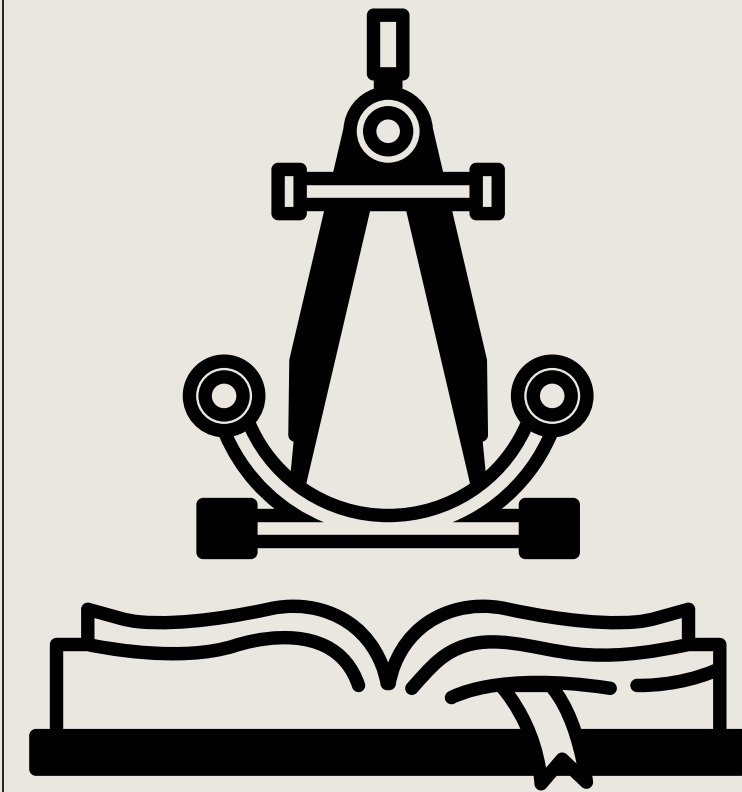


PIANO LAUREE SCIENTIFICHE

20 MARZO 2026

MATEMATICA NEL TEMPO: MANUALI STORICI E LINGUAGGIO



Maria Chiara Cibien (Università di Ferrara)

Alessandro Gambini (Università di Bologna)



ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA



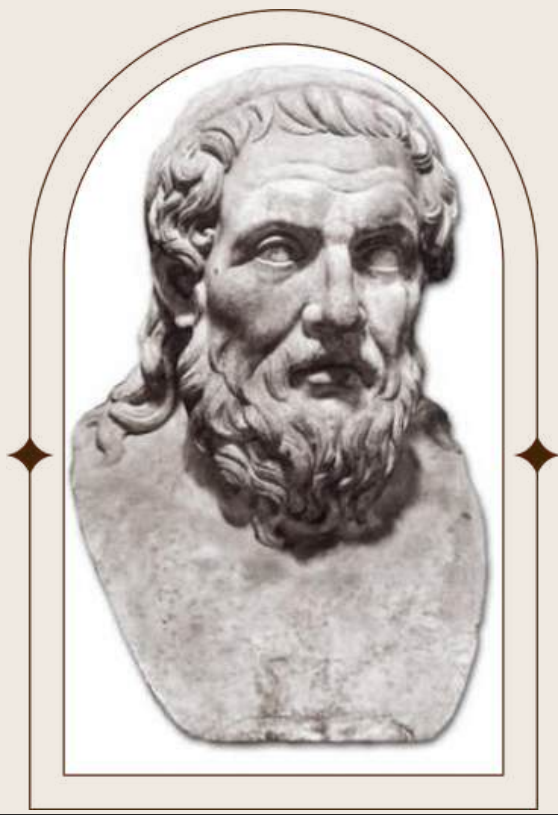
Università
degli Studi
di Ferrara

INTRODUZIONE

Quali testi antichi?

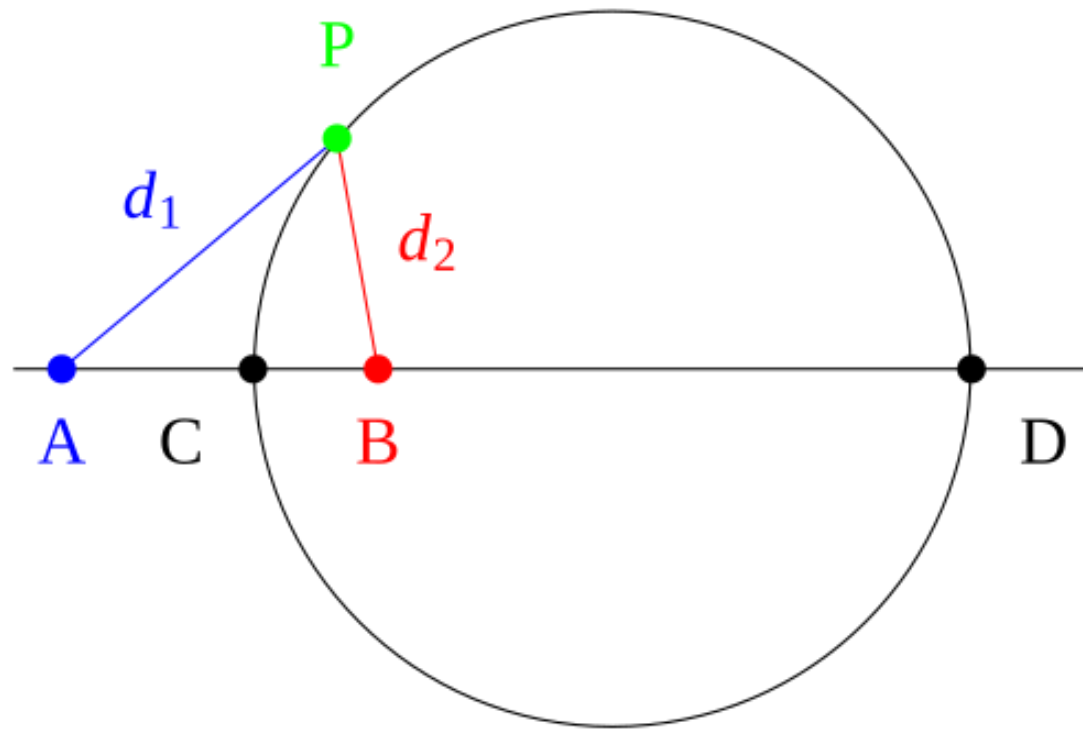
- Apollonio e le Coniche
- Ottocento: Trudi (Elementi di geometria analitica, 1852), Lampugnani (Elementi dei conici, 1823),...





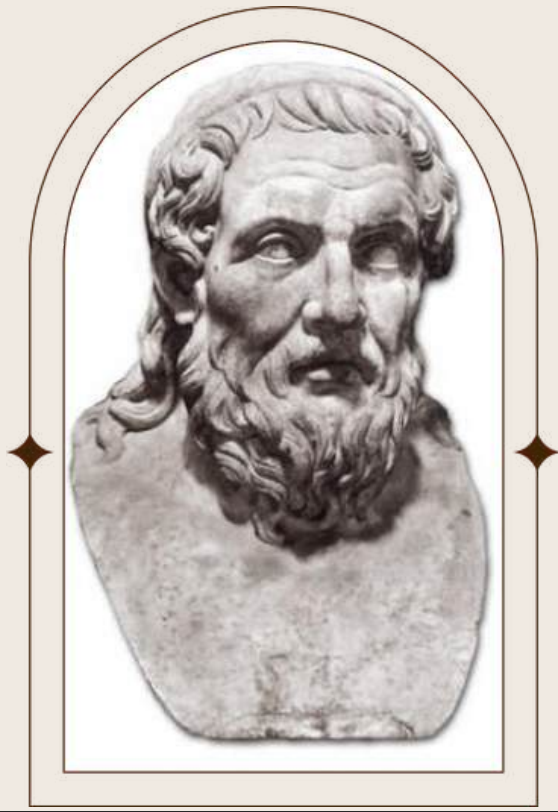
APOLLONIO DI PERGA

262 A.C. - 190 A. C.



Tra i libri perduti di Apollonio ci sono "*I luoghi piani*" in cui viene descritto il "cerchio di Apollonio" (luogo dei punti in cui il rapporto tra le distanze tra due punti assegnati sia costante).

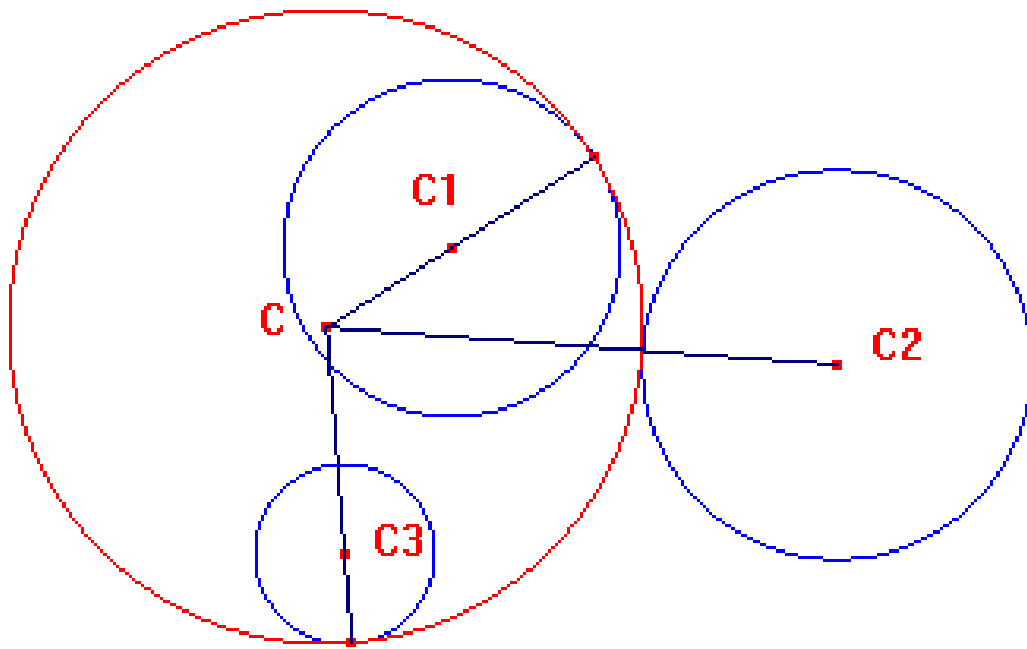
I Libri perduti di Apollonio sono raccontati da Pappo di Alessandria circa 5 secoli più tardi.



APOLLONIO DI PERGA

262 A.C. - 190 A. C.

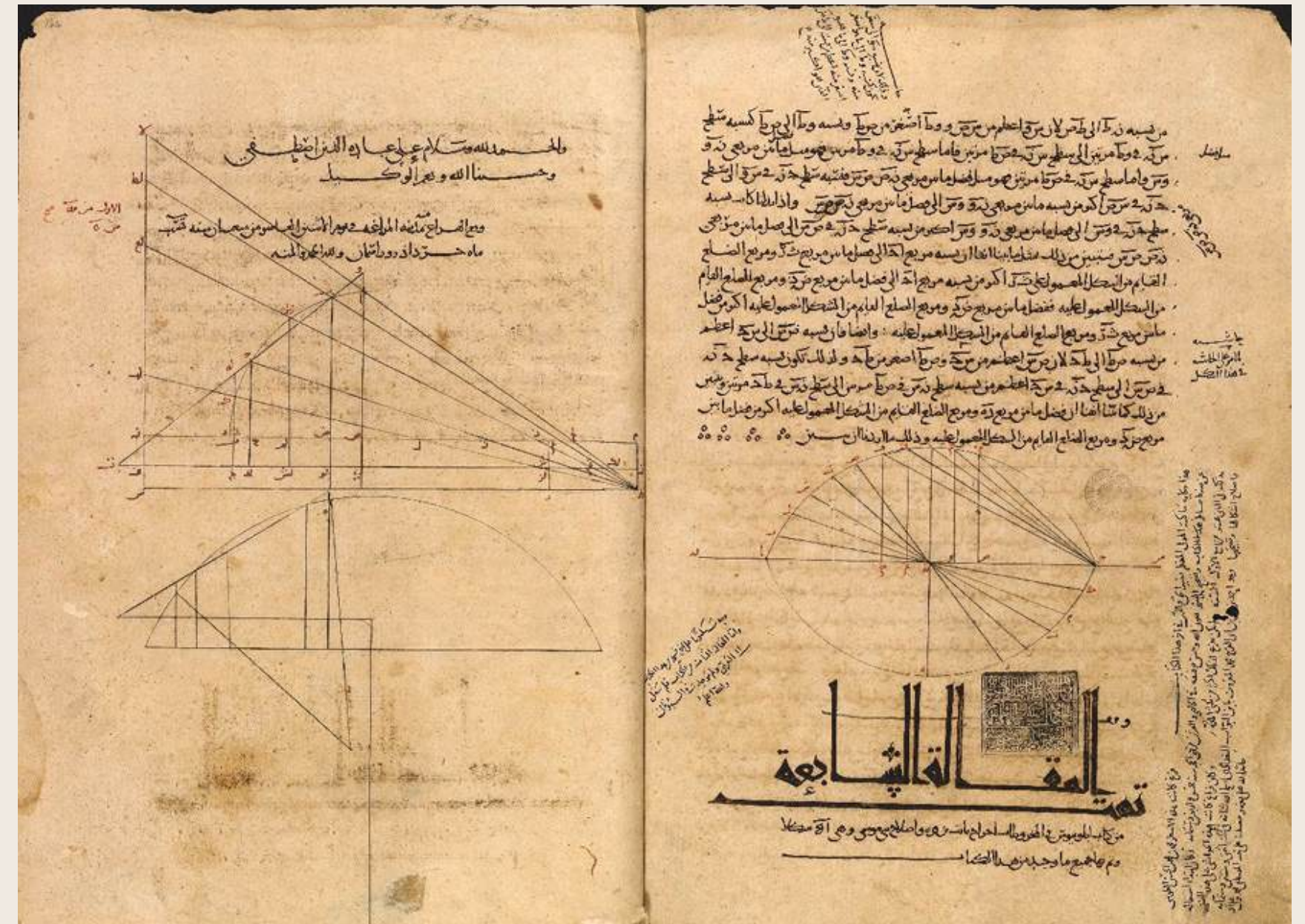
Sul libro "Le tangenze" c'è il problema di Apollonio: trovare tutte le circonferenze tangenti a tre oggetti assegnati nel piano, che possono essere punti, rette o cerchi.



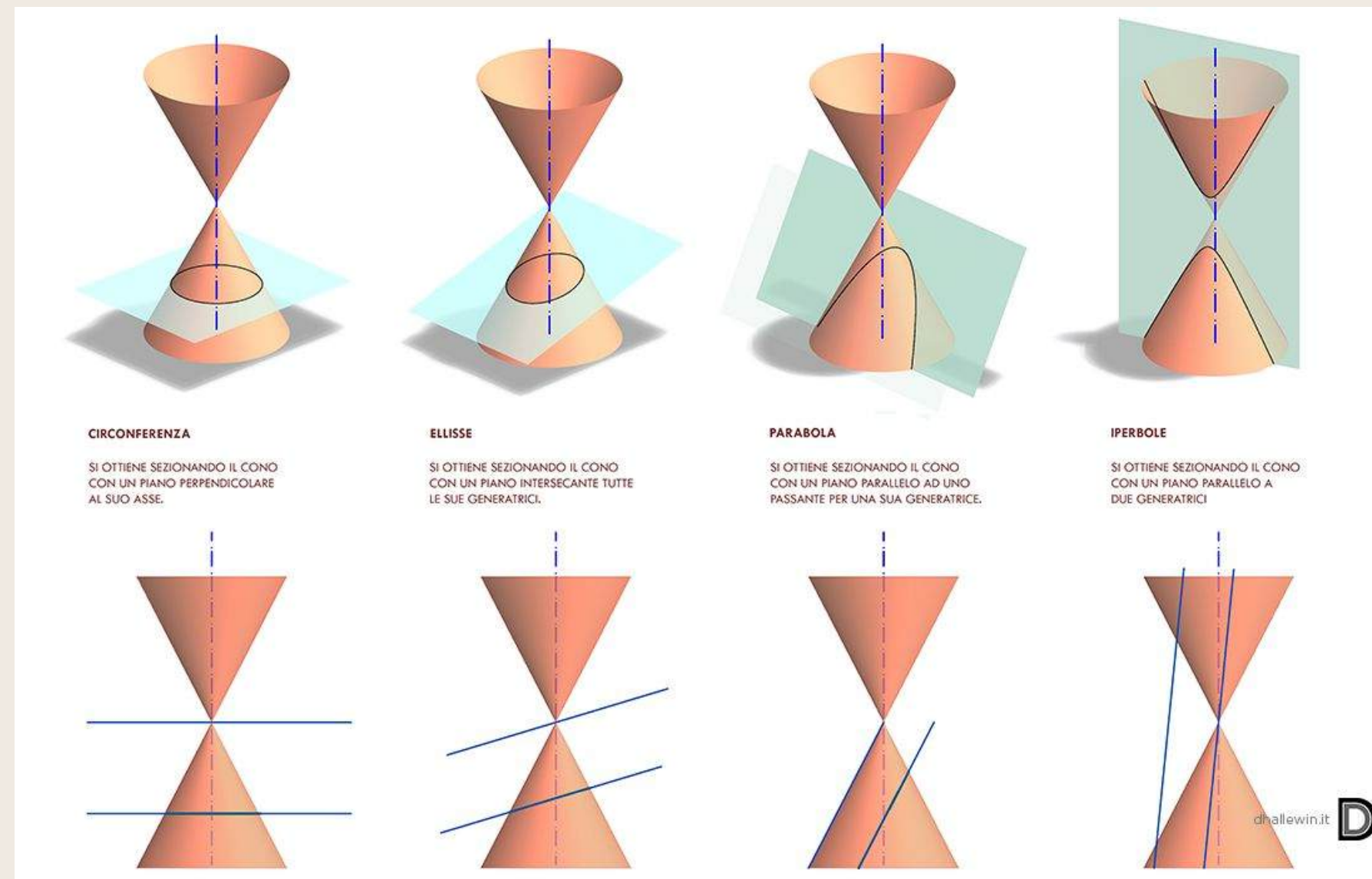
LE CONICHE

Le coniche è il suo libro più famoso in 8 volumi. I primi 4 ci sono arrivati con la traduzione originale in greco, dal V al VII sono con traduzione in arabo. L'VIII è andato perduto (ma nel VII c'è una introduzione al libro VIII).

La prima edizione de Le coniche, in greco e latino, fu pubblicata a Bologna da Federico Commandino nel 1566 e in seguito a Oxford da Edmund Halley nel 1710.



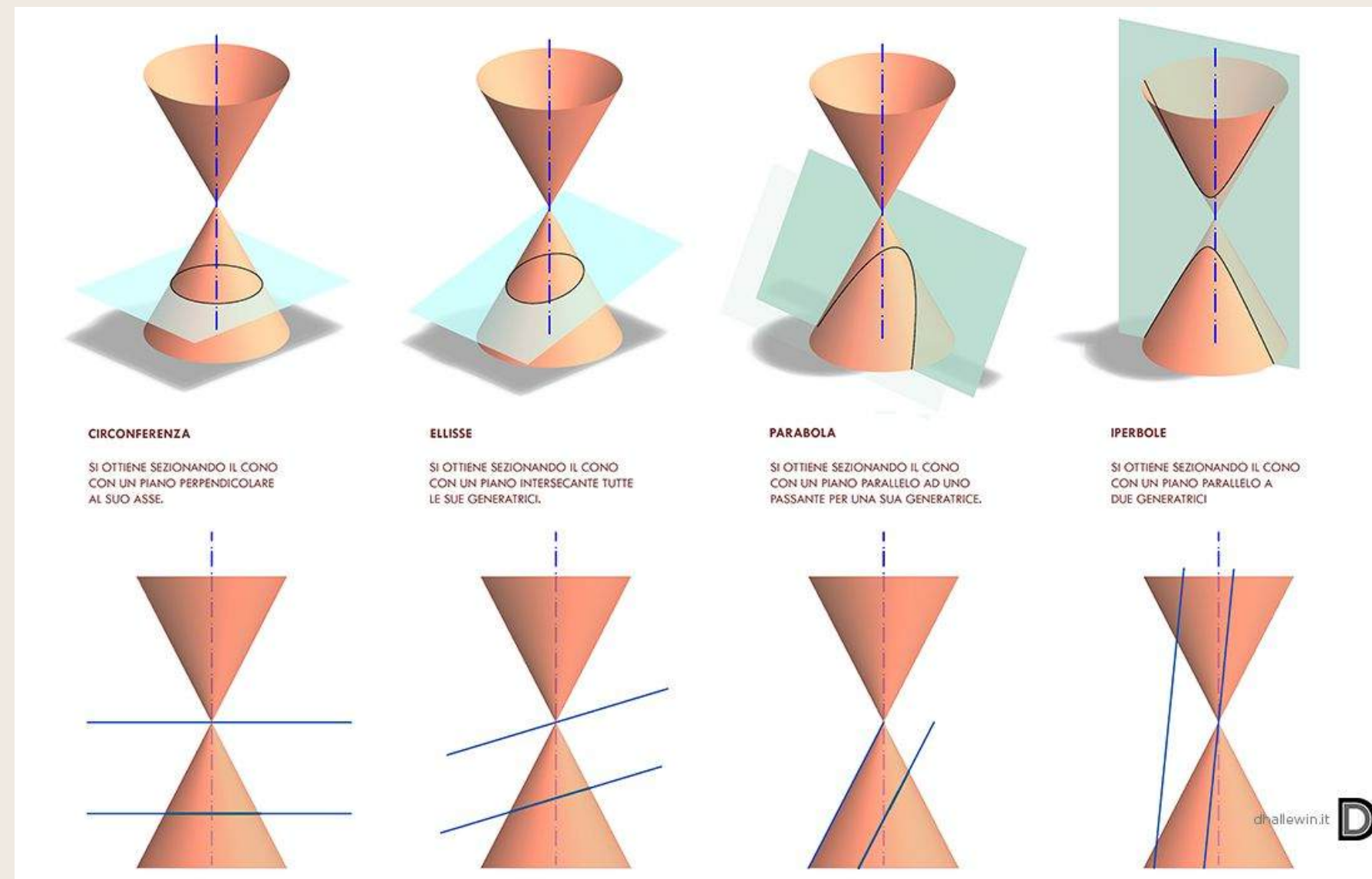
LE CONICHE



I libri I-IV sono una introduzione elementare con spiegazioni al lettore. I libri successivi sono sviluppi più avanzati. Sebbene esistessero anche prima le sezioni coniche per la prima volta Apollonio utilizza un cono a due falde.

Il cono non era necessariamente un cono retto.

