gli elettroni fanno da collante per gli ioni che sono liberi di scivolare gli uni sugli altri senza compromettere la compattezza del materiale.

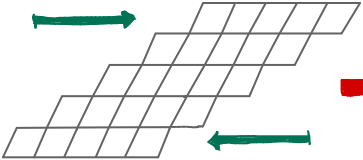
Elasticità e plasticità + struttura cristallina



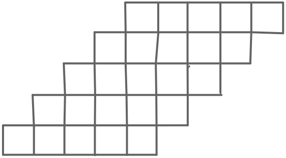
Singolo cristallo a riposo



Deformazione elastica
(reversibile)

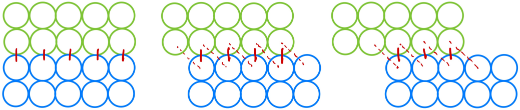


Deformazione elastoplastica



Deformazione permanente

Come avviene lo slittamento dei piani cristallini?
La prima idea che viene in mente è che sia uno scivolamento:
ogni atomo del piano si "scolla" suo corrispondente all'equilibrio e si riaccoppia con il nuovo corrispondente.



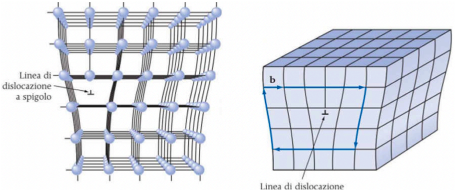
Non può essere così: questa operazione costa moltissima energia, ordini di grandezza maggiore di quella misurata negli esperimenti.

Se lo slittamento dei piani cristallini avvenisse in questo modo, praticamente non potrebbe succedere quasi mai e i cristalli sarebbero rigidissimi.
Invece sono estremamente duttili. Perchè?

Il lavoro del 1907 di Volterra aveva come intento di contribuire a comprendere questa discrepanza. La risposta completa è stata ottenuta negli anni '30 da Taylor e si basa sulla teoria delle dislocazioni:

i piani cristallini non scivolano, si increspano!

Una dislocazione è un difetto del reticolo localizzato lungo una linea



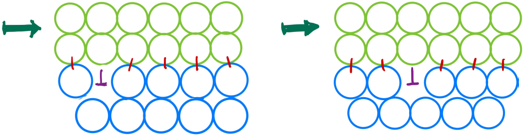
La presenza di difetti nei metalli è... UN PREGIO! Grazie alle dislocazioni i metalli si deformano spendendo poca energia. Facciamocelo spiegare dal bruco:

Se sei a terra non strisciare mai... **increspati!**

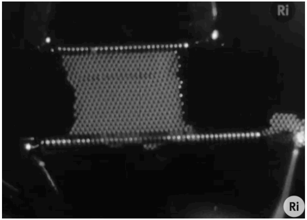
Si fa molto meno fatica a

- creare un "difetto" che produce un piccolo scollamento;
- fare viaggiare il difetto.

Se c'è una dislocazione, si può usare poca energia per spostarla. Alla fine si ottiene esattamente la stessa deformazione (scorrimento tra piani atomici), ma costa molto meno, perchè si devono slacciare solo alcuni legami atomici.

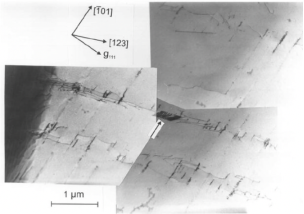


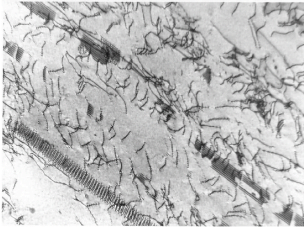
Questa dinamica è simulata benissimo attraverso un esperimento con le bolle di sapone che simulano gli atomi.

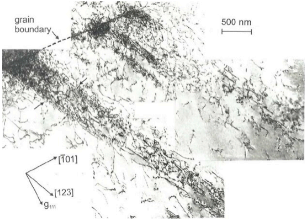


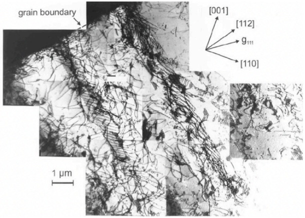
Le dislocazioni si bloccano quando raggiungono il bordo del materiale, oppure quando vengono intrappolate tra due dislocazioni bloccate.

Un'altro fenomeno che si spiega con le dislocazioni è l'hardening (l'incrudimento del materiale) a seguito di ripetuti cicli di carico e scarico. Ad ogni ciclo di carico si producono nuove dislocazioni. Quando le dislocazioni diventano tante, bloccano le nuove, quindi il materiale risulta meno malleabile



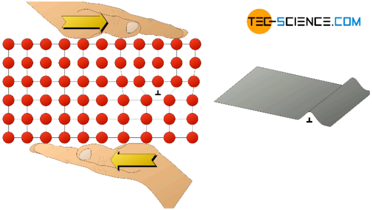


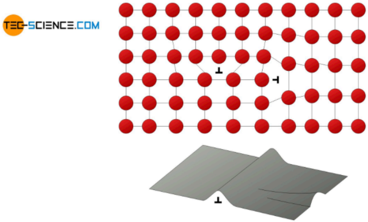




Cosa abbiamo imparato?

- esiste una materia interdisciplinare, la scienza dei materiali, che studia le proprietà dei materiali in funzione del loro utilizzo;
- i metalli, a dispetto della loro natura cristallina, sono duttili;
- la deformazione plastica dei metalli è agevolata da difetti del reticolo cristallino (le dislocazioni) che "viaggiano" nel reticolo;
- le dislocazioni bloccate producono l'incrudimento del materiale.





GRAZIE PER L'ATTENZIONE!

https://sites.google.com/view/vito-volterra-lm-sapienza/home