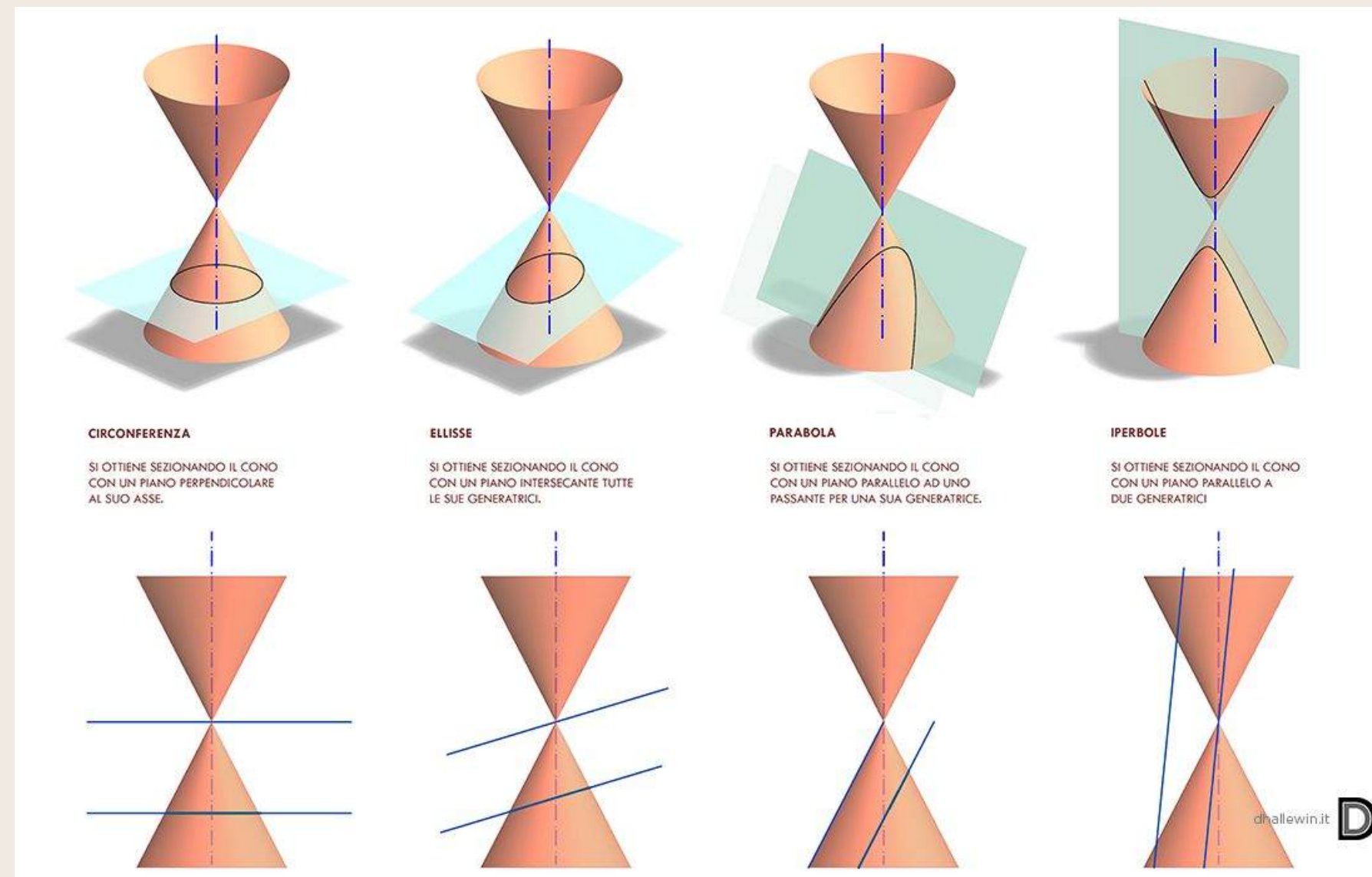
LE CONICHE



Apollonio trova delle equazioni algebriche (facendo un accenno all'uso moderno di coordinate) ragionando su triangoli simili, poi si svincola dal cono.

La parabola era vista come modello base, l'ellisse come "deficitaria" l'iperbole come "eccesso" (versione moderna di quella che chiamiamo eccentricità).

LE CONICHE



Apollonio non usa le proprietà focali (conosciute però da Archimede, che le usava per la parabola). Non si sa se fossero presenti nel libro VIII.



NICOLA' TRUDI (1811-1884)

- Professore di Calcolo infinitesimale all'Università di Napoli.
- Contributi scientifici: teoria delle funzioni ellittiche e i poligoni di Poncelet (teorema di Poncelet).



Facendo tesoro dei fitti contatti avuti con Jakob Steiner e con Carl Jacobi, che nell'aprile 1844 furono in viaggio a Napoli, Nicola Trudi fu tra i primi a elevare il livello degli studi matematici a Napoli.

NICOLA' TRUDI (1811-1884)

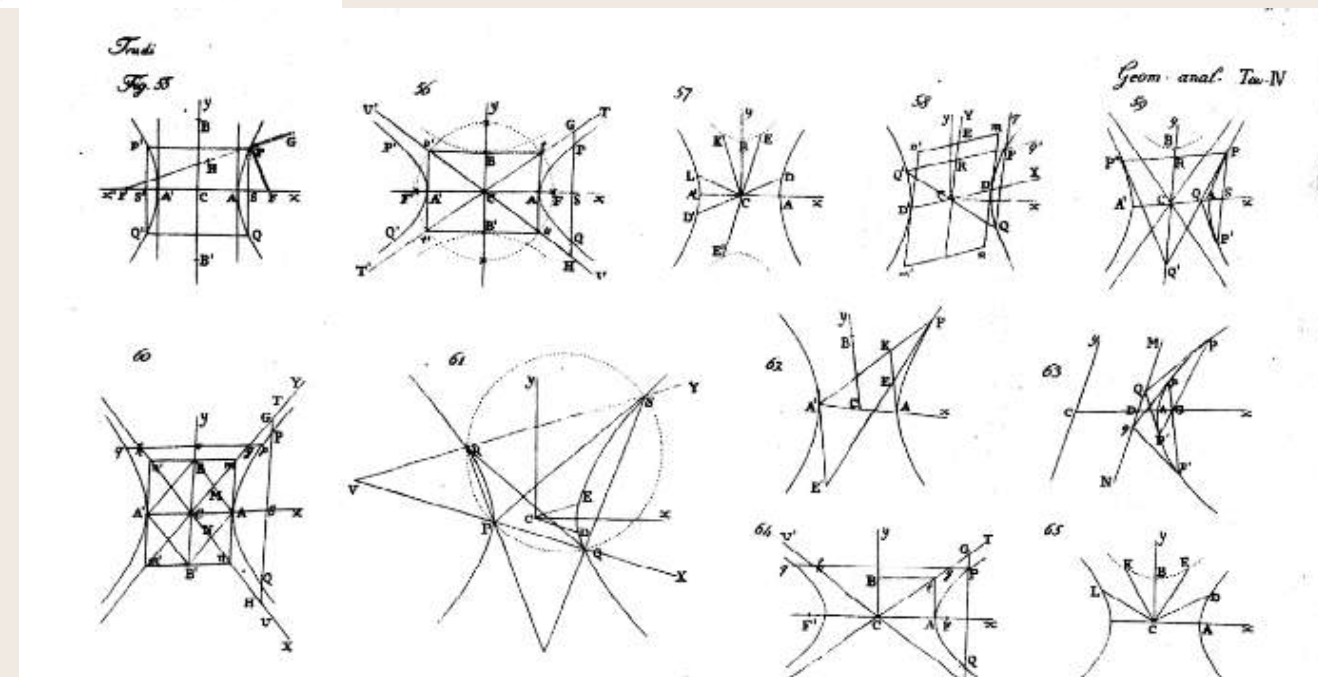
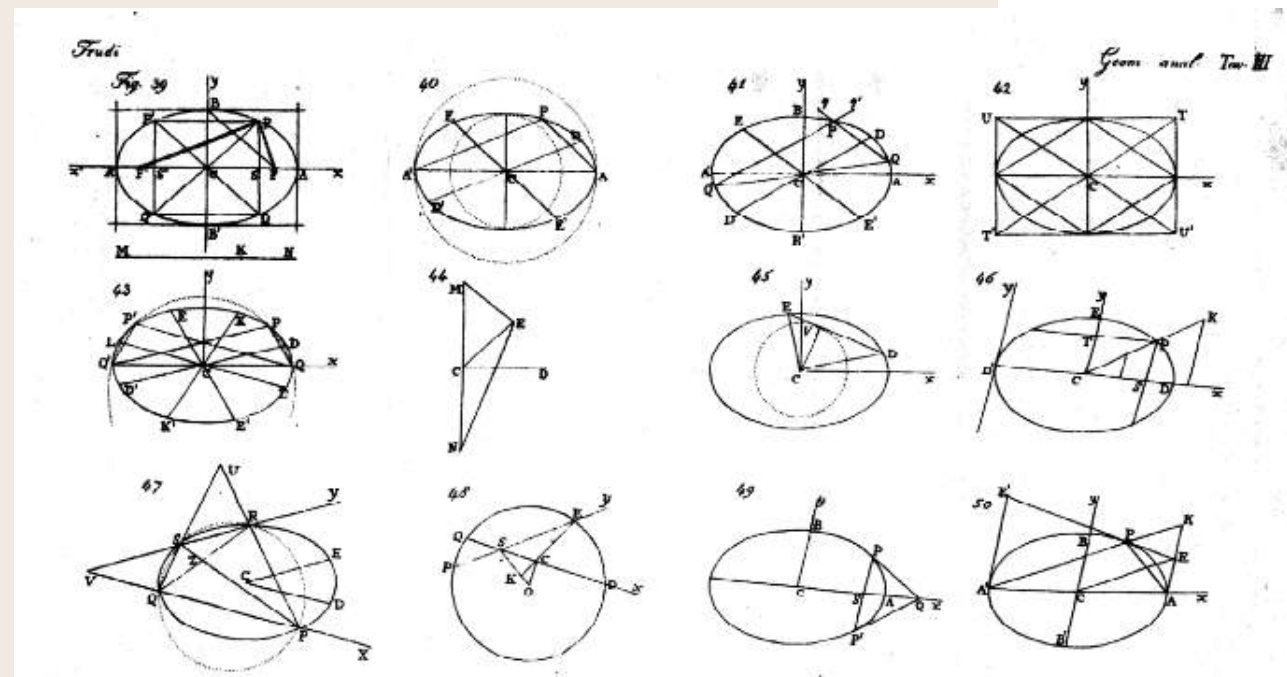
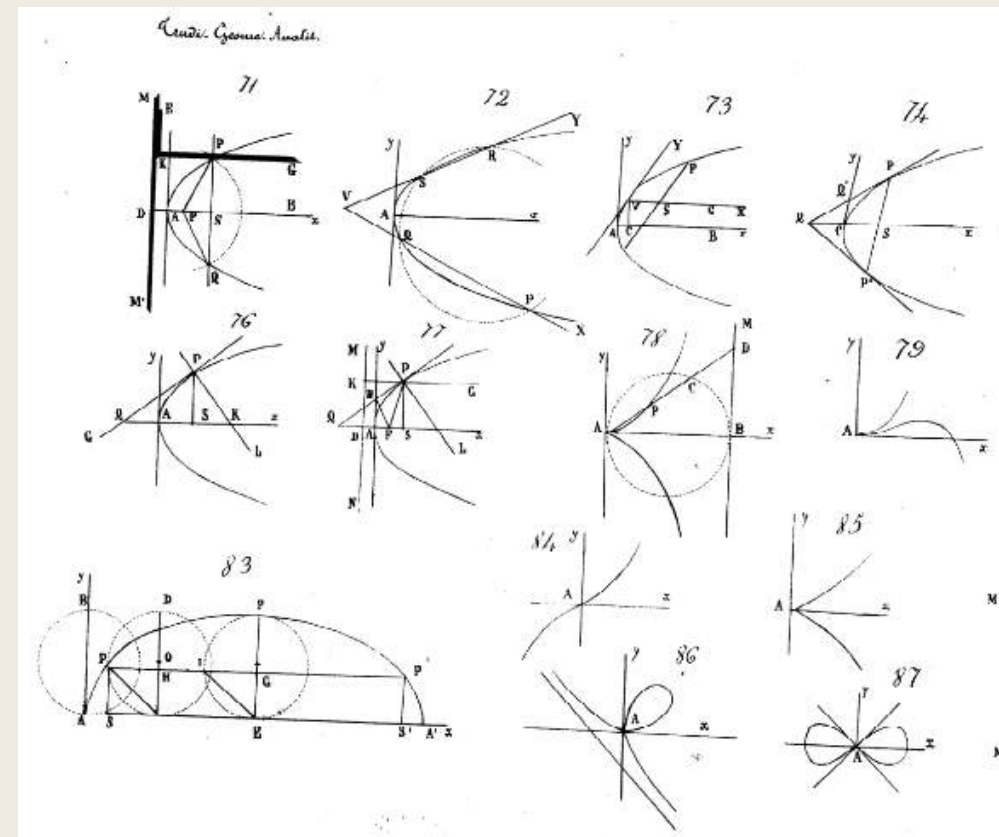


Nel 1862 pubblicò uno dei primi saggi sulla teoria dei determinanti (determinanti di Trudi) in contrasto con quelli di Vandermonde.



Tra gli allievi ricordiamo Pasquale del Pezzo, futuro esponente della Scuola Italiana di Geometria Algebrica.

ELEMENTI DI GEOMETRIA ANALITICA (TRUDI, 1852)



23. g. 64

ELEMENTI
DEI
CONICI
DI
GIUSEPPE LAMPUGNANI

PROFESSORE ORDINARIO DI MATEMATICA PURA ELEMENTARE
NELL' I. R. LICEO DI BERGAMO
E SOCIO ATTIVO DELL' ATENEO DI QUESTA CITTÀ.

SECONDA EDIZIONE

RIVEDUTA ED AUMENTATA DALL'AUTORE.



BERGAMO

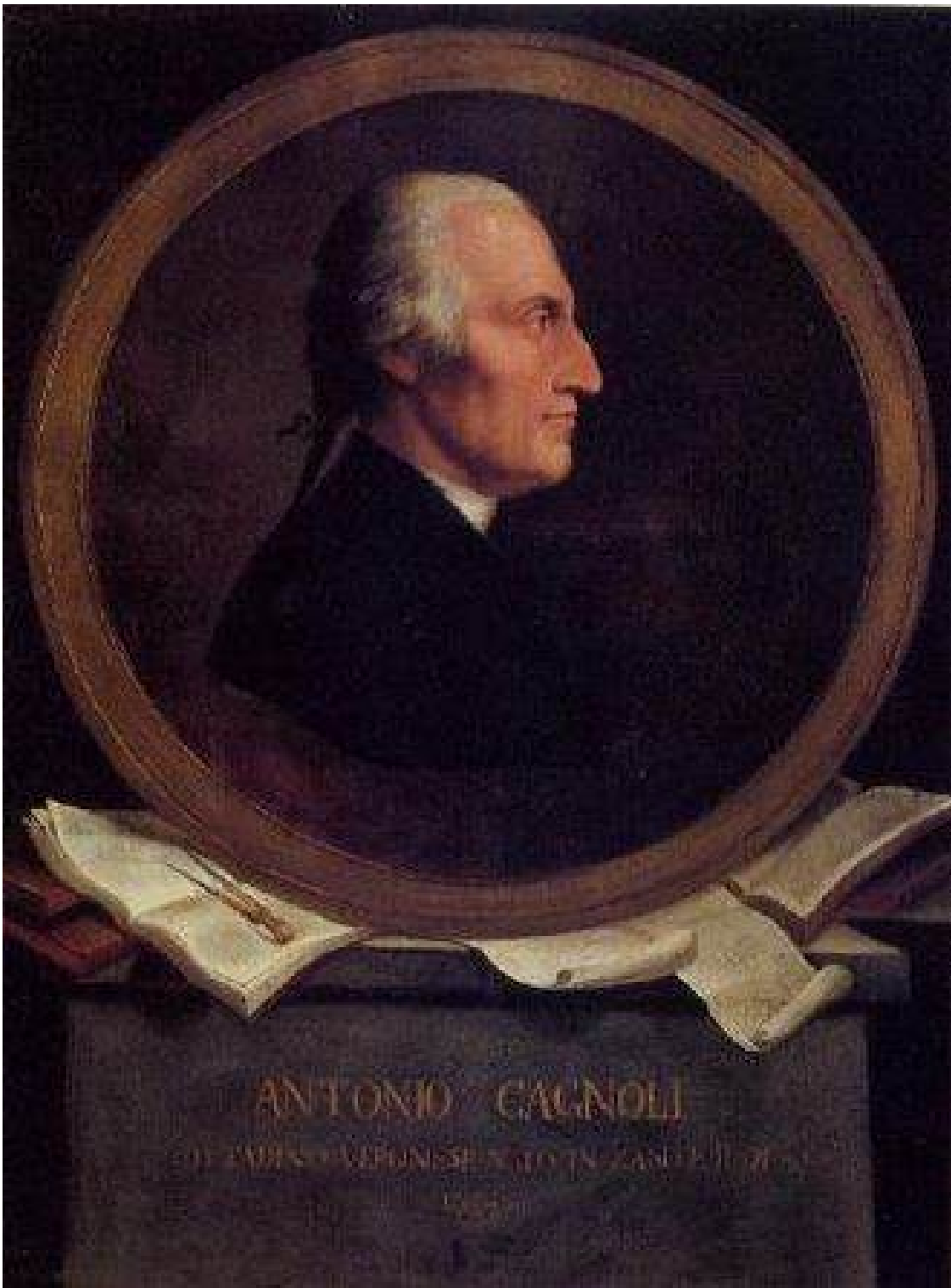
DALLA STAMPERIA MAZZOLENI

MDCCLXXIII.

GIUSEPPE LAMPUGNANI

- Professore ordinario di matematica pura elementare
- Nel 1823 pubblicò Elementi dei conici

ANTONIO CAGNOLI (1743-1816)



- Astronomo, matematico e diplomatico della Repubblica di Venezia
- Dal 1798: cattedra di Analisi Matematica presso la scuola militare di Modena
- Ideò un metodo per determinare le longitudini geografiche che fu premiato dalla Reale Accademia delle Scienze di Copenaghen. Nel 1786 pubblica il trattato *Trigonometria piana e sferica*

Sezioni coniche (1801)

GIOVANNI GORINI (1785-1825)

ELEMENTI
DI
MATEMATICA PURA

AD USO
DELLE UNIVERSITA', E LICEI
DEL REGNO LOMBARDO VENETO

DI
GIOVANNI GORINI
DOCTORE IN FILOSOFIA E MATEMATICA
P. S. DI MATEMATICA PURA
NELL'IMP. R. UNIVERSITA' DI PAVIA.

VOLUME PRIMO
CONTENENTE L'ALGEBRA.

EDIZIONE SECONDA MIGLIORATA.



PAVIA
DALLA TIPOGRAFIA DI PIETRO BIZZONI
1824.

- Dal 1813: professore supplente di Analisi all'Università di Pavia
- Morì tragicamente sbalzato da una carrozza da un cavallo imbizzarrito

Elementi di matematica pura (1824)

GIOVANNI BATTISTA DE SINNO (1811-1879)

CORSO COMPLETO
DI
MATEMATICHE PURE

DI
G. B. DE SINNO

Della Compagnia di Gesù

PROFESSORE NEL COLLEGIO NAPOLITANO DELLA MEDESIMA COMPAGNIA.

—
SECONDA EDIZIONE CON AGGIUNTE DELLO STESSO AUTORE

—
TOMO SECONDO



NAPOLI
DALLA STAMPERIA DEL FIBRENO
Trinità Maggiore 26.
—
1850

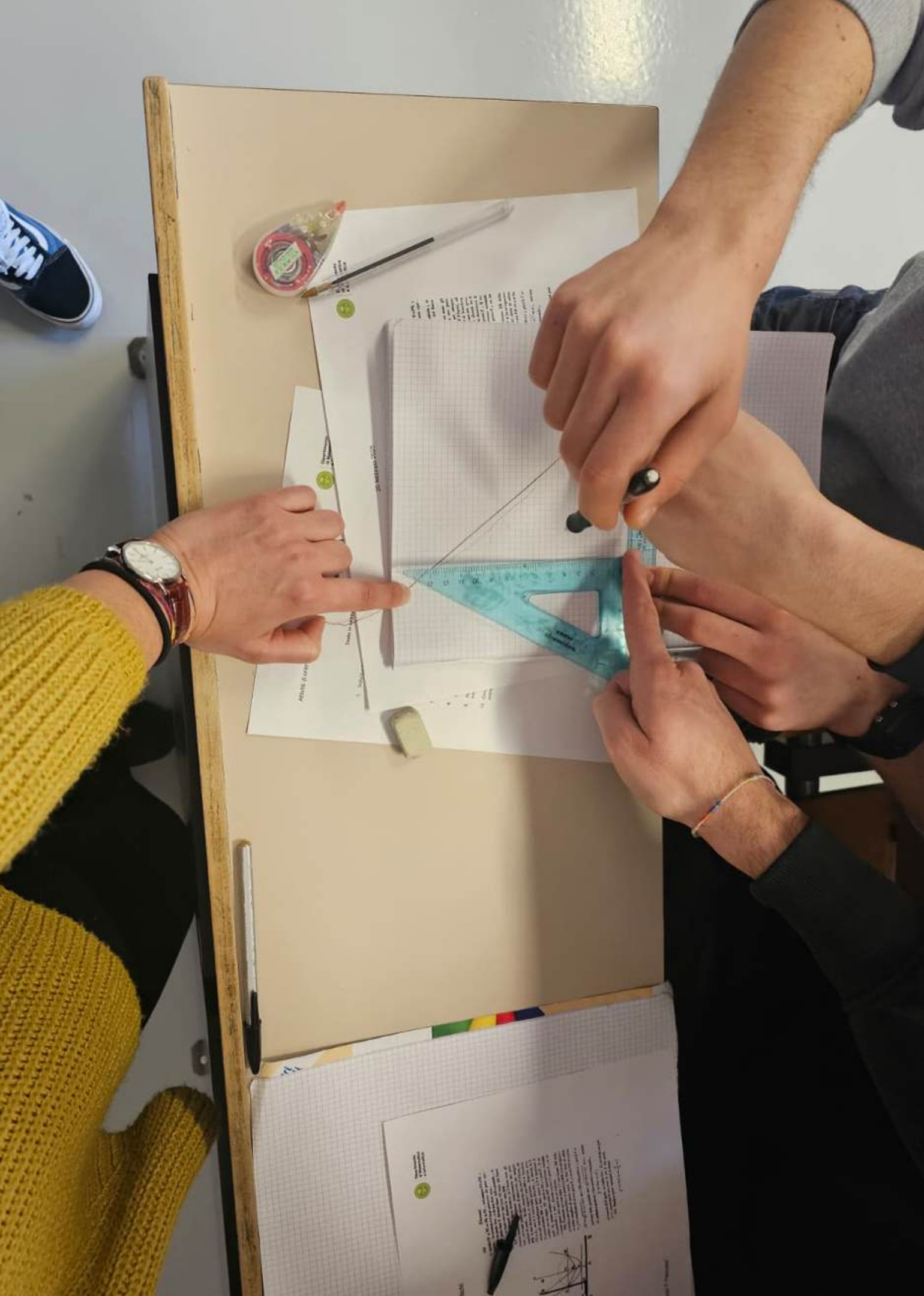


- Professore nel Collegio Napolitano della compagnia di Gesù

Corso completo di matematiche pure (1850)

DALLE FONTI STORICHE ALLA PRATICA D'AULA: COME INTEGRARE I LAVORI DI QUESTI ILLUSTRI MATEMATICI?





LE ATTIVITÀ LABORATORIALI

- Attività di orientamento per il Liceo Paleocapa di Rovigo
- Attività proposta all'interno del percorso Matematica e Italiano, presso l'IIS Rita Levi Montalcini di Argenta (FE)

ATTIVITÀ DI ORIENTAMENTO

Analisi di testi antichi

20 studenti

Classe terza di
liceo scientifico

Febbraio 2025

ANALISI DI TESTI ANTICHI

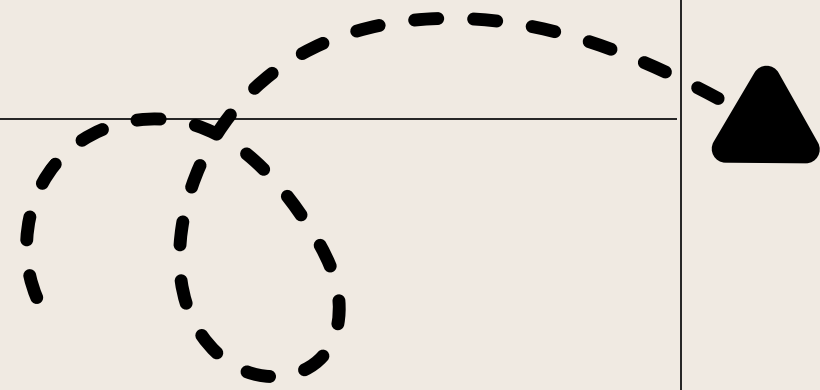
Università di Ferrara

20 febbraio 2025

Attività di orientamento per il Liceo Scientifico Statale "P. Paleocapa"



Dipartimento
di Matematica
e Informatica



! ?
**Che cos'è
una conica?**

- Quali coniche conoscete?
- Vi viene in mente qualche oggetto che ha la forma di una conica?
- Perché si chiamano coniche?

La parabola

DEFINIZIONE | Parabola

Dati nel piano una retta d e un punto $F \notin d$, si dice parabola di fuoco F e direttrice d il luogo dei punti del piano equidistanti da F e da d .

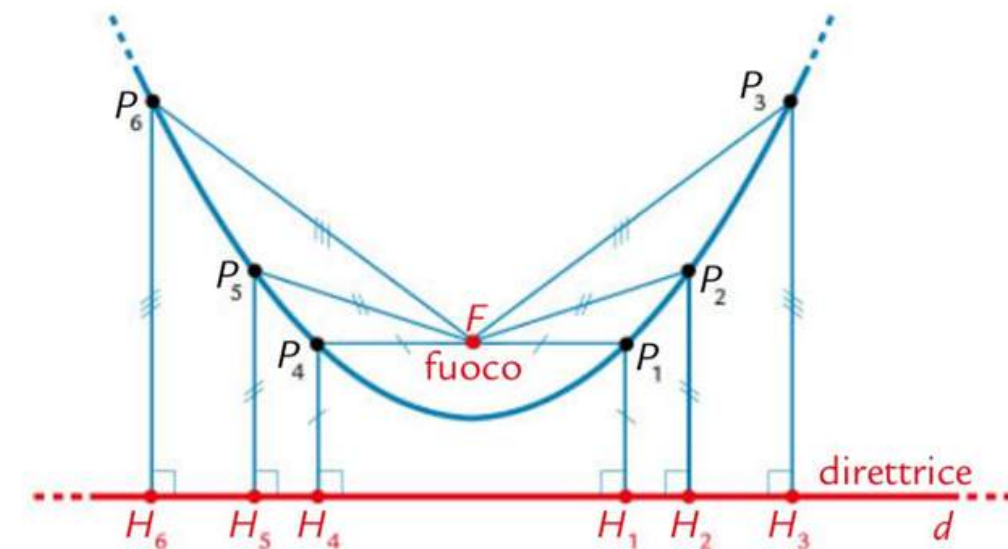


Figura 1 I punti P_1, P_2, \dots, P_6 appartengono alla parabola di fuoco F e direttrice la retta d , poiché risulta rispettivamente $\overline{P_1F} = \overline{P_1H_1}$, $\overline{P_2F} = \overline{P_2H_2}$, ..., $\overline{P_6F} = \overline{P_6H_6}$.

Costruzione della parabola



GeoGebra

Codice per accedere alla
Classroom GeoGebra:

QYVM EFQN

Esplorate la seguente costruzione con riga e compasso della parabola (potete visualizzare i passaggi nel protocollo di costruzione a destra della schermata GeoGebra)

Si disegni un punto F qualsiasi.

Si tracci la retta d che non passa per il punto F (nascondendo poi i due punti base di d).

Si prenda un punto A1 sulla retta d.

Si tracci la retta che passa per A1 ed F.

Si costruisca l'asse s del segmento A1F.

Si tracci la retta r perpendicolare a d in A1.

Si individui il punto P1 di intersezione tra r ed s.

Si consideri il triangolo FA1P1.

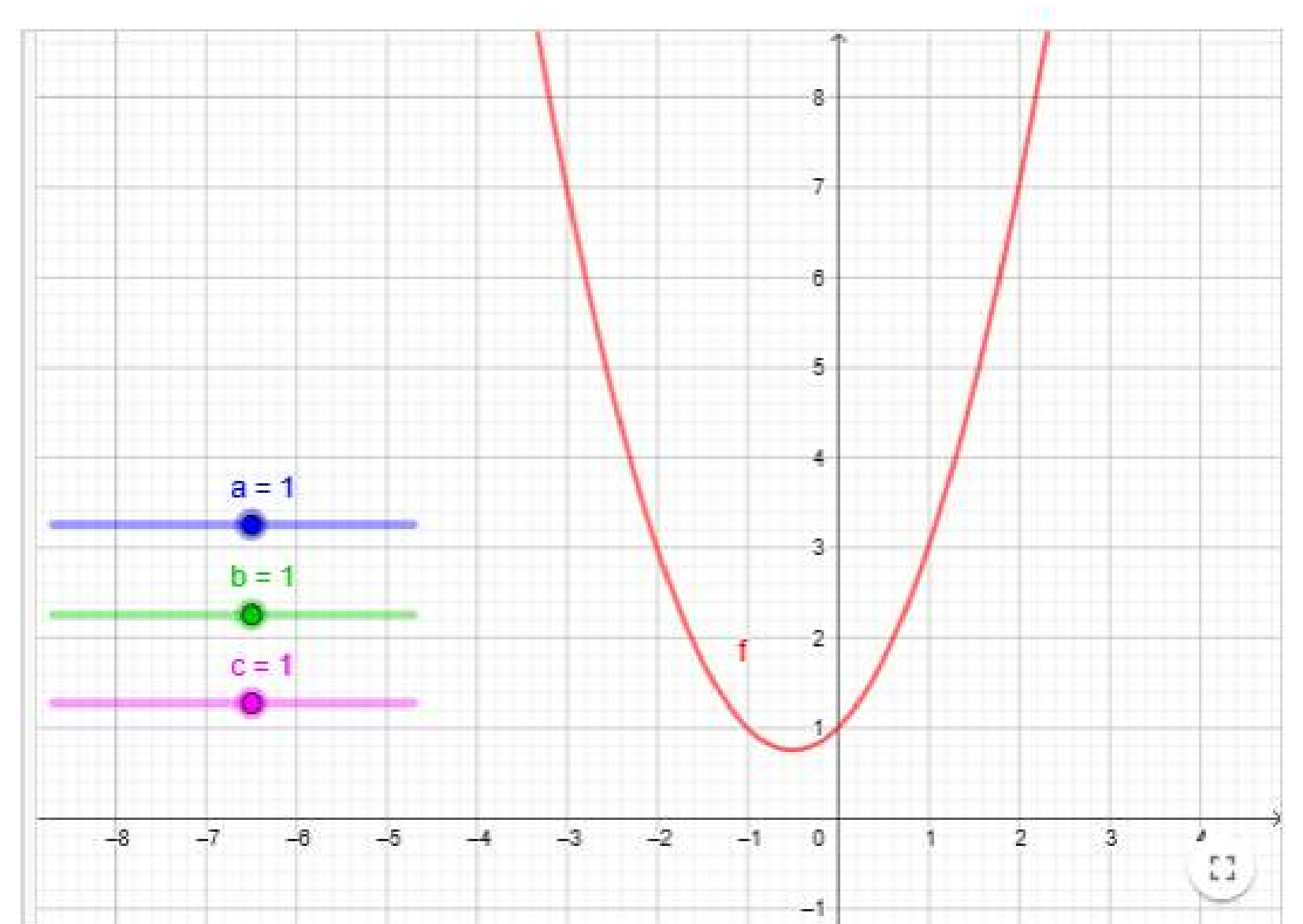
Scegliendo nuovi punti An sulla retta d e ripetendo i passi da 3-7 rispetto ai punti F ed An, si ottengono nuovi punti Pn (potete provare a costruirne alcuni nella schermata GeoGebra, se volete).

La curva passante per i punti Pn e la parabola di fuoco F e direttrice d.

	Nome	Descrizione
1	Punto F	
2	Punto A	
3	Punto B	
4	Retta d	Retta A, B
5	Punto A ₁	Punto su d
6	Retta f	Retta F, A ₁

L'equazione della parabola con asse parallelo all'asse y

L'equazione generica di una parabola con asse parallelo all'asse y è $y = ax^2 + bx + c$.
Come si modifica il grafico della parabola variando i parametri a , b e c ?



Scrivi qua le tue osservazioni.

Aa π

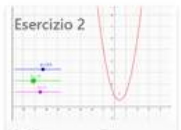

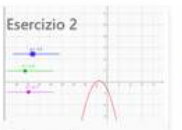
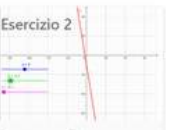

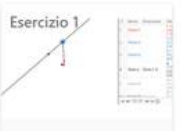


Inserisci la risposta qui...

L'equazione della parabola con asse parallelo all'asse y

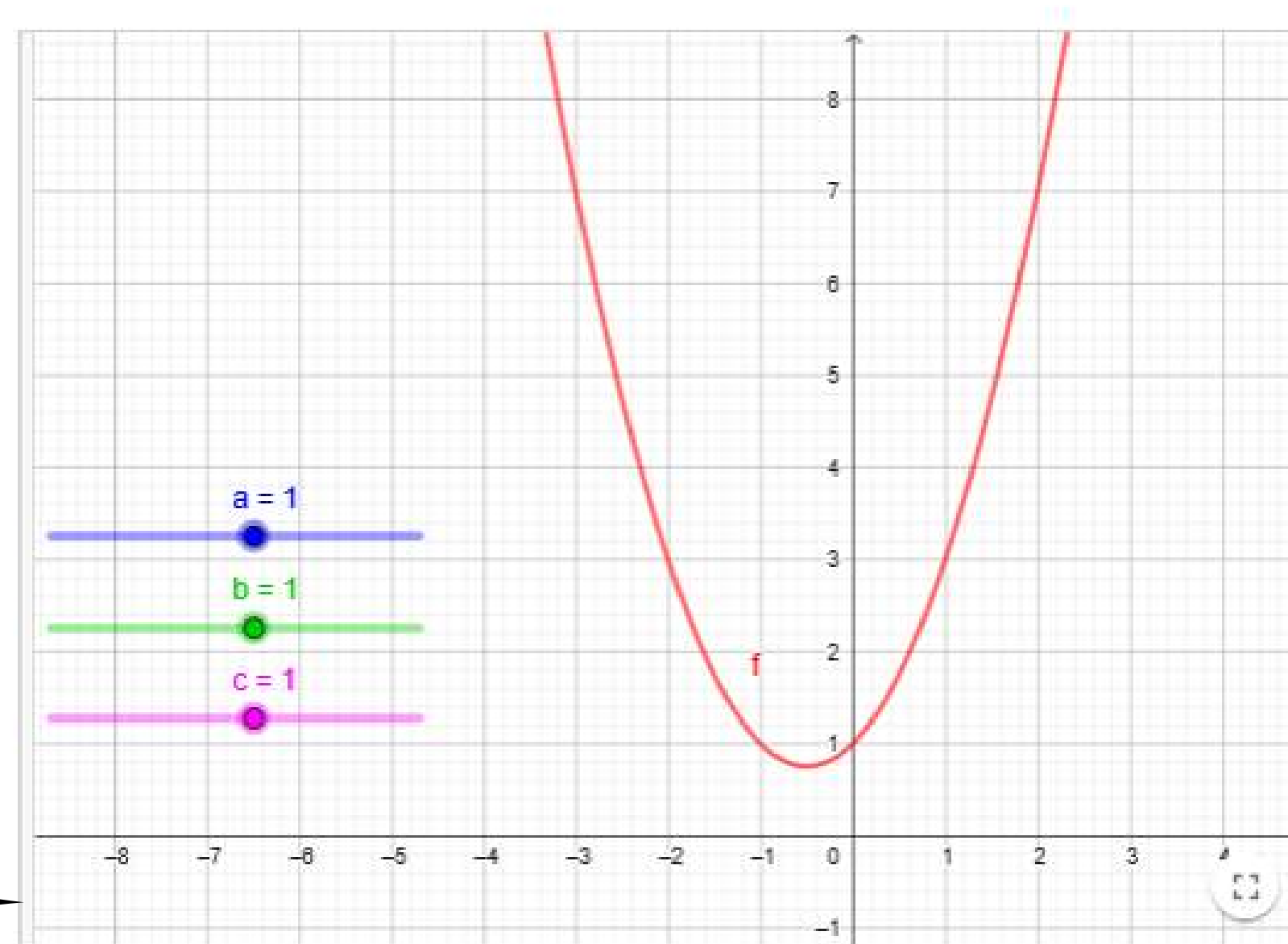
Potenzialità dell'ambiente
Classroom di GeoGebra

20 febbraio 2025 QIVM EFQN 13 studenti/i

Ordina per
Orario di ingresso

 Tartaruga anonima 2 di 3	 Struzzo anonimo 1 di 3	 Capra anonima 2 di 3	 Ragno anonimo 2 di 3
 Ornitorinco anonimo 2 di 3	 Libellula anonima 1 di 3	 Rana anonima 1 di 3	 Lontra anonima 1 di 3

L'equazione generica di una parabola con asse parallelo all'asse y è $y = ax^2 + bx + c$.
Come si modifica il grafico della parabola variando i parametri a , b e c ?



Scrivi qua le tue osservazioni.

Aa π

Inserisci la risposta qui...

"Della Parabola" (Trudi, 1852)

CAPITOLO VIII.

DELLA PARABOLA.

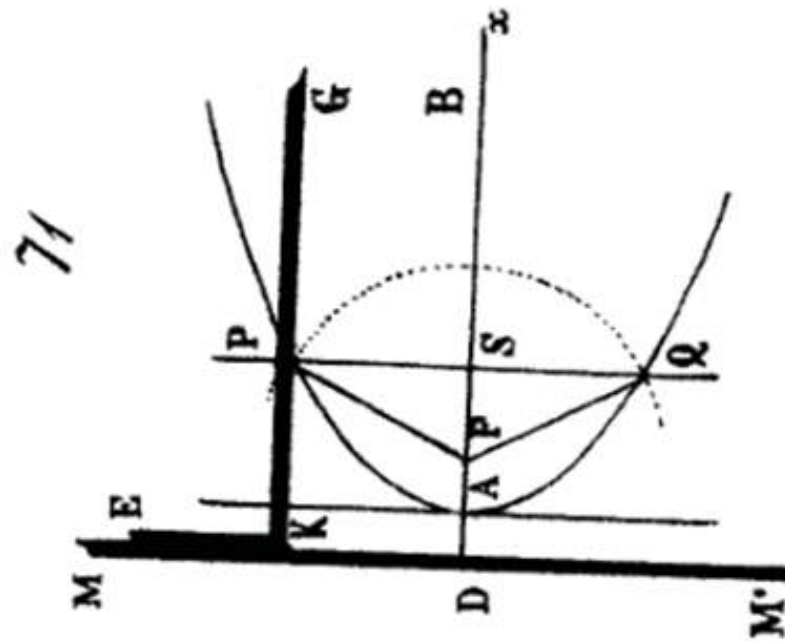
363. Un filo FPG [fig. 71] lungo quantè il lato KG di una squadra LKG sia fissato con un estremo in G, e con l'altro in un dato punto F; se si fa scorrere la squadra col lato KL lungo una riga fissa MM' mediante uno stiletto che la spinga tenendo il filo sempre teso d'oculto a KG, la punta dello stiletto descriverà una linea curva PAQ chiamata *Parabola*.

Questa curva è dunque situata tutta da quella parte della riga MM' in cui trovasi il punto F; e potendo la squadra farsi scorrere dall'una e dall'altra parte di questo punto, si vede che la parabola ha la forma di un arco continuo PAQ, i di cui rami AP, AQ procedono nella direzione di K verso G; e poichè KG, e quindi il filo, si può prendere di qualsivoglia lunghezza, è manifesto che i due rami della parabola sono infiniti.

Inoltre è chiaro che due punti di curva P, Q messi ad egual distanza, ed a parti opposte del punto F, sono ancora equidistanti dalla retta DFB perpendicolare ad MM'; in conseguenza ogni sua corda PQ perpendicolare a DB è bisecata da questa retta, la quale perciò è un asse della parabola (§. 473).

364. Or sia A il vertice di quest' asse, vale a dire quel punto di curva che si ottiene quando il lato KG della squadra passa per F, e pongasi $DB = KG$; per questa posizione della squadra rappresenterà AF una parte del filo, ed AB la rimanente porzione, laonde sarà $AF + AB = DB$, o quindi $AF = AD$. Da ciò si vede che il vertice della parabola cade nel mezzo della distanza dal punto fisso F alla riga MM'.

365. Del rimanente essendo per qualunque posizione del-



la squadra $PF + FG = PK + PG$, sarà sempre $PF = PK$; e perciò: *La parabola è il luogo geometrico dei punti equidistanti da un punto fisso, e da una data retta.*

366. Il punto fisso F chiamasi *fuoco* della parabola; si dice *ramo*, o *raggio vettore* ogni retta FP tirata dal fuoco alla curva; e chiamasi *direttrice* la retta MM'.

367. Egli è chiaro che la direttrice ed il fuoco sono gli elementi bastevoli a determinare compiutamente una parabola, ed è cosa molto agevole di descriverla per assegnazione di punti. In fatti supposto che sia F il fuoco, ed MM' la data direttrice, si segnerà l'asse DB e si biseccherà FD in A; sarà A il vertice della parabola. Dopo ciò prendendo sull'asse qualunque parte $DS > DA$, si eleverà da S la perpendicolare HH', e fatto centro in F si descriverà il cerchio con un raggio FP eguale a DS; i punti P, Q segnati da questo cerchio sulla HH' apparterranno entrambi alla parabola; e così, facendo variare il punto S, se ne avranno quanti altri punti se ne vogliono.

368. Prendendo per asse delle x l'asse istesso DB della parabola, e per asse delle y la direttrice MM' si ha un'equazione molto semplice di questa curva. In fatti dette al solito x, y le coordinate di un suo punto P, e messa $FD = a$ si ha

$FP = \sqrt{y^2 + (x-a)^2}$; ma è $FP = PK = DS = x$; perciò l'equazione della parabola sarà $\sqrt{y^2 + (x-a)^2} = x$, ovvero elevandone a quadrato i due membri e riducendo,

$$y^2 = 2ax - a^2;$$

ed essendo di 2° grado ne risulta che: *La parabola non può essere incontrata da una retta in più di due punti.*

369. Dando a quest' equazione la forma

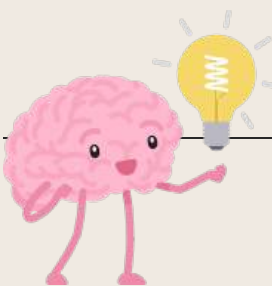
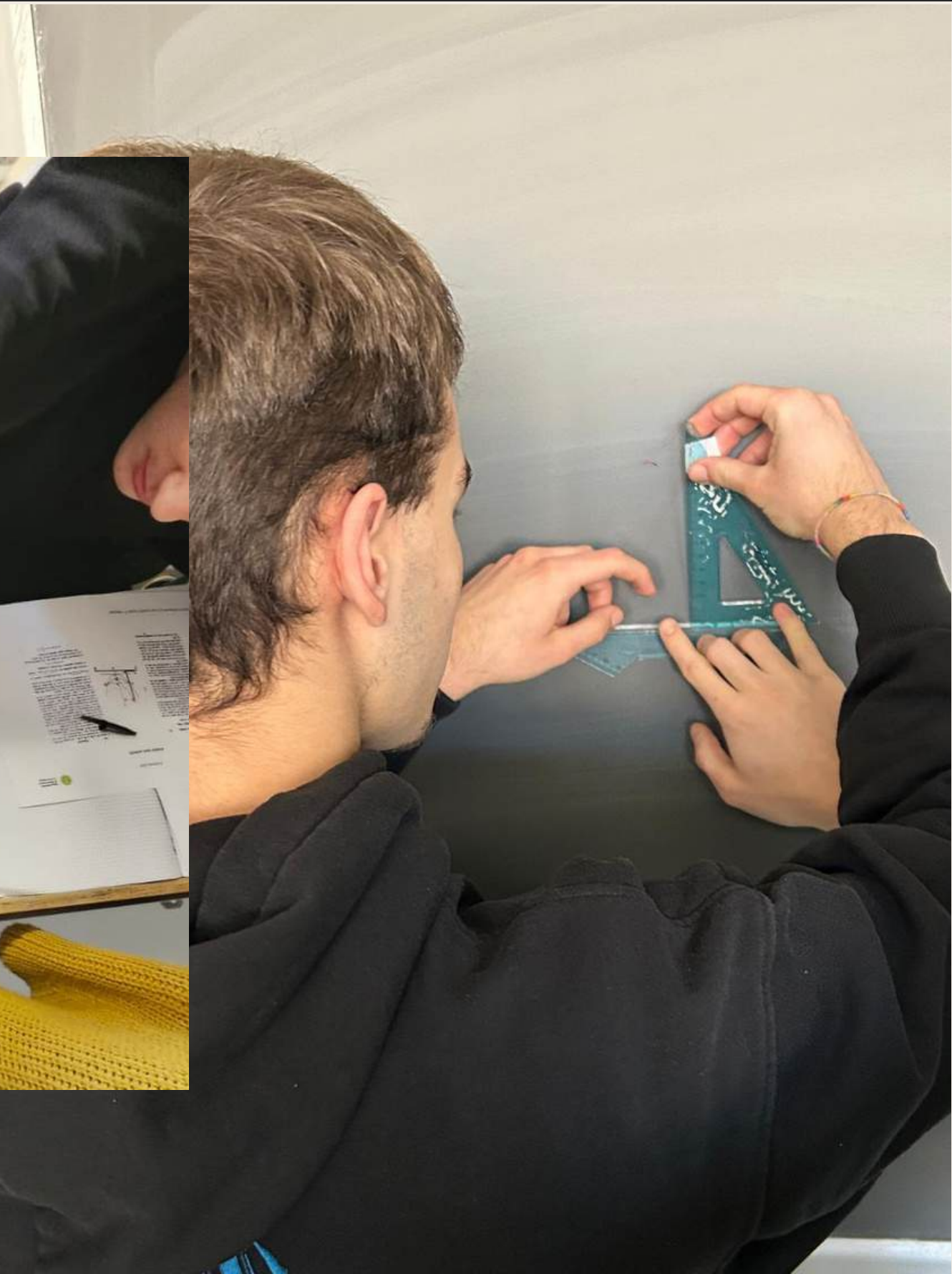
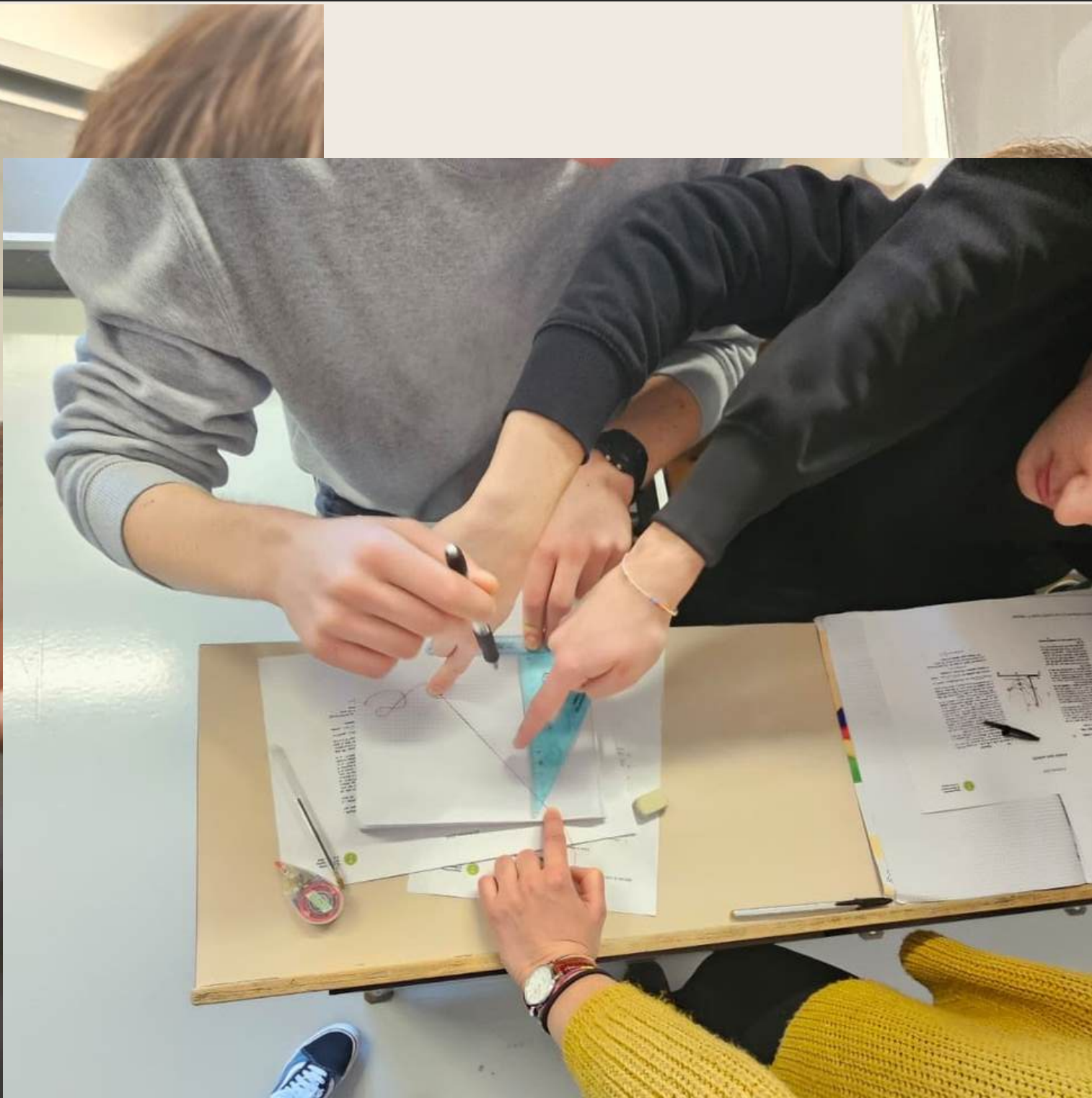
$$y^2 = 2a \left(x - \frac{1}{2} a \right)$$

“Della Parabola” (Trudi, 1852)

Riflettete sulla definizione del Trudi in piccoli gruppi e rispondete alle seguenti domande



1. Individua forme linguistiche inusuali.
2. Sono presenti frasi coordinate (paratassi) o subordinate (ipotassi)?
3. Sono presenti subordinate al gerundio o al participio passato?
4. Ci sono frasi senza verbo reggente (frasi nominali)?
5. Ci sono sostantivi usati al posto di verbi (nominalizzazioni)?
6. Individua termini tecnici inusuali. Da un punto di vista matematico, ci sono termini di cui non conosci il significato/non hai mai incontrato prima?
7. La presentazione della parabola è precisa/esaustiva nelle parti trattate?
8. Confronta quanto hai analizzato con la definizione del libro di testo. Quale testo è più chiaro? Perché? Quali differenze ci sono dal punto di vista matematico?
9. Riscrivi la definizione/affermazione nel tuo linguaggio. Cosa ti ricorda? È stato introdotto nello stesso modo a scuola? Confronta i due percorsi: quale preferisci?
10. Cerca di visualizzare/riprodurre quanto riportato nella definizione con un disegno o con un artefatto che useresti per spiegare il concetto se tu fossi l'insegnante.



CAPITOLO VIII.

DELLA PARABOLA.

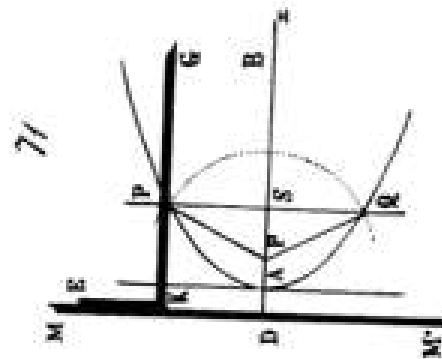
363. Un filo FPG [Fig. 77] lungo quanto il lato EG di una squadra LNK sia fissato con un estremo in G, e con l'altro in un dato punto F; se si fa scorrere la squadra col lato KL lungo una riga fissa MM' mediante uno stiletto che la spinga tenendo il filo sempre teso d'accanto a KG, la punta dello stiletto descriverà una linea curva PAQ chiamata Parabola.

Questa curva è dunque sita tutta da quella parte della riga MM' in cui trovasi il punto F; e potendo la squadra farsi scorrere dall'una e dall'altra parte di questo punto, si vede che la parabola ha la forma di un arco costituito dalle parti PAQ, i di cui rami AP, AQ procedono nella direzione di K verso G; e poichè KG, e quindi il filo, si può prendere di qualsivoglia lunghezza, è manifesto che i due rami della parabola sono infiniti.

Inoltre è chiaro che due punti di curva P, Q messi ad egual distanza, ed a parti opposte del punto F, sono ancora equidistanti dalla retta DFN perpendicolare ad MM'; in conseguenza ogni sua corda PQ perpendicolare a DFN è bisecata da questa retta, la quale perciò è un'asse della parabola (§. 173).

364. Or sia A il vertice di quest'asse, vale a dire quel punto di curva che si ottiene quando il lato EG della squadra passa per F, e pongasi DB = EG; per questa posizione della squadra rappresenterà AF una parte del filo, ed AB la rimanente porzione, haode anch' AF + AB = DB, e quindi AF = AD. Da ciò si vede che il vertice della parabola cade nel mezzo della distanza dal punto fisso F alla riga MM'.

365. Del rimanente essendo per qualunque posizione del-



la squadra $FF + FG = FK + FG$, sarà sempre $FF = FK$; e perciò: La parabola è il luogo geometrico dei punti equidistanti da un punto fisso, e da una data retta.

366. Il punto fisso F chiamasi fuoco della parabola; si dice ramo, o raggio settore ogni retta FP tirata dal fuoco alla curva; e chiamasi direttrice la retta MM'.

367. Egli è chiaro che la direttrice ed il fuoco sono gli elementi bastevoli a determinare completamente una parabola, ed è cosa molto agevole di descriverla per assegnazione di punti. In fatti supposto che sia F il fuoco, ed MM' la data direttrice, si segnerà l'asse DB e si biseccherà FD in A; sarà A il vertice della parabola. Dopo ciò procedendo sull'asse qualunque parte DS > DA, si eleverà da S la perpendicolare HH', e fatto centro in F si descriverà il cerchio con un raggio FF eguale a DS; i punti P, Q segnati da questo cerchio sulla HH' appariranno entrambi alla parabola; e così, facendo variare il punto S, se ne avranno quanti altri punti se ne vogliono.

368. Prendendo per asse delle x l'asse istesso DB della parabola, e per asse delle y la direttrice MM' si ha un'equazione molto semplice di questa curva. In fatti dette al solito x, y le coordinate di un suo punto P, o messa FD = a si ha $FP = \sqrt{y^2 + (x-a)^2}$; ma è $FP = FK = DS = x$; perciò l'equazione della parabola sarà $\sqrt{y^2 + (x-a)^2} = x$, ovvero elevandone a quadrato i due membri e riducendo,

$$y^2 = 2ax - a^2;$$

al secondo di 2° grado se risulta che: La parabola non può essere incontrata da una retta in più di due punti.

369. Dando a quest'equazione la forma

$$y^2 = 2a \left(x - \frac{1}{2} a \right)$$

VS

DEFINIZIONE | Parabola

Dati nel piano una retta d e un punto $F \notin d$, si dice parabola di fuoco F e direttrice d il luogo dei punti del piano equidistanti da F e da d .

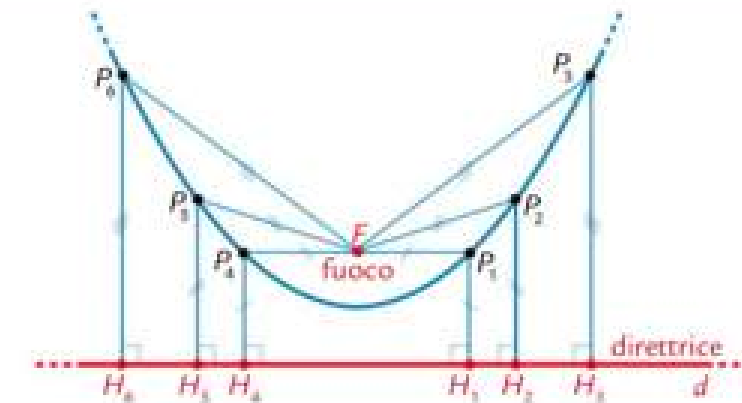


Figura 1 I punti P_1, P_2, \dots, P_6 appartengono alla parabola di fuoco F e direttrice la retta d , poiché risulta rispettivamente $\overline{P_1F} = \overline{P_1H_1}$, $\overline{P_2F} = \overline{P_2H_2}$, ..., $\overline{P_6F} = \overline{P_6H_6}$.

QUALI SONO LE ANALOGIE E/O DIFFERENZE?



APPROFONDIMENTO

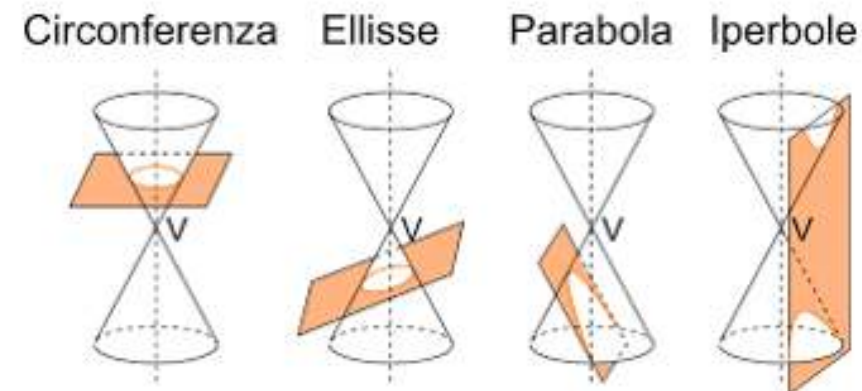
E PRIMA DEL
1852?

APOLLONIO DI PERGA

PERGA, 262 A.C. – ALESSANDRIA D'EGITTO, 190 A.C.



- Il «Grande Geometra»
- Autore de «Le Coniche», in cui definisce le coniche come sezioni di un cono a due falde



Come avrebbe risolto un problema geometrico apollonio?

Codice per accedere alla
Classroom GeoGebra:

W2XF HM94

ATTIVITÀ DEL LICEO MATEMATICO

Inserita nel progetto “Matematica e Italiano”

22 studenti

Classi terze di
liceo scientifico

Marzo 2025



La parabola nel 1800

di Geometria Analitica 185

CAPITOLO VIII.
DELLA PARABOLA.

363. Un filo FPG [Fig. 71] lungo quanto il lato KG di una squadra LKG sia fissato con un estremo in G, e con l'altro in un dato punto F; se si fa scorrere la squadra col lato KL lungo una riga fissa MM' mediante uno stiletto che la spinga tenendo il filo sempre teso d'accanto a KG, la punta dello stiletto descriverà una linea curva PAQ chiamata *Parabola*.

Questa curva è dunque situata tutta da quella parte della riga MM' in cui trovasi il punto F; e potendo la squadra farsi scorrere dall'una e dall'altra parte di questo punto, si vede che la parabola ha la forma di un arco continuo PAQ, i di cui rami AP, AQ procedono nella direzione di K verso G; e poichè KG, e quindi il filo, si può prendere di qualsivoglia lunghezza, è manifesto che i due rami della parabola sono infiniti.

Inoltre è chiaro che due punti di curva P, Q messi ad egual distanza, ed a parti opposte del punto F, sono ancora equidistanti dalla retta DFB perpendicolare ad MM'; in conseguenza ogni sua corda PQ perpendicolare a DB è bisecata da questa retta, la quale perciò è un asse della parabola (§. 473).

364. Or sia A il vertice di quest'asse, vale a dire quel punto di curva che si ottiene quando il lato KG della squadra passa per F, e pongasi DB = KG; per questa posizione della squadra rappresenterà AF una parte del filo, ed AB la rimanente porzione, laonde sarà AF + AB = DB, e quindi AF = AD. Da ciò si vede che il vertice della parabola cade nel mezzo della distanza dal punto fisso F alla riga MM'.

365. Del rimanente essendo per qualunque posizione del-

186 **Elementi**

la squadra $PF + PG = PK + PG$, sarà sempre $PF = PK$; e perciò: *La parabola è il luogo geometrico dei punti equidistanti da un punto fisso, e da una data retta.*

366. Il punto fisso F chiamasi *fuoco* della parabola; si dice *ramo*, o *raggio vettore* ogni retta FP tirata dal fuoco alla curva; e chiamasi *direttrice* la retta MM'.

367. Egli è chiaro che la direttrice ed il fuoco sono gli elementi bastevoli a determinare compiutamente una parabola, ed è cosa molto agevole di descriverla per assegnazione di punti. In fatti supposto che sia F il fuoco, ed MM' la data direttrice, si segnerà l'asse DB e si biseccherà FD in A; sarà A il vertice della parabola. Dopo ciò prendendo sull'asse qualunque parte $DS > DA$, si eleverà da S la perpendicolare HH', e fatto centro in F si descriverà il cerchio con un raggio FP eguale a DS; i punti P, Q seggati da questo cerchio sulla HH' apparterranno entrambi alla parabola; e così, facendo variare il punto S, se ne avranno quanti altri punti se ne vogliano.

368. Prendendo per asse delle x l'asse istesso DB della parabola, e per asse delle y la direttrice MM' si ha un'equazione molto semplice di questa curva. In fatti dette al solito x, y le coordinate di un suo punto P, e messa $FD = a$ si ha $FP = \sqrt{y^2 + (x-a)^2}$; ma è $FP = PK = DS = x$; perciò l'equazione della parabola sarà $\sqrt{y^2 + (x-a)^2} = x$, ovvero elevandosi a quadrato i due membri e riducendo,

$$y^2 = 2ax - a^2;$$

ed essendo di 2° grado ne risulta che: *La parabola non può essere incontrata da una retta in più di due punti.*

369. Dando a quest'equazione la forma

$$y^2 = 2a(x - \frac{1}{2}a)$$

Trudi, N. *Elementi di geometria analitica*, 1852



PROBLEMA.

§ 98. *Descrivere la parabola RMOS con un moto continuo.*

Si applichi una riga mobile IG perpendicolarmente ad una retta qualunque AB considerata per direttrice, e si prenda un filo FMG della lunghezza di detta riga, fissando uno de' suoi estremi in G, e l'altro nel punto F preso ad arbitrio per fuoco della parabola. In-

44 **LIBRO II. DELLA PARABOLA.**

Fig. 16. di si faccia scorrere la riga IG lungo la direttrice AB con un moto parallelo a se stessa, tenendo teso il filo FMG con uno stile M applicato continuamente alla riga IG. La curva RMOS descritta dallo stile M, sarà, in virtù del Corollario precedente, la parabola che si voleva descrivere.

Lampugnani, G. *Libro II della parabola*, 1823

Gli studenti avevano già lavorato sul testo del Trudi e del Lampugnani, anche dal punto di vista linguistico

PAROLE INUSUALI

Qui di seguito è presente una lista di forme linguistiche presenti nel manoscritto non molto utilizzate ai giorni nostri e le loro rielaborazioni odierne:

- "...e potendo la squadra farsi scorrere da un lato all'altro del punto..."
Si potrebbe elaborare come: "...e visto che la squadra si può far scorrere da un lato all'altro del punto...".
- "...i di cui rami..."
E' una terminologia arcaica che oggi si vede come: "...i cui rami...", senza il "di".
- ...egual distanza...
Oggi sarebbe "...uguale distanza...".
- "...in conseguenza..."
Sta ad indicare qualcosa che, viste le cose precedenti, è in una certa maniera: "...di conseguenza...", senza "in".
- "...la quale perciò..."
Questa affermazione è riferita ad una retta e serve per attribuirle qualcosa di conseguenza, mediante l'uso di "perciò".
Questo può essere modernizzato con: "...quindi è...".

COORDINATE E SUBORDINATE

Abbiamo riscontrato una grande presenza di virgole e quindi abbiamo dedotto la presenza di molte coordinate per asindeto.

2.1 subordinate al gerundio o al participio passato

- "Questa curva è dunque situata..."
(Paragrafo 363 riga 8)
- "Del rimanente essendo..."
(Paragrafo 365 prima riga)
- "Dopo ciò preudendo..."
(Paragrafo 367 riga 6)
- "I punti P, Q segnati da questo cerchio"
(Paragrafo 367 riga 8)

NOMINALIZZAZIONI

- **bastevoli**
(paragrafo 367, seconda riga)
- **assegnazione**
(paragrafo 367, prima riga)

Gli studenti avevano già lavorato sul testo del Trudi e del Lampugnani, anche dal punto di vista linguistico

DIFFERENZE CON OGGI

Nel testo storico, la parabola è definita come il luogo geometrico dei punti equidistanti da un punto fisso (il fuoco) e da una retta fissa (la direttrice). Vengono utilizzati termini come "filo", "squadra" e descrizioni dettagliate delle costruzioni geometriche. Nel nostro libro la parabola è definita in modo simile, ma con l'uso di frasi più brevi e un linguaggio diretto: "Una parabola è il luogo geometrico dei punti che sono equidistanti da un punto fisso noto come fuoco e una retta fissa chiamata direttrice". Inoltre, le espressioni matematiche vengono generalmente esplicitate con meno terminologia geometrica descrittiva.

6.1 esaustività dell'affermazione

Troviamo comunque l'affermazione di parabola abbastanza esaustiva, forse anche più facilmente comprensibile per un pubblico diverso da quello studentesco, meno abituato a termini tecnici.

Gli studenti avevano già lavorato sul testo del Trudi e del Lampugnani, anche dal punto di vista linguistico

TERMINI TECNICI INUSUALI

abbiamo trovato vari termini tecnici non usuali nel testo, molte delle quali non avevamo mai incontrato prima, come ad esempio:

- equal distanza
- mezzo della distanza
- raggio vettore
- elementi bastevoli

TESTO RISCRITTO

Detto a parole nostre la parabola è:

la curva che include i punti con distanza uguale da un punto chiamato fuoco e da una retta chiamata direttrice.

Notiamo come questa descrizione sia molto più simile a quella del libro che a quella del testo storico.

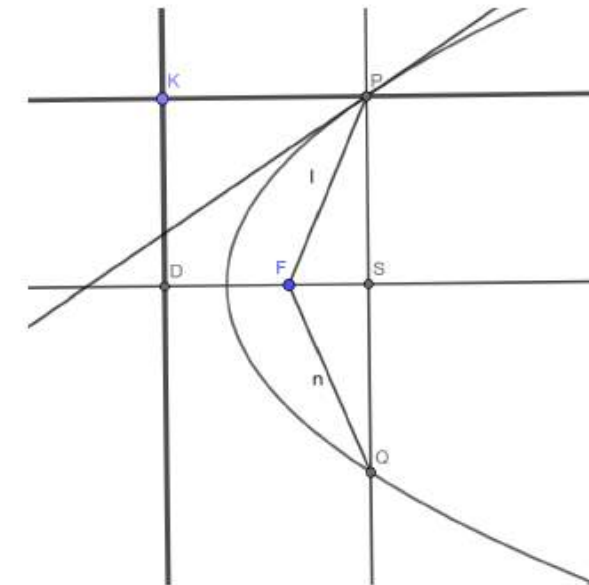


Figura 8.1: Rappresentazione su Geogebra da definizione



La circonferenza del Trudi

Trudi, N. *Elementi di geometria analitica*, 1852

CAPITOLO IV.

DEL CERCHIO.

126. L'equazione del cerchio già trovata altrove (§. 68) si ottiene in un modo più semplice riguardando questa curva come il luogo de' punti equidistanti da un punto fisso C [fig. 49]. In fatti se si prendono per assi due rette tra loro perpendicolari condotte per questo punto, e si dinoti con (x, y) un punto qualunque della curva, si avrà $CP = \sqrt{y^2 + x^2}$; in conseguenza dinotando con r questa distanza, l'equazione del cerchio sarà $\sqrt{y^2 + x^2} = r$, ovvero

$$y^2 + x^2 = r^2. \quad (1)$$

127. Se un solo degli assi passa per C e sia per esempio quello delle x , rimanendo l'origine in un punto qualunque di quest'asse, l'equazione sarebbe invece

$$y^2 + (x - \alpha)^2 = r^2, \quad (2)$$

essendo α la distanza dal centro all'origine. Che se l'origine si faccia cadere in un vertice del diametro che ora fa da asse delle x , sarà $\alpha = r$, e l'equazione diviene in tal caso

$$y^2 = 2rx - x^2. \quad (3)$$

Se poi si prende per origine un punto qualunque e si dinoti il centro con (α, β) , l'equazione del cerchio sarà

$$(y - \beta)^2 + (x - \alpha)^2 = r^2,$$

ovvero, sviluppando le potenze ed ordinando

$$y^2 + x^2 - 2\beta y - 2\alpha x + (\beta^2 + \alpha^2 - r^2) = 0; \quad (4)$$

e dicesi equazione generale del cerchio in coordinate ortogonali mentre da essa possono desumersi le equazioni che gli

convengono per ogni particolare posizione di assi ortogonali. Così ponendovi $\beta = 0$ si ritorna alla (2); se oltre a $\beta = 0$ si faccia $\alpha = r$ si ritorna alla (3); e ponendovi ad un tempo $\beta = 0$ $\alpha = 0$ si ha di nuovo l'equazione (1).

128. Qualora l'origine cadesse in un punto qualunque del cerchio sarebbe $\beta^2 + \alpha^2 = r^2$, e l'equazione (4) perdendo l'ultimo termine, cioè il termine indipendente dalle variabili, si ridurrebbe ad

$$y^2 + x^2 - 2\beta y - 2\alpha x = 0.$$

E quest'equazione è, com'esser dovea, verificata dalle coordinate $x = 0, y = 0$, che definiscono l'origine, la quale è attualmente un punto della curva. Del rimanente è chiaro che questa circonferenza non è già particolare al cerchio, ma dee verificarsi in generale per qualunque linea la cui equazione manchi di termine noto.

129. Egli è ben chiaro che in tutte queste diverse forme l'equazione conserverà sempre i due termini in y ed x , mentre nell'equazione generale essi hanno l'unità per coefficiente, e quindi non possono annullarsi; ed inoltre è manifesto che questi due termini ridotti ad un membro avranno i medesimi segni. Segue da ciò che la forma generica dell'equazione del cerchio in coordinate ortogonali è

$$y^2 + x^2 + D_1 y + E_1 x + F = 0, \quad (5)$$

ovvero

$$A y^2 + A x^2 + D y + E x + F = 0$$

mentre l'ultima prende la forma della prima col dividerne tutt'i termini per A .

Viceversa ogni equazione riducibile a queste forme ha un cerchio per luogo geometrico se gli assi sono ortogonali. In fatti, se ciò è vero, chiamando α, β le coordinate del suo centro ed r il raggio, dovrà l'equazione (5) essere identica alla (4), e quindi si avranno le relazioni

$$-2\beta = D, \quad -2\alpha = E, \quad \beta^2 + \alpha^2 - r^2 = F$$

dalle quali si ricava

$$\beta = -\frac{1}{2} D, \quad \alpha = -\frac{1}{2} E, \quad r = \sqrt{\frac{D^2 + E^2}{4} - F}.$$

Ora il cerchio il cui centro e l'raggio sono determinati da questi valori ha per equazione

$$\left(y + \frac{1}{2} D\right)^2 + \left(x + \frac{1}{2} E\right)^2 = \frac{D^2 + E^2}{4} - F,$$

e quest'equazione sviluppata coincide con la proposta, dunque quel cerchio sarà il suo luogo geometrico.

130. Mediante i precedenti valori di α, β , ed r può determinarsi il centro e l'raggio di un cerchio del quale sia data l'equazione, e quindi descrivere la curva; ma è bene di tener presente che, essendo $\alpha = -\frac{1}{2} E$, e

$\beta = -\frac{1}{2} D$, così: il centro si determina prendendo sugli assi delle x e delle y le parti AN ed AM [fig. 31] eguali alle metà dei coefficienti dei termini in x ed y a 1° grado e seguiti cambiati, e poscia elevando agli assi le perpendicolari NC, MC ; il punto C sarà il centro cercato.

131. Se gli assi sono obliqui e ad angolo θ l'equazione del cerchio sarebbe (§. 66)

$$(y - \beta)^2 + (x - \alpha)^2 + 2(y - \beta)(x - \alpha)\cos\theta = r^2,$$

ossia

$$y^2 + 2\cos\theta xy + x^2 - 2(\beta + \alpha\cos\theta)y - 2(\alpha + \beta\cos\theta)x + \beta^2 + \alpha^2 + 2\alpha\beta\cos\theta - r^2 = 0;$$

e la sua forma generica sarà

$$y^2 + 2\cos\theta xy + x^2 + D_1 y + E_1 x + F = 0, \quad (6)$$



La circonferenza del Trudi

Trudi, N. *Elementi di geometria analitica*, 1852

forma la quale non differisce dalla (5) che per trovarvi a di più il termine in xy , moltiplicato per $2 \cos \theta$, cioè il prodotto delle variabili moltiplicato pe' l doppio coseno dell'angolo degli assi.

132. Per l'opposto ogni equazione riducibile a questa forma ha un cerchio per luogo geometrico, se θ sia l'angolo degli assi; e ciò si dimostra come nel caso delle coordinate ortogonali. Paragonando l'ultima con la penultima equazione si hanno le tre relazioni

$$\beta + x \cos \theta = -\frac{1}{2} D, \alpha + \beta \cos \theta = -\frac{1}{2} E, \alpha' + \beta' + 2\alpha\beta \cos \theta - r^2 = F,$$

dalle quali si traggono per α, β, r i seguenti valori

$$\alpha = \frac{D \cos \theta - E}{2(1 - \cos^2 \theta)}, \beta = \frac{E \cos \theta - D}{2(1 - \cos^2 \theta)}, r = \sqrt{\frac{D^2 + E^2 - 2DE \cos \theta}{4(1 - \cos^2 \theta)}} - F.$$

Però il centro si può costruire come nel caso degli assi ortogonali, cioè: prendendo sugli assi delle x e delle y le parti AN ed AM [fig. 32], eguali rispettivamente a $-\frac{1}{2} E$ e $-\frac{1}{2} D$, e poi tirando pei punti N ed M le perpendicolari NC, MC ; così sarà C il centro del cerchio. In fatti dinotando con α', β' le coordinate CM', CN' di questo punto, pei triangoli CMM', CNN' , che hanno gli angoli in M', N' , eguali a θ si ha $MM' = \alpha' \cos \theta$, $NN' = \beta' \cos \theta$; ma è $AM' + MM' = AM$, ed $AN' + NN' = AN$, dunque si avrà pure

$$\beta' + \alpha' \cos \theta = -\frac{1}{2} D, \alpha' + \beta' \cos \theta = -\frac{1}{2} E;$$

e perciò i valori di α', β' saranno identici a quelli di α, β poc' anzi scritti; quindi il punto C sarà il centro del cerchio rappresentato dall'equazione (6).

133. Ciascuna delle diverse equazioni rappresentanti il cerchio può dar luogo immediatamente a qualche proprietà

di questa curva. Così dall'equazione $y' + x' = r$ traendosi $y' = r - x' = (r + x)(r - x)$, se PS [fig. 19] sia un'ordinata all'asse delle x , cioè al diametro BB' , sarà $r + x = SB'$, $r - x = SB$, e quindi

$$PS^2 = SB' \times SB;$$

vale a dire: Il quadrato dell'ordinata ad un diametro è eguale al rettangolo de' due segmenti in cui quella lo divide.

Se si considera l'equazione $y' + x' = 2rx$, per la quale l'origine è in un vertice B' del diametro, si ha $y' + x' = B'P^2$, $2rx = BB' \times B'S$; e perciò

$$B'P^2 = BB' \times B'S;$$

in conseguenza: la corda $B'P$ è media proporzionale tra il diametro e l'segmento $B'S$.

134. Consideriamo ancora l'equazione generale in coordinate oblique

$$y' + 2 \cos \theta xy + x' + Dy + Ex + F = 0,$$

e supponiamo presi per assi due rette qualunque Ax, Ay [fig. 33]; se si fa nell'equazione una volta $y=0$, ed una volta $x=0$, si hanno le due equazioni di 2° grado in x ed y

$$x^2 + Ex + F = 0, \quad y' + Dy + F = 0,$$

e da ciò risulta che ciascuno degli assi può solo in due punti segare il cerchio; ma questi assi son due rette arbitrarie, adunque: Una retta non può incontrare un cerchio in più di due punti.

Ora le due rette Ax, Ay seglieranno effettivamente il cerchio se sono reali tanto le radici della equazione in x quanto quelle dell'equazione in y ; il che esige che sieno soddisfatte le due condizioni $\frac{1}{4} E^2 > F$,

$\frac{1}{4} D^2 > F$; e supposto che ciò abbia luogo sieno B, B' i punti

d'incontro con Ax , e D, D' quelli con Ay ; saranno AB, AB' le due radici della prima equazione, ed AD, AD' quelle della seconda. Ma il prodotto delle due radici della prima è eguale al prodotto delle due radici della seconda, perchè i loro ultimi termini sono eguali, in conseguenza si avrà

$$AB \times AB' = AD \times AD',$$

e da ciò il conosciuto teorema: Se nel cerchio si seguono due rette il prodotto dei segmenti dell'una è eguale al prodotto dei segmenti dell'altra.

Ma non tutte le proprietà del cerchio possono leggeri immediatamente nelle equazioni che gli convengono, e per alcune si richiede uno studio più diligente ed accurato. Intanto or ci faremo a sviluppare quelle che s'imparano a conoscere negli elementi di geometria.

135. Si è riconosciuto poc' anzi (§. prec.) che una retta ed un cerchio non possono intersecarsi in più di due punti; ma questa circostanza merita di essere rilevata in un modo più diretto. Sieno

$$y = px + q \tag{7}$$

$$y' + x' = r \tag{8}$$

le equazioni di una retta e di un cerchio; se queste due linee hanno un punto di comune dinotando con x' ed y' le sue coordinate le medesime dovranno verificare le equazioni di entrambe, e quindi si avranno le due relazioni

$$y' = px' + q$$

$$y' + x' = r$$

le quali determinano i valori delle incognite x', y' . Ma è chiaro che tutto ciò equivale a supporre consistenti le equazioni (7) e (8); val quanto dire a supporre che le variabili x, y abbiano rispettivamente nell'una e nell'altra i medesimi valori; ipotesi che da variabili le cas-



La circonferenza del Trudi

Trudi, N. *Elementi di geometria analitica*, 1852

di Geometria Analitica. 85

gia in incognite; ed allora sarà lecito di combinare le due equazioni nel modo che si conviene affia di trarne quei valori di x ed y che possono soddisfare ad entrambe. Ora questi valori sono evidentemente determinati da equazioni di 2° grado; quindi r ha due coppie di valori di x ed y che possono verificare ad un tempo le due equazioni, e perciò due punti che possono esser comuni alle due linee.

136. Eliminando y si ha l'equazione di 2° grado in x

$$(p' + 1)x^2 + 2pqx = r - q^2,$$

e le sue radici esprimeranno le ascisse dei due punti in cui la retta può segare il cerchio. Dinotando queste ascisse con x' ed x'' si avrà

$$x' = \frac{-pq + \sqrt{r'(p'+1) - q^2}}{p'+1}, \quad x'' = \frac{-pq - \sqrt{r'(p'+1) - q^2}}{p'+1}$$

ed è poi manifesto che per avere le ordinate corrispondenti a ciascuna ascissa convenga sostituirle ad una ad una nell'equazione della retta ch'è di 1° grado, e così chiamandole y' ed y'' si otterrà

$$y' = \frac{q + p\sqrt{r'(p'+1) - q^2}}{p'+1}, \quad y'' = \frac{q - p\sqrt{r'(p'+1) - q^2}}{p'+1}$$

Si scorge da queste espressioni che le due intersezioni tra la retta e il cerchio saranno reali e distinte se la quantità $r'(p'+1) - q^2$ esistente sotto il radicale sia positiva; che se questa quantità sia negativa le due intersezioni saranno entrambe immaginarie; vale a dire in questo caso le due linee non potranno incontrarsi; e finalmente se quella quantità sia nulla allora eguagliandosi tanto le ascisse delle due intersezioni quante le loro ordinate, le due intersezioni saranno bensì reali, ma coincidenti, cioè raccolte e confuse in punto solo; quindi la retta potrà solo in questo punto incontrare il cerchio, e gli sarà perciò tangente.

86 Elementi

137. Perchè dunque la retta (7) possa essere tangente del cerchio fa d'uopo sia verificata la relazione

$$r'(p' + 1) = q^2,$$

ed in tal caso le coordinate x' , y' del punto di contatto saranno espresse da

$$x' = \frac{-pq}{p'+1}, \quad y' = \frac{q}{p'+1}$$

ovvero, per essere $p'+1 = \frac{q^2}{r'}$, da

$$x' = -\frac{pr'}{q}, \quad y' = \frac{r'}{q};$$

e ne risulta

$$p = -\frac{x'}{y'}, \quad q = \frac{r'}{y'}$$

Se questi valori di p e q si sostituiscono nell'equazione (7) ch'esprime una retta comunque situata a riguardo del cerchio, la medesima si cangerà nell'equazione della retta che tocca il cerchio nel punto (x', y') ; laonde l'equazione della tangente in questo punto sarà

$$y = -\frac{x'}{y'}x + \frac{r'}{y'}$$

ed ancora, facendo sparire i fratti,

$$yy' + xx' = r'.$$

Sotto la prima di queste due forme si vede che la tangente è perpendicolare alla retta che ha per equazione $y = \frac{y'}{x'}x$ (§. 105), cioè al raggio che passa pe'l contatto; in conseguenza se si tratta di condurre la tangente al cerchio per un punto (x', y') esistente sulla curva, non si ha che a tirare in quel punto la perpendicolare al raggio corrispondente, com'è già noto.

di Geometria Analitica. 87

138. Se poi debba tirarsi la tangente per un punto (α, β) esteriore al cerchio, le coordinate x' , y' del contatto saranno incognite; ma trovandosi questo punto sul cerchio, e il punto (α, β) sulla tangente, si hanno le due relazioni

$$y'^2 + x'^2 = r^2, \quad \beta y' + \alpha x' = r^2$$

dalle quali si ottengono i valori delle incognite x' , y' . L'eliminazione per tanto condurrebbe ad equazioni di 2° grado in x' , ed y' ; e ne risulta, com'è già noto, che due tangenti possono condursi al cerchio per un punto dato.

Se si elimina y' e si risolve la risultante equazione di 2° grado in x' ; indi le due radici si sostituiscano nell'equazione di 1° grado $\beta y' + \alpha x' = r^2$, si troveranno le ordinate dei due contatti ordinatamente espresse da

$$x' = r \frac{\alpha \pm \beta \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - r^2}}{\alpha^2 + \beta^2}, \quad y' = r \frac{\beta \mp \alpha \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - r^2}}{\alpha^2 + \beta^2}$$

Queste espressioni sono reali se si abbia $\alpha^2 + \beta^2 > r^2$, ovvero $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} > r$; e sono immaginarie nel caso opposto.

Ora $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ dinota la distanza dal centro al punto dato (α, β) ; distanza ch'è maggiore di r se il punto è fuori del cerchio, e minore se è dentro; in conseguenza nel primo caso si possono sempre condurre due tangenti; ma se il punto è dentro della curva le due tangenti sono, come ben si sapeva, impossibili.

139. Del rimanente per costruire i due contatti non è necessario di risolvere alcuna equazione, ma possono ottenersi nella intersezione dei due luoghi geometrici che rappresentano le due precedenti relazioni (§. 120) considerate isolatamente, ipotesi che rende variabili le incognite x' , y' , e che permette di scriverle

$$y'^2 + x'^2 = r^2, \quad \beta y' + \alpha x' = r^2.$$

Ora la prima di queste equazioni altro non indica che lo stesso



La circonferenza del Trudi

Trudi, N. *Elementi di geometria analitica*, 1852

88

Elementi

cerchio, e la seconda esprime una linea retta; in conseguenza costruendosi questa retta, le sue intersezioni col cerchio dato farebbero conoscere i due punti di contatto.

140. Intanto se le equazioni di questi due luoghi geometrici si combinano in un modo qualunque, ogni altra equazione che ne deriva sarà verificata dalle coordinate dei punti comuni alle due linee, e quindi rappresenterà un luogo geometrico che avrà la proprietà di passare per punti medesimi. Sottraendo la seconda dalla prima si ha l'equazione

$$y' + x' - \beta y - \alpha x = 0$$

che dinota un cerchio passante per l'origine (§. 128), il cui centro essendo determinato (§. 130) dalle coordinate $+\frac{\alpha}{2}$

e $+\frac{\beta}{2}$, si troverà nel mezzo della retta che unisce l'origine al punto (α, β) ; in conseguenza descrivendosi questo cerchio le sue intersezioni col cerchio dato saranno i due punti di contatto. Quindi se Q [fig. 34] sia il punto da cui si debbano condurre le tangenti, si dividerà la CQ in due parti eguali nel punto E ; e il cerchio descritto col centro E e raggio EC segnerà sul dato cerchio i due contatti P e P' .

141. Se piaccia invece di costruire la retta

$$\beta y + \alpha x = r^2$$

che passa per i contatti si potrebbero determinare i due punti in cui essa taglia gli assi coordinati. Ora facendo $y = 0$ si ha $x = \frac{r^2}{\alpha}$, e perciò prendendo CG terza proportionale dopo CD e il raggio del cerchio dato, sarebbe G il punto in cui la retta tra i contatti taglia l'asse delle x ; e nello stesso modo si determinerebbe il punto ov' essa taglia l'asse delle y . Intanto è da rimarcarsi che se il punto Q cambia di sito rimanendo però sulla retta MDN , la corrispondente retta tra i contatti avrebbe per equazione

Di Geometria Analitica.

89

$$\beta' y + \alpha x = r^2$$

e però taglierebbe l'asse delle x nello stesso punto G . Quindi la seguente proprietà del cerchio: *Le corde tra i contatti di tutte le coppie di tangenti menate ad un cerchio dai diversi punti di una stessa retta s'intersecano in un medesimo punto.*

Questo punto trovasi sul diametro perpendicolare alla retta, e la sua distanza dal centro è terza proportionale in ordine alla distanza dallo stesso centro alla retta ed al raggio del cerchio. È poi manifesto che se la retta cade tutta al di fuori del cerchio, quel punto cadrà al di dentro; e per l'opposto se la retta incontra il cerchio il punto cadrà fuori di esso. Nel primo caso il punto starà tra il centro e la retta; e nel secondo è invece la retta che trovasi tra il punto e il centro. Del rimanente, se sia data la retta MN [fig. 35] e debbasi costruire il punto G , potrebbero da due punti Q, q arbitrariamente presi in questa retta condursi le due coppie di tangenti, e quindi le corde tra rispettivi contatti PP', pp' ; che desse nella loro intersezione determinassero il punto cercato G .

142. Egli è ben chiaro, che la proposizione precedente ammette la sua reciproca, vale a dire che: *Tutte le coppie di tangenti menate ad un cerchio per le estremità delle corde che passano per uno stesso punto G debbano concorrere sopra una medesima retta MN .* Ma volendo comprovare questa proposizione direttamente si dinotino con α, β le coordinate del punto G da cui si tirano le corde, e con α', y' quelle del concorso delle tangenti negli estremi di una di esse; l'equazione di questa corda, come quella ch'è tra i contatti delle tangenti che partono dal punto (α', y') , sarà (§. prec.)

$$\beta' y' + \alpha x' = r^2$$

12

90

Elementi

ma trovandosi il punto (α, β) sulla corda istessa le sue coordinate deggiono verificarne l'equazione; in conseguenza tra le coordinate α', y' si avrà la relazione

$$\beta y' + \alpha x' = r^2,$$

la quale perciò sarà l'equazione della linea che passa per il concorso delle due tangenti nelle estremità di ciascuna delle corde condotte pel punto (α, β) ; e questa equazione esprime in effetti una linea retta.

È rimarchevole che l'equazione di questa retta è identicamente la stessa di quella che rappresenta la retta tra i contatti delle tangenti menate al cerchio dal punto (α, β) , e si costruisce in conseguenza nello stesso modo. Ma possono ancora per il dato punto menarsi due corde arbitrarie PP', pp' , e quindi le tangenti nelle loro estremità, che s'incontreranno in due punti Q, q ; la retta MN condotta per questi punti sarà quella di cui si tratta; ed è chiaro che dessa non può segare il cerchio se il punto è dentro, e dovrà invece necessariamente incontrarlo se il punto è fuori.

Il punto intorno a cui circolano le corde tra i contatti delle tangenti menate al cerchio dai punti di una stessa retta suol chiamarsi per brevità *polo* di questa retta, la quale alla sua volta dicesi *polare* di quel punto. I poli e le polari costituiscono attualmente una teorica importantissima della geometria, ed in luogo opportuno ne faremo conoscere quanto basta per una istituzione elementare.

143. Passeremo ora a riconoscere altre proprietà del cerchio risolvendo il seguente problema: *Dati sul cerchio due punti A, B [fig. 36] trovarsi sullo stesso cerchio un punto P tale che l'angolo in P contenuto delle due rette PA, PB risulti eguale ad un angolo dato.* Prendendo per asse delle x la retta che unisce i punti A, B , e per asse delle y la perpendicolare in uno dei suoi estremi, A per esempio, e di-



La circonferenza del Trudi

Trudi, N. *Elementi di geometria analitica*, 1852

di Geometria Analitica. 91.

notando inoltre con α, β le coordinate AN, CN del centro C, l'equazione del cerchio sarà (§. 128)

$$y^2 + x^2 - 2\beta y - 2\alpha x = 0.$$

Ciò posto, essendo $AB = 2\alpha$, se si dinotano con x', y' le coordinate del punto cercato P, le equazioni delle due rette PA, PB saranno

$$y = \frac{y'}{x'} x, \quad y = \frac{y'}{x' - 2\alpha}(x - 2\alpha).$$

Ora supponendo il punto P nell'arco superiore APB si ha

$$\text{ang. P} = \text{ang. PBx} - \text{ang. PAx}$$

e quindi si trova (§. 99)

$$\text{tang. P} = \frac{2\alpha y'}{y'^2 + x'^2 - 2\alpha x'}$$

ma il punto (x', y') essendo sul cerchio si ha

$$y'^2 + x'^2 - 2\alpha x' = 2\beta y',$$

si avrà dunque

$$\text{tang. P} = \frac{2\alpha y'}{2\beta y'} = \frac{\alpha}{\beta},$$

e si vede che l'angolo P non dipende già dal nostro arbitrio, ma è costante per tutt'i punti dell'arco APB.

Se in vece di supporre il punto P nell'arco APB si supponga nell'arco inferiore, come in P', sarebbe allora

$$\text{ang. P}' = \text{ang. aAx} - \text{ang. bBx},$$

e si troverebbe nel modo di poc' anzi.

$$\text{tang. P}' = -\frac{\alpha}{\beta}.$$

Da ciò risulta che anche gli angoli nell'arco AP'B sono

92. Elementi

eguali tra loro; e di più che gli angoli P e P' sono supplementi l'un dell'altro; e si hanno in conseguenza le seguenti conosciute proprietà del cerchio:

Gli angoli che sono nello stesso segmento di cerchio sono eguali tra loro.

In ogni quadrilatero iscritto nel cerchio la somma di due angoli opposti è eguale a due retti.

144. Se l'arco superiore APB è maggiore del semicerchio, il centro C cadrà al di sopra di AB; quindi la sua ordinata CN = β sarà positiva, e positiva sarà perciò la frazione $\frac{\alpha}{\beta}$; se invece quell'arco è minore del semicerchio sarà β negativa, e quindi anche negativa sarà la frazione $\frac{\alpha}{\beta}$; che se quell'arco fosse eguale al semicerchio,

sarà $\beta = 0$, e la frazione $\frac{\alpha}{\beta}$ avrà in questo caso un valore infinito. Dunque: *È acuto l'angolo nel segmento maggiore del semicerchio; è ottuso l'angolo nel segmento minore; ed è retto l'angolo nel semicerchio.*

145. Essendo $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{AN}{CN} = \text{tang. ACN}$, si vede che l'angolo ACN è eguale a P; ma ACN è metà di ACB; perciò: *L'angolo al centro è doppio di quello alla circonferenza.*

146. L'equazione del raggio AC essendo $y = \frac{\beta}{\alpha} x$, quella di EF, perpendicolare ad AC sarà $y = -\frac{\alpha}{\beta} x$, e quindi

si avrà $\text{tang. EAx} = -\frac{\alpha}{\beta}$, e $\text{tang. FAx} = \frac{\alpha}{\beta}$; in conseguenza risulterà $\text{ang. EAx} = \text{ang. P}'$, ed $\text{ang. FAx} = \text{ang. P}$; ma la retta EF è tangente del cerchio in A (§. 131); dunque: *L'angolo formato dalla tangente e dalla secante è eguale all'angolo formato nella porzione altera del cerchio.*

Gli studenti avevano già lavorato sulla circonferenza del Trudi, anche dal punto di vista linguistico



di Geometria Analitica. 79

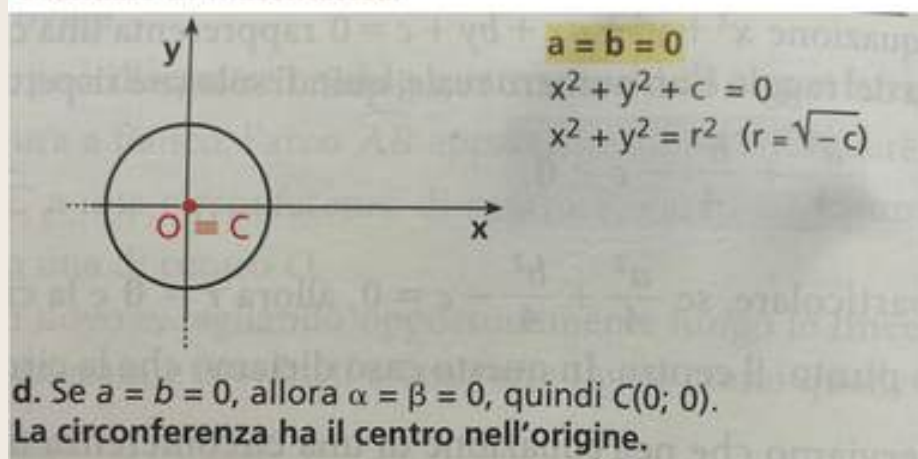
CAPITOLO IV.

DEL CERCHIO.

126. L'equazione del cerchio già trovata altrove (§. 68) si ottiene in un modo più semplice riguardando questa curva come il luogo de' punti equidistanti da un punto fisso C [fig. 19]. In fatti se si prendono per assi due rette tra loro perpendicolari condotte per questo punto, e si dinoti con (x, y) un punto qualunque della curva, si avrà $CP = \sqrt{y^2 + x^2}$; in conseguenza dinotando con r questa distanza, l'equazione del cerchio sarà $\sqrt{y^2 + x^2} = r$, ovvero

$$y^2 + x^2 = r^2. \quad (1)$$

Manuale di matematica:



PARAGRAFO 126

Costruzione della circonferenza

ASPETTO MATEMATICO

In questo paragrafo, Nicola Trudi illustra la definizione di circonferenza come luogo geometrico e la sua costruzione nel caso in cui il centro della curva corrisponda al punto di intersezione di due rette perpendicolari tra loro.

ASPETTO LESSICALE E GRAMMATICALE

Le forme linguistiche inusuali trovate nel paragrafo sono: de', in fatti, si dinoti.

Nel testo è prevalente l'ipotassi, soprattutto al gerundio.

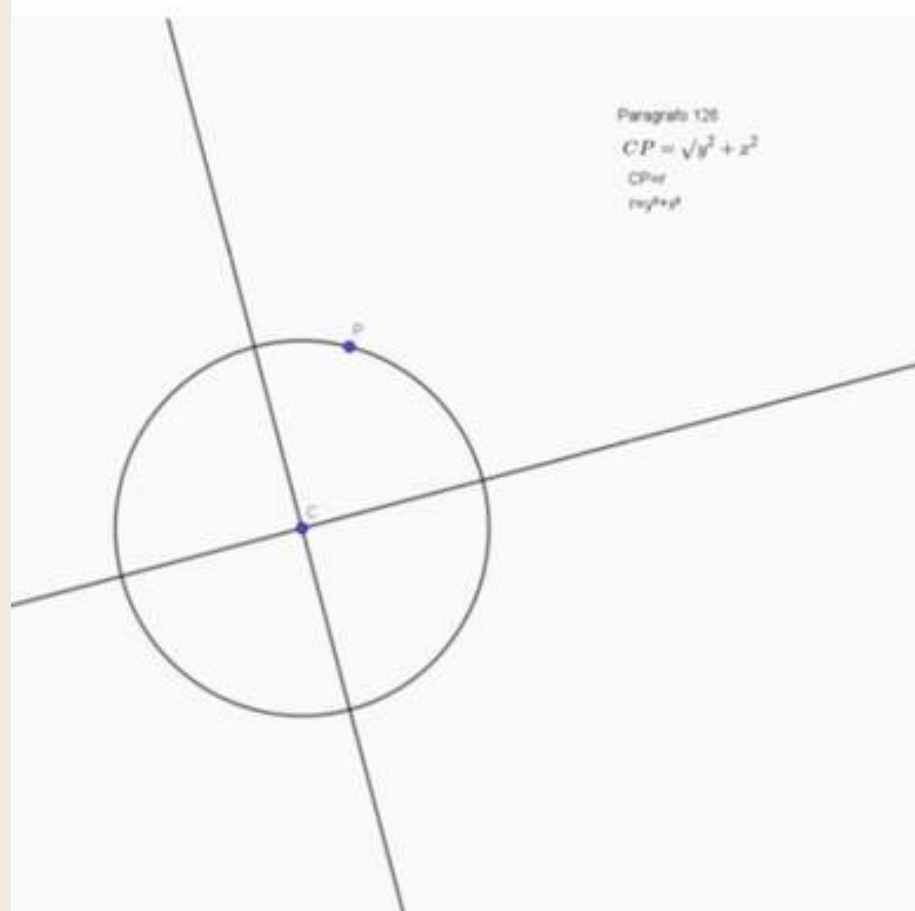


Gli studenti avevano già lavorato sulla circonferenza del Trudi, anche dal punto di vista linguistico



COSTRUZIONE

Geogebra



Seguendo il manuale del Trudi, per costruire questa circonferenza, bisogna seguire questi passaggi:

1. Costruire una retta r .
2. Costruire la retta perpendicolare a r .
3. Chiamare C il punto di intersezione delle due rette considerandolo come origine, quindi di coordinate $(0;0)$.
4. Prendere sul piano un punto P di coordinate $(x;y)$.
5. Costruire la curva di centro C e passante per P .

Sapendo che CP è la distanza tra i punti C e P abbiamo che $CP = \sqrt{(x^2 + y^2)}$.

Ponendo $CP = r$, avremo $r = \sqrt{(x^2 + y^2)}$.

Elevando tutto al quadrato allora otteniamo l'equazione $r^2 = x^2 + y^2$ che il nostro manuale identifica come equazione di una circonferenza che ha centro nell'origine e raggio r .

Gli studenti avevano già lavorato sulla circonferenza del Trudi, anche dal punto di vista linguistico

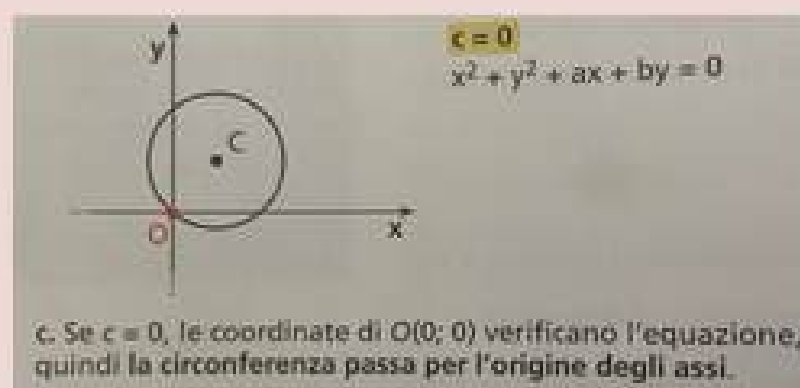


PARAGRAFO 128

circonferenza nel piano

ASPETTO LESSICALE E GRAMMATICALE

In questo paragrafo le espressioni inusuali che troviamo sono: "come esser dovea" e "dee", come vediamo sono presenti sia **ipotassi** che paratassi, le ipotassi sono sia al tempo gerundio che al participio passato.



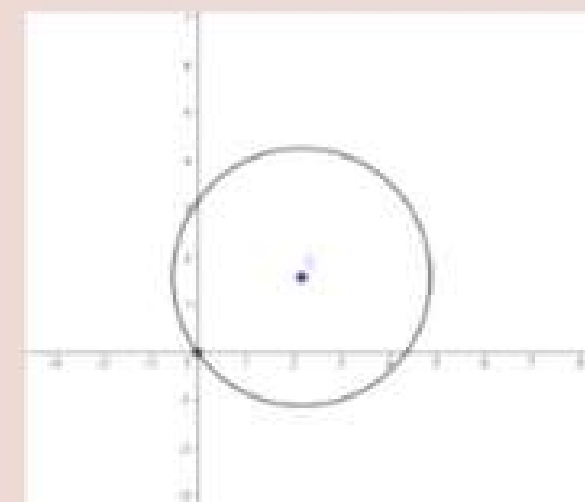
428. Qualora l'origine cadesse in un punto qualunque del cerchio sarebbe $\beta' + \alpha' = r'$, e l'equazione (4) perdendo l'ultimo termine, cioè il termine indipendente dalle variabili, si ridurrebbe ad

$$y' + x' - 2\beta y - 2\alpha x = 0.$$

E quest'equazione è, com'esser dovea, verificata dalle coordinate $x=0$, $y=0$, che definiscono l'origine, la quale è attualmente un punto della curva. Del rimanente è chiaro che questa circostanza non è già particolare al cerchio, ma dee verificarsi in generale per qualunque linea la cui equazione manchi di termine noto.

ASPETTO MATEMATICO

In questo paragrafo Trudi trova l'equazione della circonferenza passante per l'origine con centro in un punto qualunque del piano.



Gli studenti avevano già lavorato sulla circonferenza del Trudi, anche dal punto di vista linguistico



PARAGRAFO 129

coefficienti dell'equazione

ASPETTO MATEMATICO

In questo paragrafo spiega che in ogni equazione della circonferenza i coefficienti di x^2 e y^2 devono essere uguali in modo che, dividendo entrambi i membri per tali coefficienti ci si può ricondurre al caso in cui sono uguali a 1.

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0.$$

L'equazione trovata è di secondo grado nelle incognite x e y . Osserviamo che l'equazione non è completa, perché manca il termine con il prodotto xy , e che i coefficienti di x^2 e di y^2 sono uguali a 1.

ASPETTO LESSICALE E GRAMMATICALE

Forme linguistiche inusuali: "dividerne"; "è manifesto". Per quanto riguarda le coordinate e le **subordinate** le troviamo entrambe: le **ipotassi** sono soprattutto al participio passato.

429. Egli è ben chiaro che in tutte queste diverse forme l'equazione conserverà sempre i due termini in y^2 ed x^2 , mentre nell'equazione generale essi hanno l'unità per coefficiente, e quindi non possono annullarsi; ed inoltre è manifesto che questi due termini ridotti ad un membro avranno i medesimi segni. Segue da ciò che la forma generica dell'equazione del cerchio in coordinate ortogonali è

$$y^2 + x^2 + Dy + Ex + F = 0, \quad (5)$$

ovvero

$$Ay^2 + Ax^2 + Dy + Ex + F = 0$$

mentre l'ultima prende la forma della prima col dividerne tutt' i termini per A .

Viceversa ogni equazione riducibile a queste forme ha un cerchio per luogo geometrico se gli assi sono ortogonali. In fatti, se ciò è vero, chiamando a, β le coordinate del suo centro ed r il raggio, dovrà l'equazione (5) essere identica alla (4), e quindi si avranno le relazioni

$$-2\beta = D, \quad -2a = E, \quad \beta^2 + a^2 - r^2 = F$$

dalle quali si ricava

$$\beta = -\frac{1}{2} D, \quad a = -\frac{1}{2} E, \quad r = \sqrt{\frac{D^2 + E^2}{4} - F}.$$

Ora il cerchio il cui centro e l raggio sono determinati da questi valori ha per equazione

$$\left(y + \frac{1}{2} D\right)^2 + \left(x + \frac{1}{2} E\right)^2 = \frac{D^2 + E^2}{4} - F,$$

e quest'equazione sviluppata coincide con la proposta, dunque quel cerchio sarà il suo luogo geometrico.

Gli studenti avevano già lavorato sulla circonferenza del Trudi, anche dal punto di vista linguistico



PARAGRAFO 130

come trovare centro e raggio

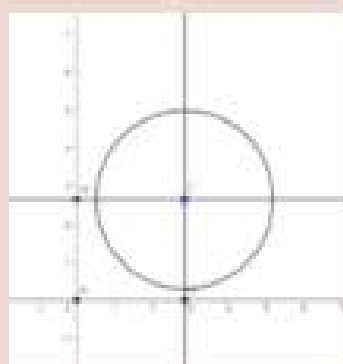
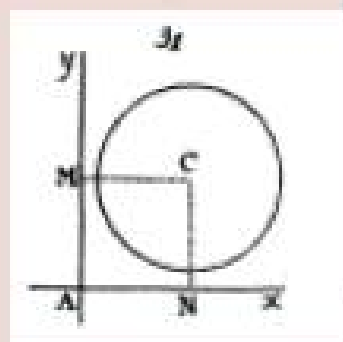
ASPETTO MATEMATICO

Il paragrafo 130 ci spiega come trovare il centro e raggio di una circonferenza avendo l'equazione.

Trudi svolge i seguenti calcoli:

- $-2b = D \rightarrow b = -1/2 D$
- $-2a = E \rightarrow a = -1/2 E$
- $b^2 + a^2 - r^2 = F \rightarrow r^2 = (D^2 + E^2) / 4 - F$

Tutto questo successivamente lo va a sostituire all'equazione:
 $(y-b)^2 + (x-a)^2 = r^2$.



130. Mediante i precedenti valori di α , β , ed r può determinarsi il centro e il raggio di un cerchio del quale sia data l'equazione, e quindi descrivere la curva; ma

è bene di tener presente che, essendo $a = -\frac{1}{2} E$, e

$b = -\frac{1}{2} D$, così: il centro si determina prendendo sugli assi

delle x e delle y le parti AN ed AM [fig. 31] eguali alle metà dei coefficienti dei termini in x ed y a 1° grado co'segui cambiati, e poscia elevando agli assi le perpendicolari NC, MC ; il punto C sarà il centro cercato.

ASPETTO LESSICALE E GRAMMATICALE

In questo paragrafo le forme linguistiche inusuali che troviamo sono: "e'l raggio", "eguali" e "poscia elevando". Sono presenti sia **ipotassi** che **paratassi**.

Gli studenti avevano già lavorato sulla circonferenza del Trudi, anche dal punto di vista linguistico



133. Ciascuna delle diverse equazioni rappresentanti il cerchio può dar luogo immediatamente a qualche proprietà

di Geometria Analitica § 83.

di questa curva. Così dall'equazione $y^2 + x^2 = r^2$ traendosi $y^2 = r^2 - x^2 = (r+x)(r-x)$, se PS [fig. 19] sia un'ordinata all'asse delle x , cioè al diametro BB' , sarà $r+x = SB'$, $r-x = SB$, e quindi

$$PS^2 = SB' \times SB;$$

vale a dire: *Il quadrato dell'ordinata ad un diametro è uguale al rettangolo de' due segmenti in cui quella lo divide.*

Se si considera l'equazione $y^2 + x^2 = 2rx$, per la quale l'origine è in un vertice B' del diametro, si ha $y^2 + x^2 = B'P^2$, $2rx = BB' \times B'S$; e perciò

$$B'P^2 = BB' \times B'S;$$

in conseguenza: *la corda $B'P$ è media proporzionale tra il diametro e il segmento $B'S$.*

PARAGRAFO 133

Teorema di Euclide 1° e 2°

ASPETTO LESSICALE E GRAMMATICALE

Nel paragrafo l'unica forma lessicale inusuale è "e'l segmento", come possiamo notare sono presenti più paratassi che ipotassi, l'unica subordinata presente è al participio passato.

ASPETTO MATEMATICO

Il paragrafo 133 è suddiviso in 2 parti: nella prima, partendo da una circonferenza, viene dimostrato il 2° teorema di Euclide: mentre nella seconda parte viene dimostrato il 1° teorema di Euclide in un triangolo rettangolo inscritto in una semicirconferenza.

Il quadrato della retta perpendicolare al diametro è uguale al rettangolo avente come lati i due segmenti in cui la retta suddivide il diametro.



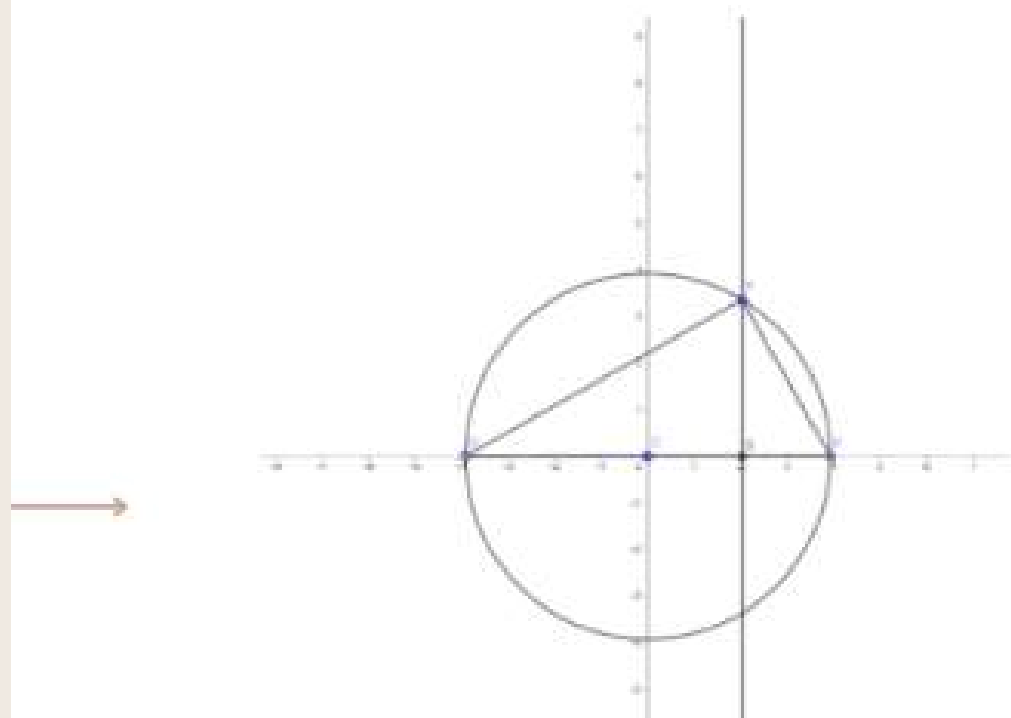
Gli studenti avevano già lavorato sulla circonferenza del Trudi, anche dal punto di vista linguistico



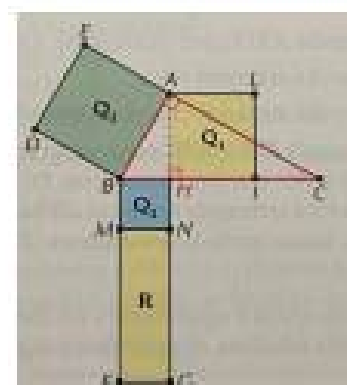
PROPRIETA' DELLA CIRCONFERENZA

2° teorema di Euclide

In un triangolo rettangolo costruito all'interno di una circonferenza avente il centro nell'origine degli assi, il quadrato costruito sull'altezza è uguale al rettangolo che ha come lati le proiezioni del vertice P sulla base B'B (2° teorema di Euclide).



Trudi	Libro di testo
$B'B = \text{diametro (base triangolo)} = BC$	$BC = \text{base triangolo}$
$PS = \text{altezza triangolo} = AH$	$AH = \text{altezza triangolo}$
$PS^2 = \text{quadrato costruito sull'altezza} = Q_1$	$Q_1 = AH^2$
$BS^2 = \text{quadrato costruito su } BS = Q_2$	$Q_2 = BH^2$
$PB'^2 = \text{quadrato costruito su } PB' = Q_3$	$Q_3 = AB^2$
$BS \times SB' = \text{rettangolo costruito su } SB' = R$	$R = \text{rettangolo di lati congruenti a } BH \text{ e } HC$
$PS^2 = BS \times SB'$	$Q_1 = R$



Gli studenti avevano già lavorato sulla circonferenza del Trudi, anche dal punto di vista linguistico



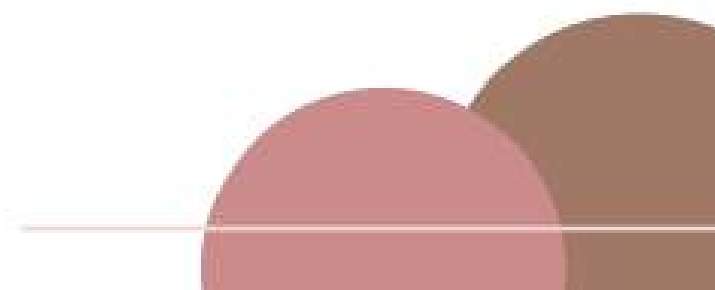
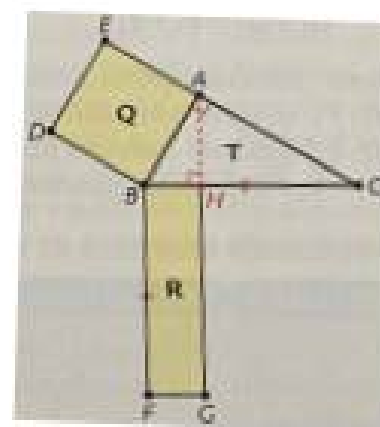
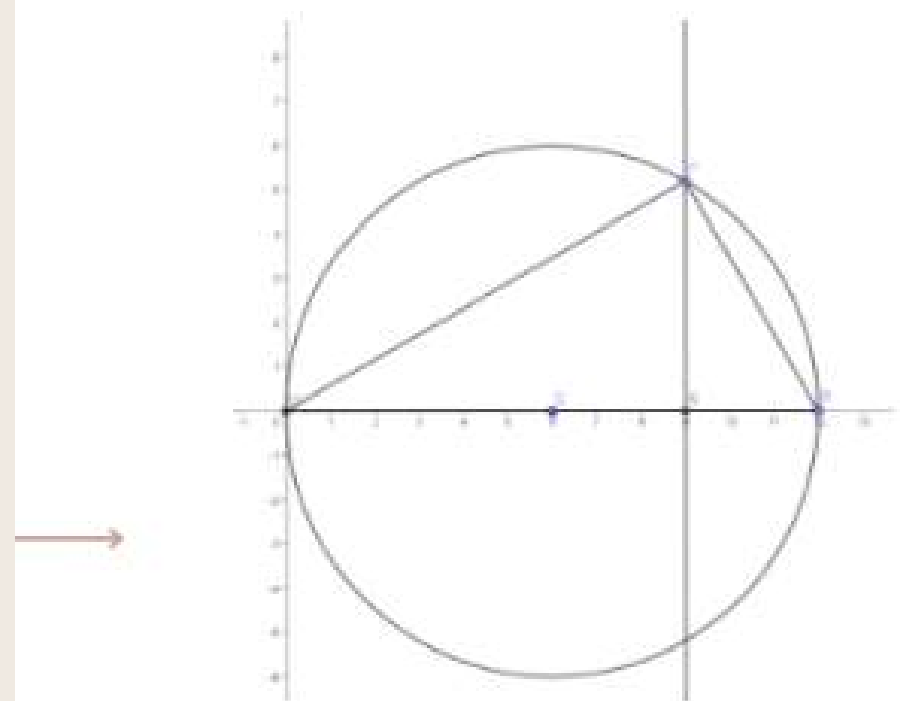
PROPRIETA' DELLA CIRCONFERENZA

1° teorema di Euclide

In un triangolo rettangolo costruito in una circonferenza passante per l'origine degli assi, il quadrato costruito su uno dei cateti è uguale al rettangolo che ha come lati la base del triangolo e la proiezione di quel cateto su di essa (1° teorema di euclide).

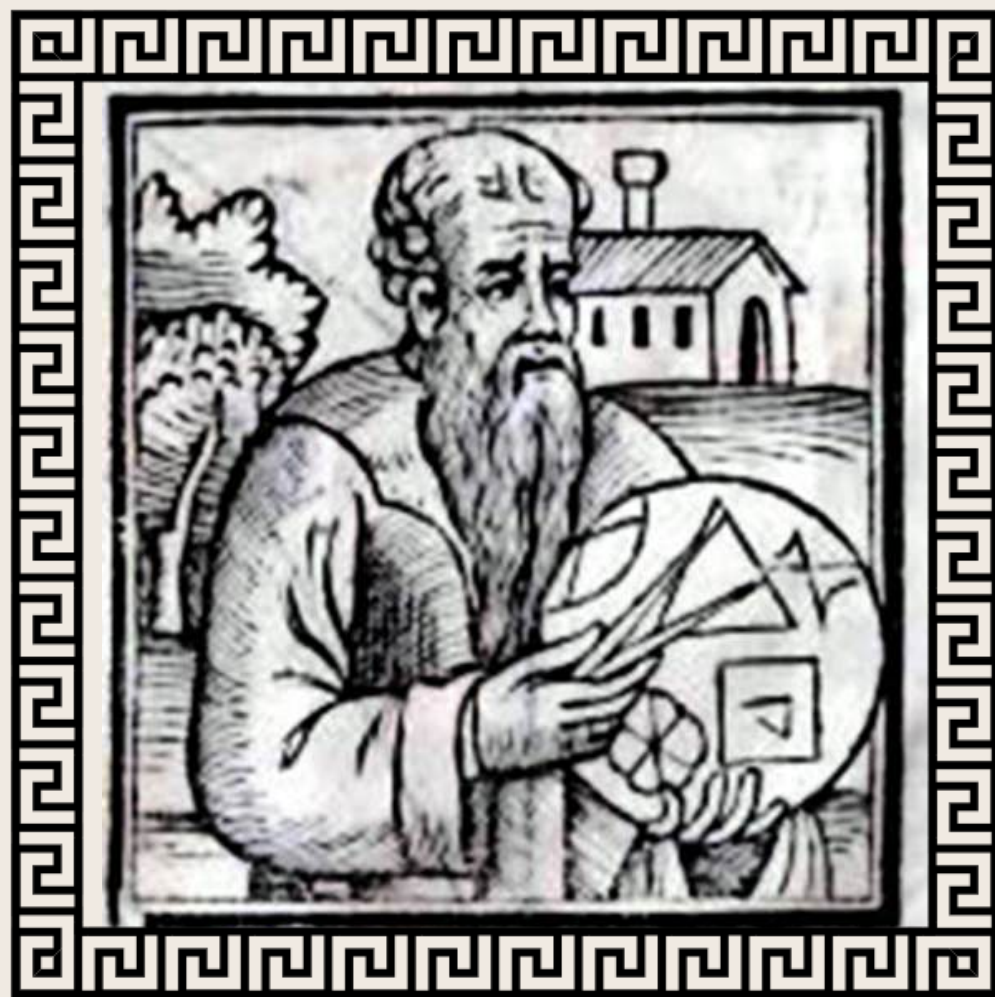
$$B'P^2 = B'B \times B'S$$

Una delle equazioni che rappresentano la circonferenza è il 1° teorema di Euclide.



APOLLONIO DI PERGA

(262 A.C. - 190 A. C. CIRCA)



“—
Se si taglia un cono con un piano che passi per l'asse e con altro che tagli la base perpendicolarmente a quella del triangolo secondo il suo asse, se il diametro della sezione è parallelo a uno dei lati del triangolo, il quadrato di ogni retta tracciata dalla sezione del cono parallelamente all'intersezione del piano secante a quello della base del cono fino al diametro della sezione - cioè il quadrato dell'ordinata di un punto della sezione - equivale al rettangolo formato dalla retta che separa il diametro dalla parte del vertice della sezione; equivale anche al rettangolo formato da una determinata retta, poiché è l'area tra l'angolo conico e il vertice della sezione, che è la stessa di quella del quadrato della base del triangolo secondo l'asse del rettangolo formato dagli altri due lati del triangolo. Chiameremo parabola tale sezione.

—”

APOLLONIO DI PERGA

(262 A.C. - 190 A. C. CIRCA)



GeoGebra

Codice per accedere alla

classe GeoGebra:

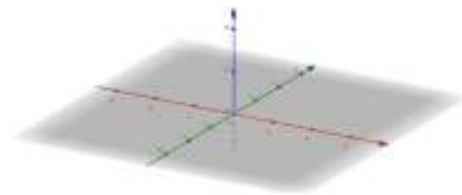
XYY8 AYBM

“—
Se si taglia un cono con un piano che passi per l'asse e con altro che tagli la base perpendicolarmente a quella del triangolo secondo il suo asse, se il diametro della sezione è parallelo a uno dei lati del triangolo, il quadrato di ogni retta tracciata dalla sezione del cono parallelamente all'intersezione del piano secante a quello della base del cono fino al diametro della sezione - cioè il quadrato dell'ordinata di un punto della sezione - equivale al rettangolo formato dalla retta che separa il diametro dalla parte del vertice della sezione; equivale anche al rettangolo formato da una determinata retta, poiché è l'area tra l'angolo conico e il vertice della sezione, che è la stessa di quella del quadrato della base del triangolo secondo l'asse del rettangolo formato dagli altri due lati del triangolo. Chiameremo parabola tale sezione.”

LA PARABOLA DI APOLLONIO

Costruzione

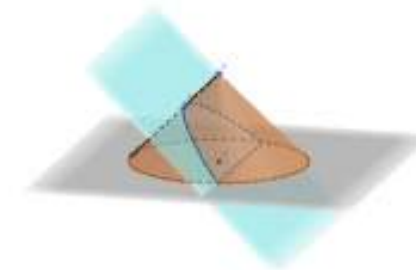
Per ognuno dei passi successivi, vi ricordiamo che potete sempre reimpostare la situazione iniziale della schermata GeoGebra su cui state lavorando, cliccando sull'icona con le due frecce in alto a destra all'interno della schermata stessa.



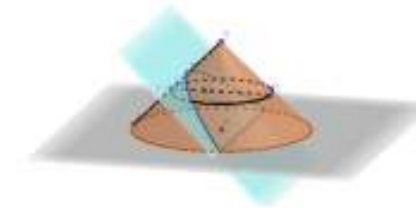
Passo 1



Passo 2



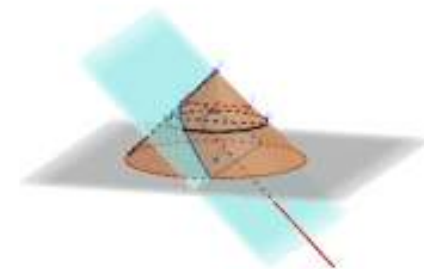
Passo 3



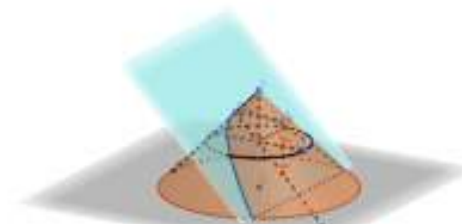
Passo 4



Passo 5



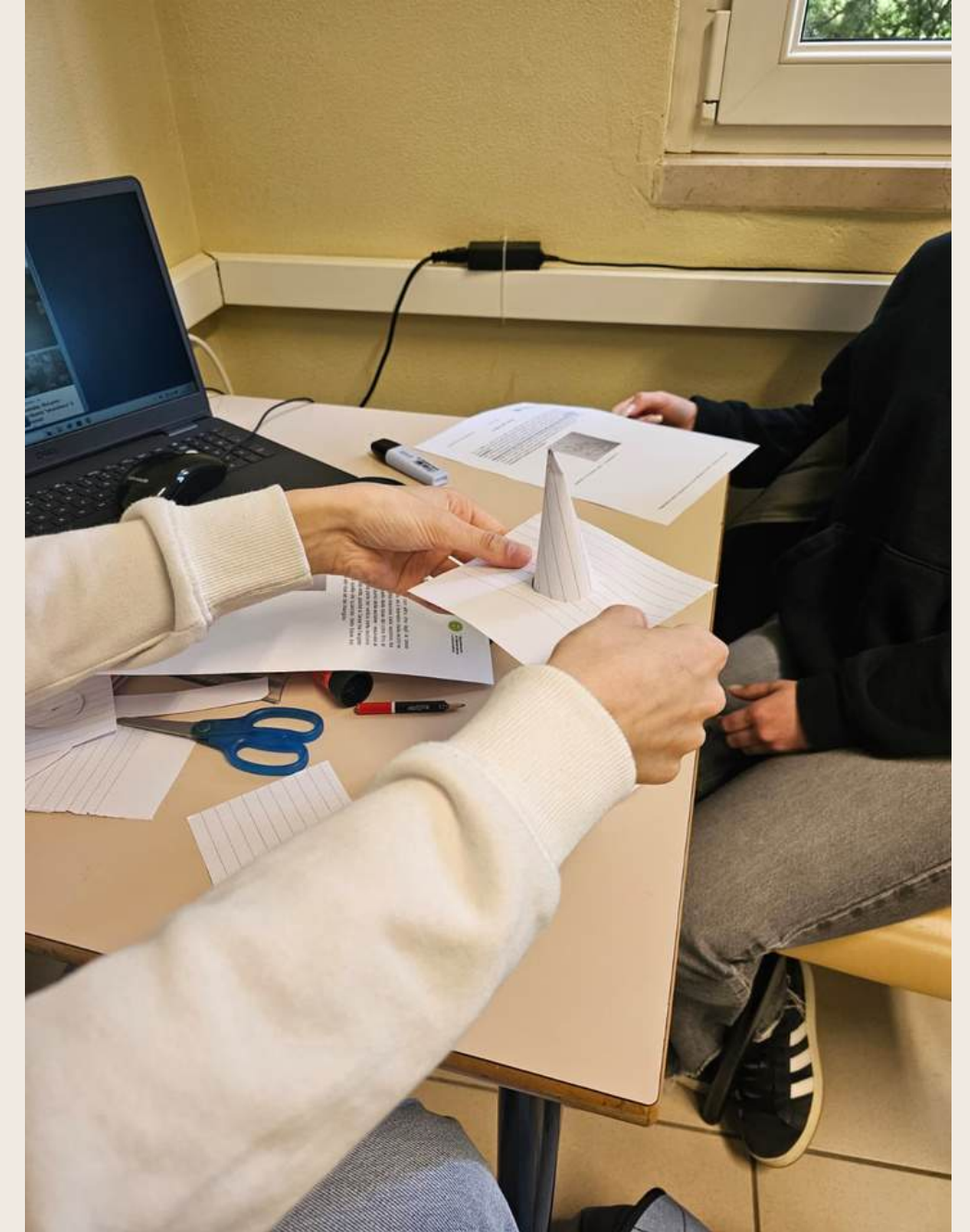
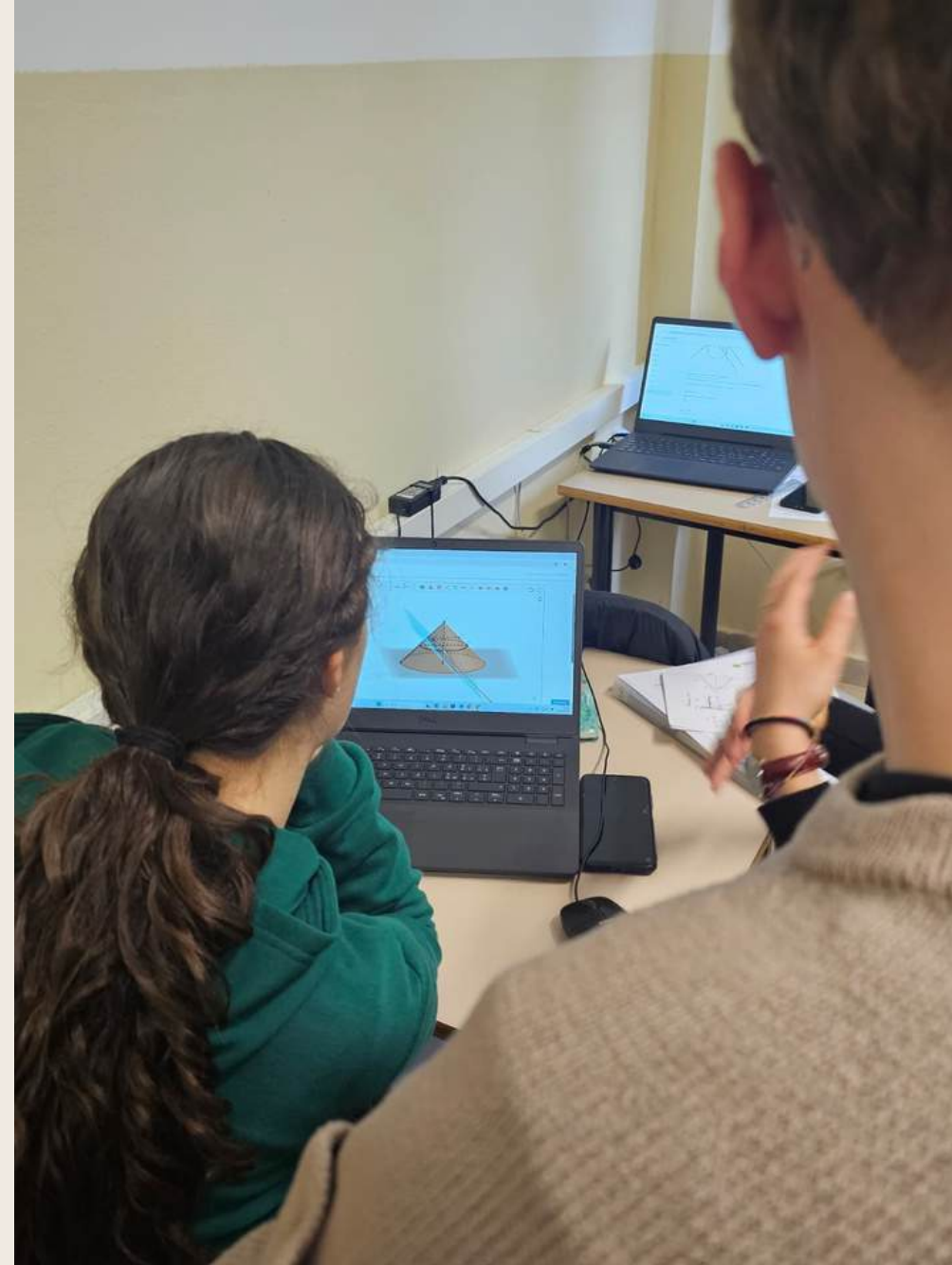
Passo 6



Passo 7



LA PARABOLA DI APOLLONIO



Riflessione sull'approccio sintetico di Apollonio mediante risoluzione di un esercizio "standard",
lavorando sulla costruzione geometrica della parabola e delle tangenti

Come risolvereste un problema con la parabola?



Scrivi l'equazione della parabola avente fuoco $F(1; -\frac{3}{2})$ e vertice $V(1; -2)$. Dette A e B le sue intersezioni con la retta $y = x + 1$, determina le tangenti in A e in B alla parabola.

Vs

Come avrebbe risolto Apollonio un problema con la parabola?



Scrivi l'equazione della parabola avente fuoco $F(1; -\frac{3}{2})$ e vertice $V(1; -2)$. Dette A e B le sue intersezioni con la retta $y = x + 1$, determina le tangenti in A e in B alla parabola.

Codice
GeoGebra
Classroom:
ARSM RQKD



COME RISOLVERESTE UN PROBLEMA CON LA PARABOLA?

Soluzione attesa

Scrivi l'equazione della parabola avente fuoco $F\left(1; -\frac{3}{2}\right)$ e vertice $V(1; -2)$. Dette A e B le sue intersezioni con la retta $y = x + 1$, determina le tangenti in A e in B alla parabola.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Equazione dell'asse: } x = 1 \\ \text{Equazione della direttrice: } y = -\frac{5}{2} \end{array} \right\} PF = \sqrt{(x-1)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\left|y + \frac{5}{2}\right|}{\sqrt{1^2}} = d\left(P; y = -\frac{5}{2}\right)$$

Quindi l'equazione della parabola è: $y = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$

Per ottenere i punti di intersezione si risolve il sistema tra l'equazione della parabola e l'equazione della retta $y = x + 1$

$$A = (5; 6) \quad B = (-1; 0)$$

Si può determinare l'ordinata all'origine di entrambe le rette tangenti utilizzando l'equazione generale di una retta in forma esplicita e, per determinare i coefficienti angolari delle rette tangenti, si risolve il sistema dato dall'equazione della parabola e dall'equazione generale della retta in forma esplicita, imponendo la condizione di tangenza.

Le equazioni delle due rette tangenti cercate sono $t_1: y = 4x - 14$ $t_2: y = -2x - 2$

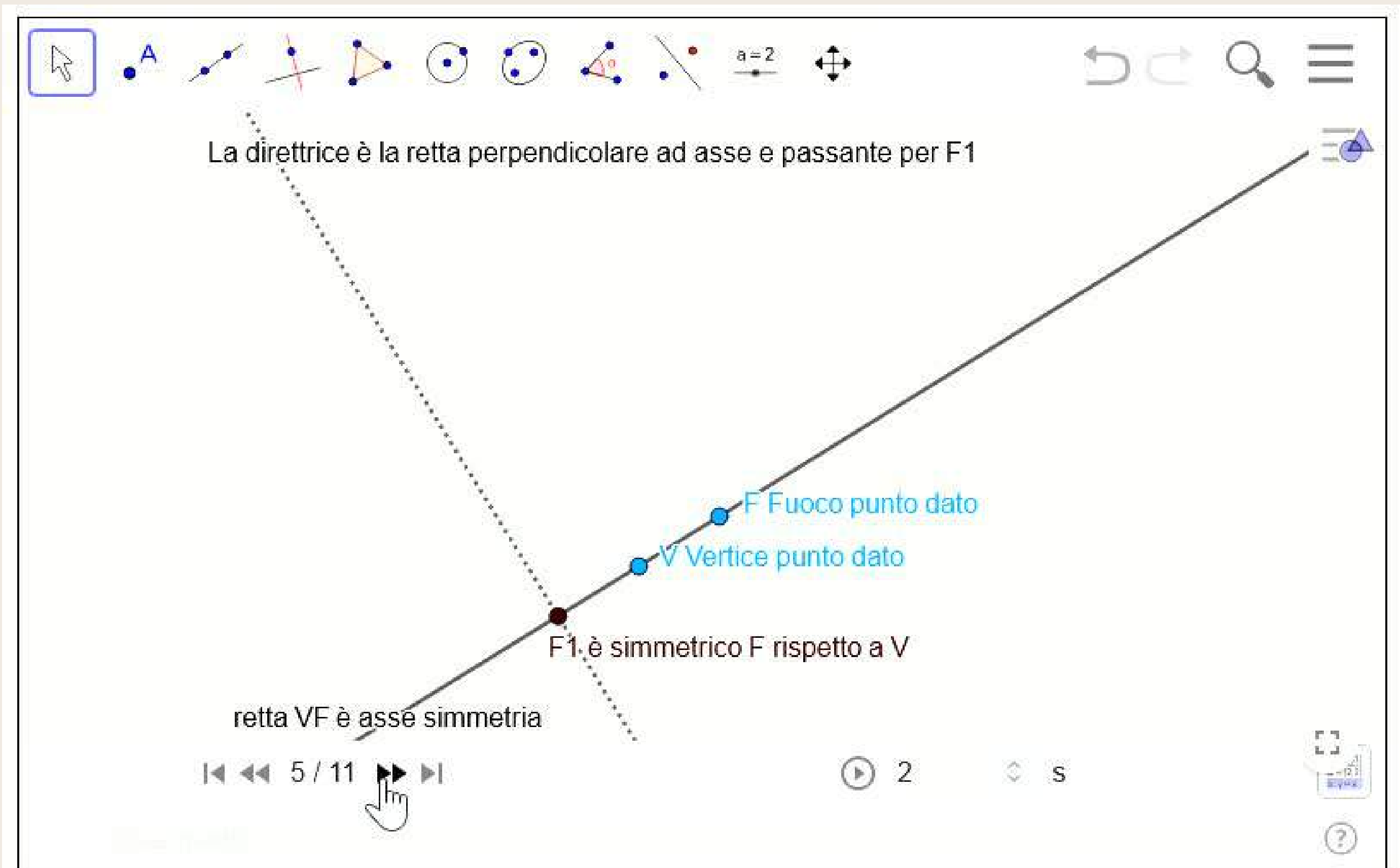


COME AVREBBE RISOLTO APOLLONIO UN PROBLEMA CON LA PARABOLA?

Passo 1:
COSTRUIRE
LA PARABOLA



Codice per accedere
alla classe GeoGebra:
ARSM RQKD



La direttrice è la retta perpendicolare ad asse e passante per F1

F Fuoco punto dato

V Vertice punto dato

F1 è simmetrico F rispetto a V

retta VF è asse simmetria

5 / 11

2

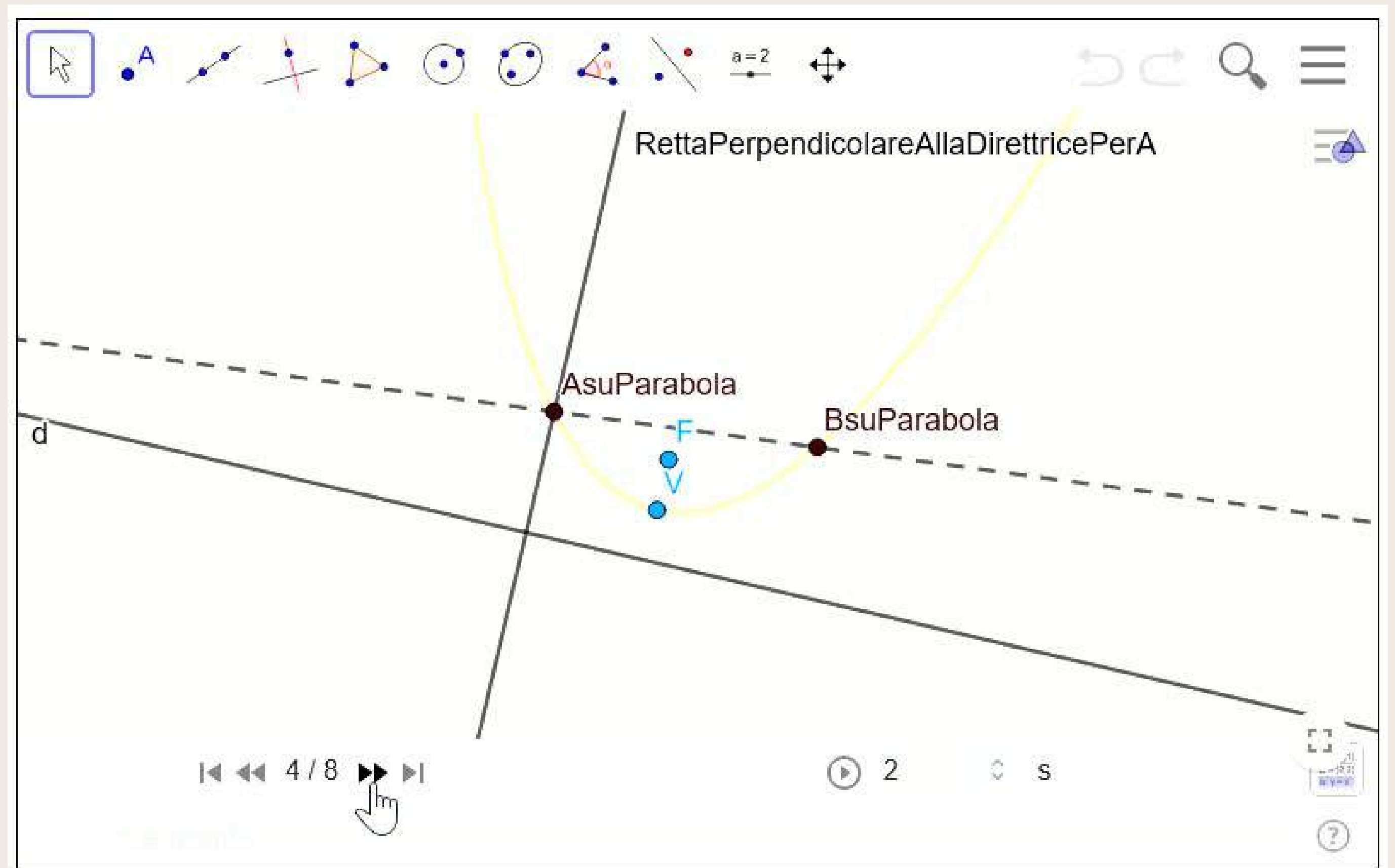
S

COME AVREBBE RISOLTO APOLLONIO UN PROBLEMA CON LA PARABOLA?

Passo 2:
COSTRUIRE
LE TANGENTI



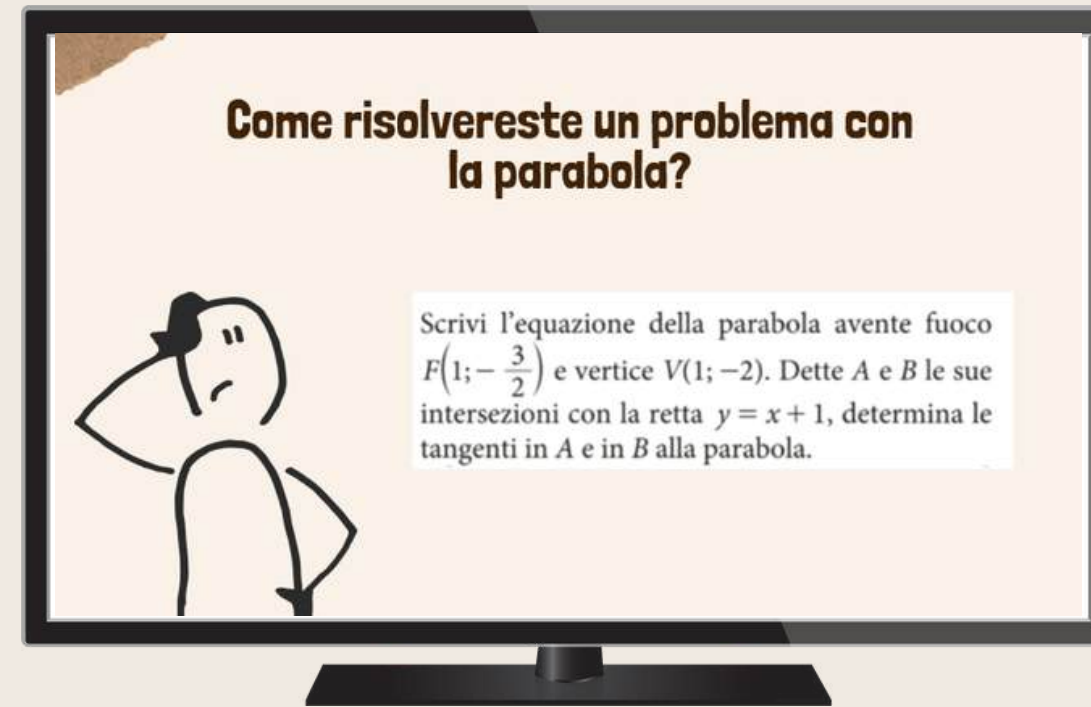
Codice per accedere
alla classe GeoGebra:
ARSM RQKD



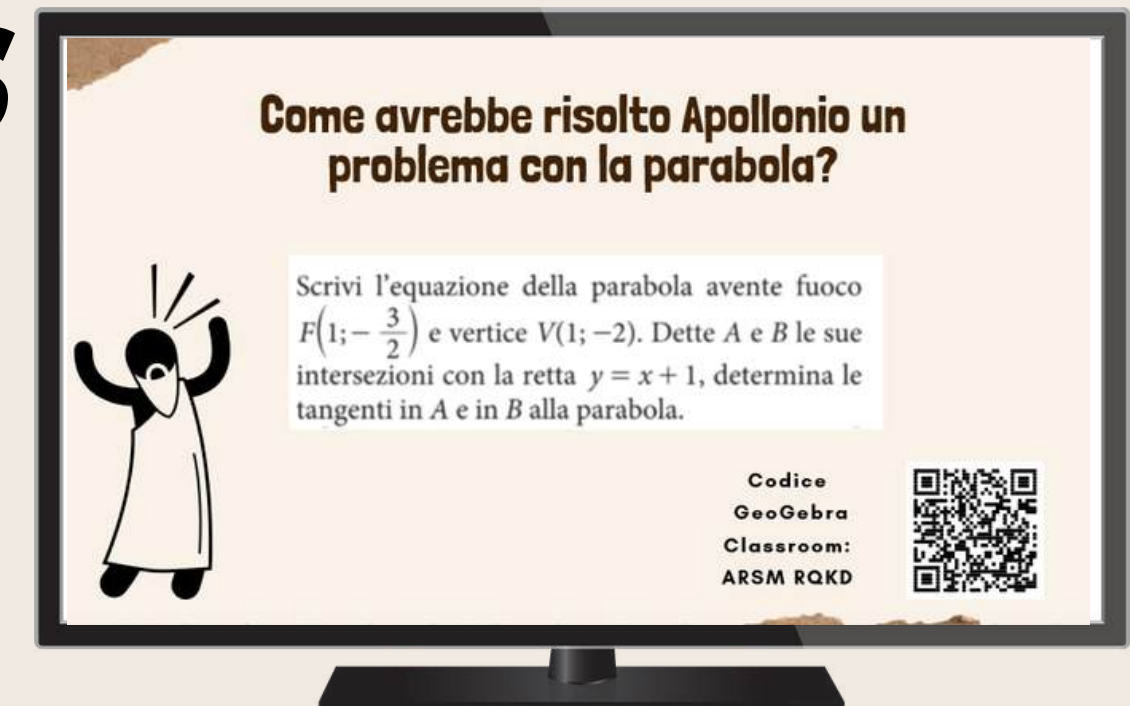
Riflessione sull'approccio sintetico di Apollonio mediante risoluzione di un esercizio "standard",
lavorando sulla costruzione geometrica della parabola e delle tangenti



Codice per accedere
alla classe GeoGebra:
ARSM RQKD



VS



Quali analogie o diversità riscontrate tra i passi della soluzione analitica e quelli della costruzione geometrica?

La soluzione algebrica è meno intuitiva e richiede strumenti di calcolo avanzato, o comunque non sviluppati ai tempi di Apollonio. La soluzione basata sull'intuizione grafica richiede più passaggi ed è forse più macchinosa.

Quello che ho riscontrato è che la risoluzione analitica è molto più algoritmica rispetto alla risoluzione geometrica. Mi è sembrato che nella risoluzione geometrica ho dovuto applicare molti più ragionamenti rispetto al metodo analitico, questo forse anche dovuto ad una questione di abitudine.

In quella geometrica credo rimangano più vive le proprietà intrinseche delle costruzioni su cui si lavora e da cui poi si sono dedotte le forme analitiche

Diversità sicuramente nella costruzione della parabola, mentre analogie per la costruzione delle rette tangenti

Sicuramente il metodo analitico è molto più rapido di quello geometrico. La differenza è proprio avere nel primo caso le equazioni delle figure geometriche, mentre nel secondo no. Inoltre queste procedure possono essere generalizzate in maniera meccanica per ogni caso, ma quello geometrico è fin da subito valido per una qualsiasi parabola e retta.

La costruzione tramite riga e compasso è sicuramente quella più fastidiosa in quanto meno immediata e più articolata rispetto alla soluzione analitica che richiede solamente qualche conto elementare. La soluzione geometrica con tutti gli strumenti di geogebra è ancora è più facile poichè richiede poche mosse e nessun calcolo.

APPROFONDIMENTO

**Come si costruiscono gli elementi
caratteristici della parabola a
partire dalla parabola stessa?**

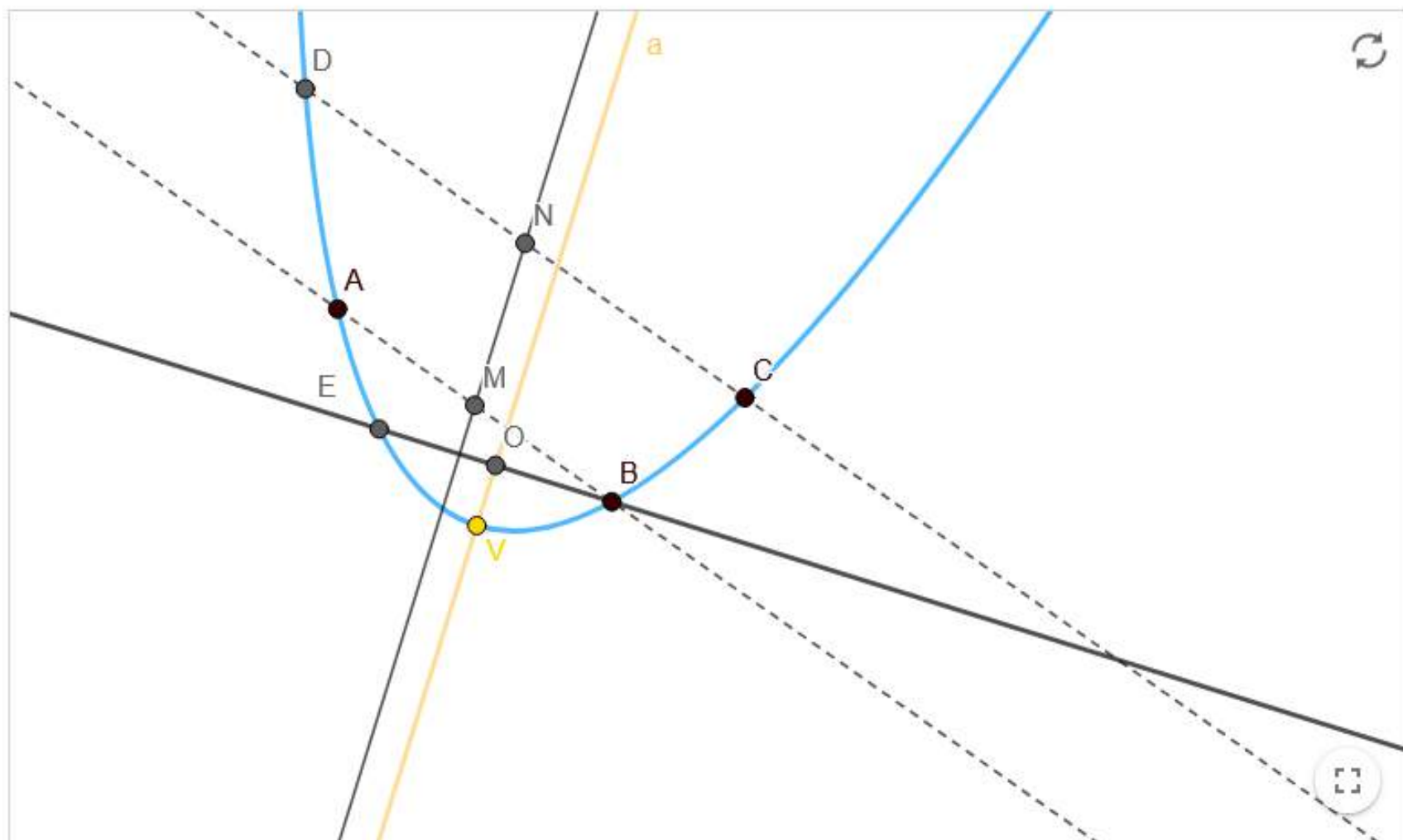


Codice per accedere alla classe GeoGebra:

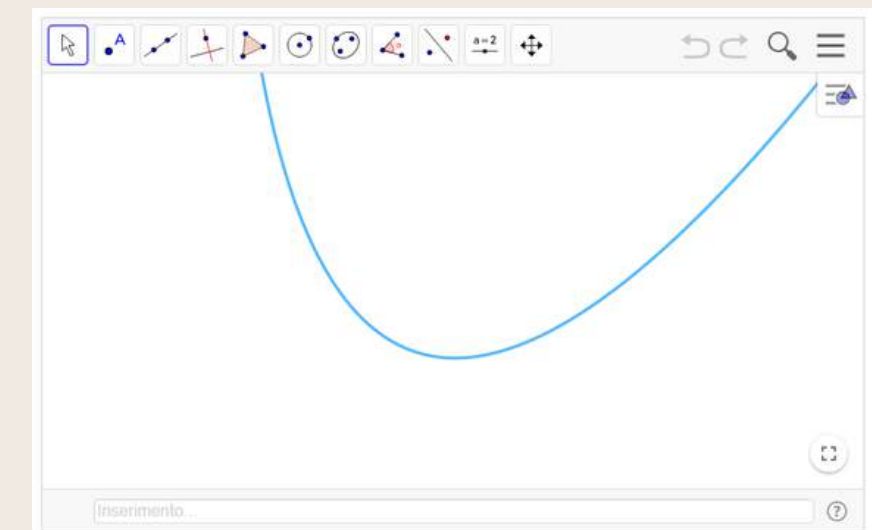
XST5 8AHK

COSTRUZIONE 1

Nella figura sono indicati gli elementi che intervengono nella costruzione con riga e compasso della retta gialla e del punto giallo a partire da una parabola assegnata, colorata in azzurro. Gli elementi in nero rappresentano i passi intermedi della costruzione.



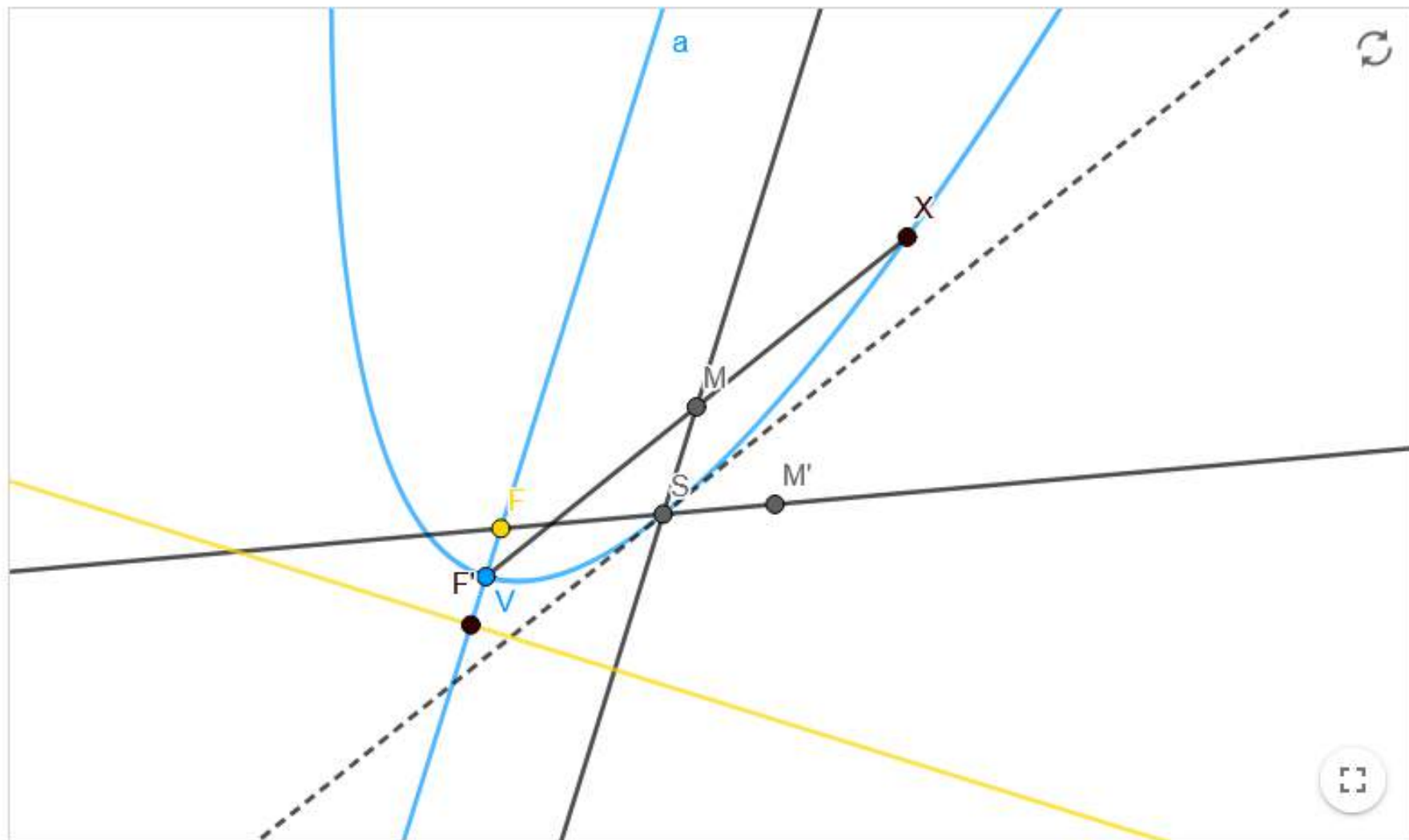
- Scrivete in modo esauriente i passi da seguire per riprodurre la costruzione, verificandoli nella schermata di GeoGebra che segue.



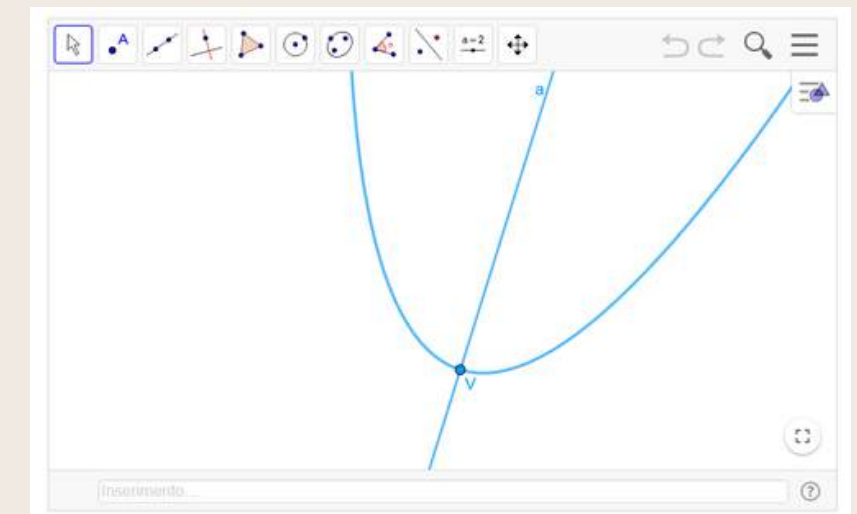
- Perché la costruzione funziona? Provate a motivarlo per iscritto.

COSTRUZIONE 2

Nella figura sono indicati gli elementi che intervengono nella costruzione con riga e compasso della retta gialla e del punto giallo (direttrice e fuoco) a partire dagli elementi assegnati, colorati in azzurro (una parabola, il suo vertice e il suo asse, che possono essere determinati come nella costruzione precedente). Gli elementi in nero rappresentano i passi intermedi della costruzione.



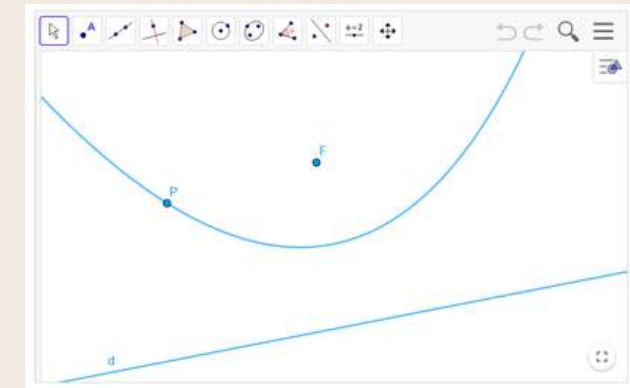
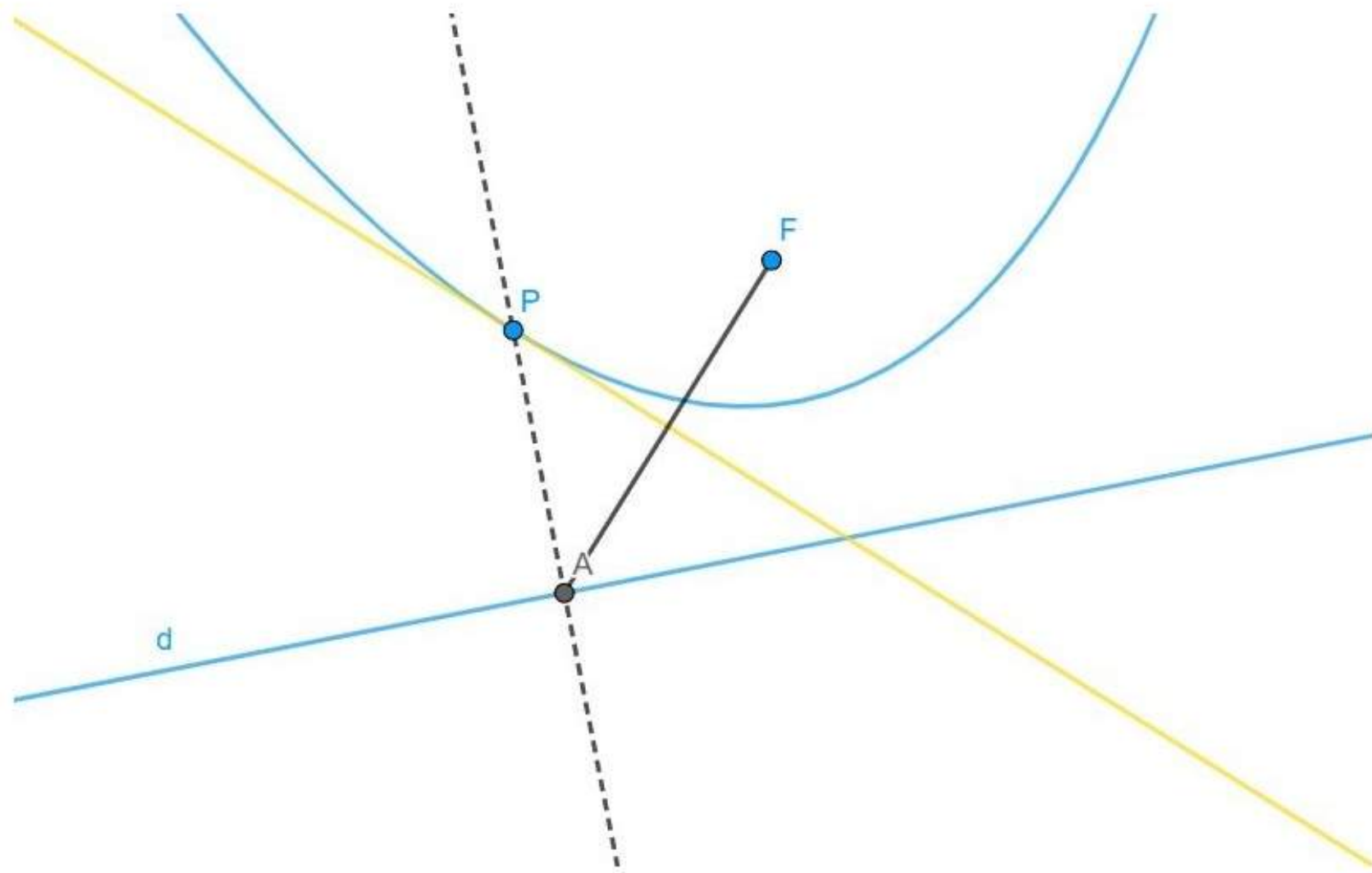
- Scrivete in modo esauriente i passi da seguire per riprodurre la costruzione, verificandoli nella schermata di GeoGebra che segue.



- Perché la costruzione funziona? Provate a motivarlo per iscritto.

COSTRUZIONE 3.

Nella figura sono indicati gli elementi che intervengono nella costruzione della retta gialla con riga e compasso, a partire dagli oggetti assegnati colorati in azzurro (un punto e una retta, la parabola di cui punto e retta sono fuoco e direttrice, un punto sulla parabola). Gli elementi in nero rappresentano i passi intermedi della costruzione.

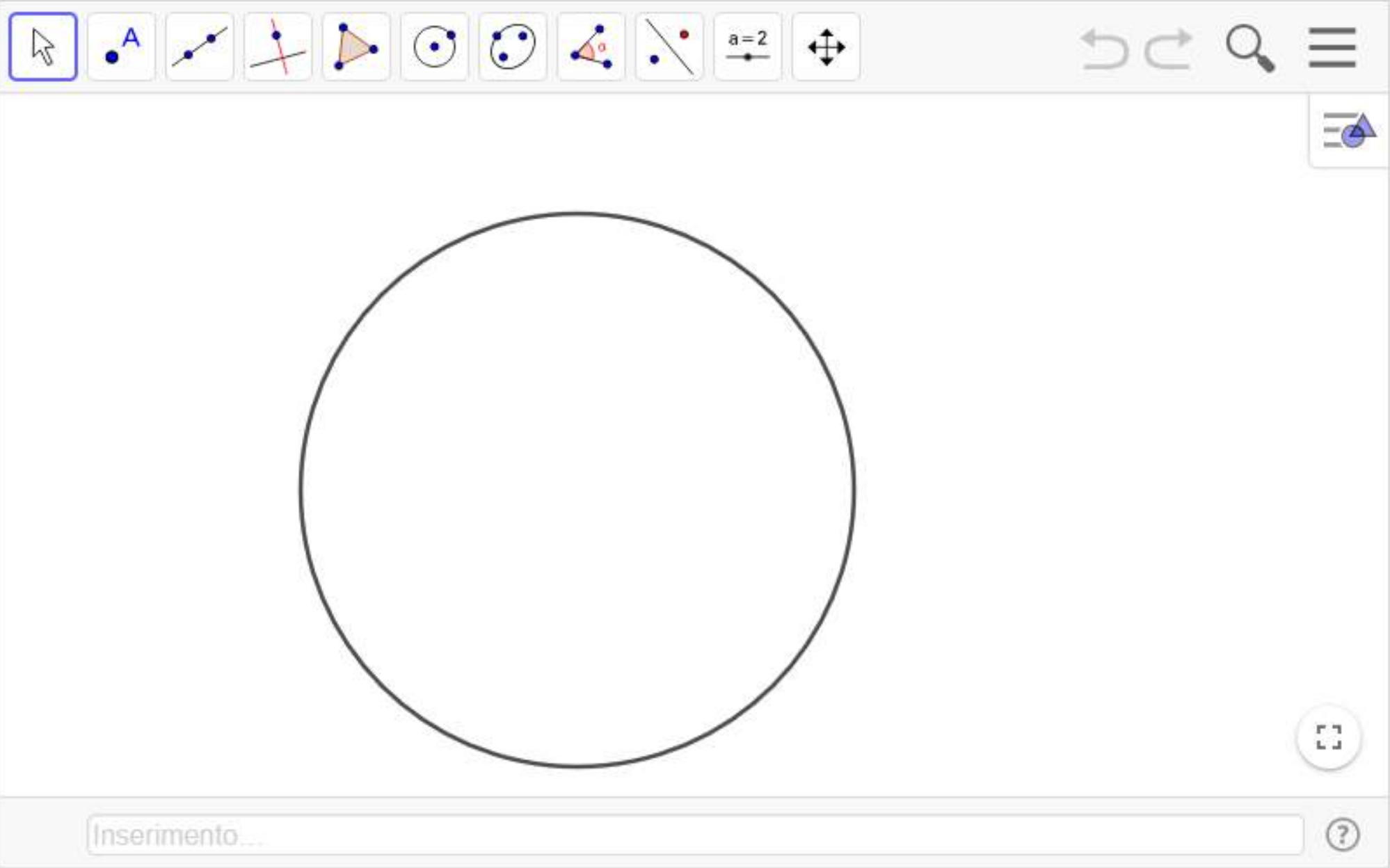


- Scrivete in modo esauriente i passi da seguire per riprodurre la costruzione, verificandoli nella schermata di GeoGebra che segue.

- Quali sono le proprietà della retta che avete costruito?
- Motivate perché la retta che avete costruito gode delle proprietà osservate.
- Tracciate ora la retta r passante per il fuoco F e perpendicolare alla direttrice d . Che proprietà ha la parabola rispetto a tale retta? Come viene chiamata r ?

CIRCONFERENZA

Data una circonferenza, costruire con riga e compasso il suo centro.

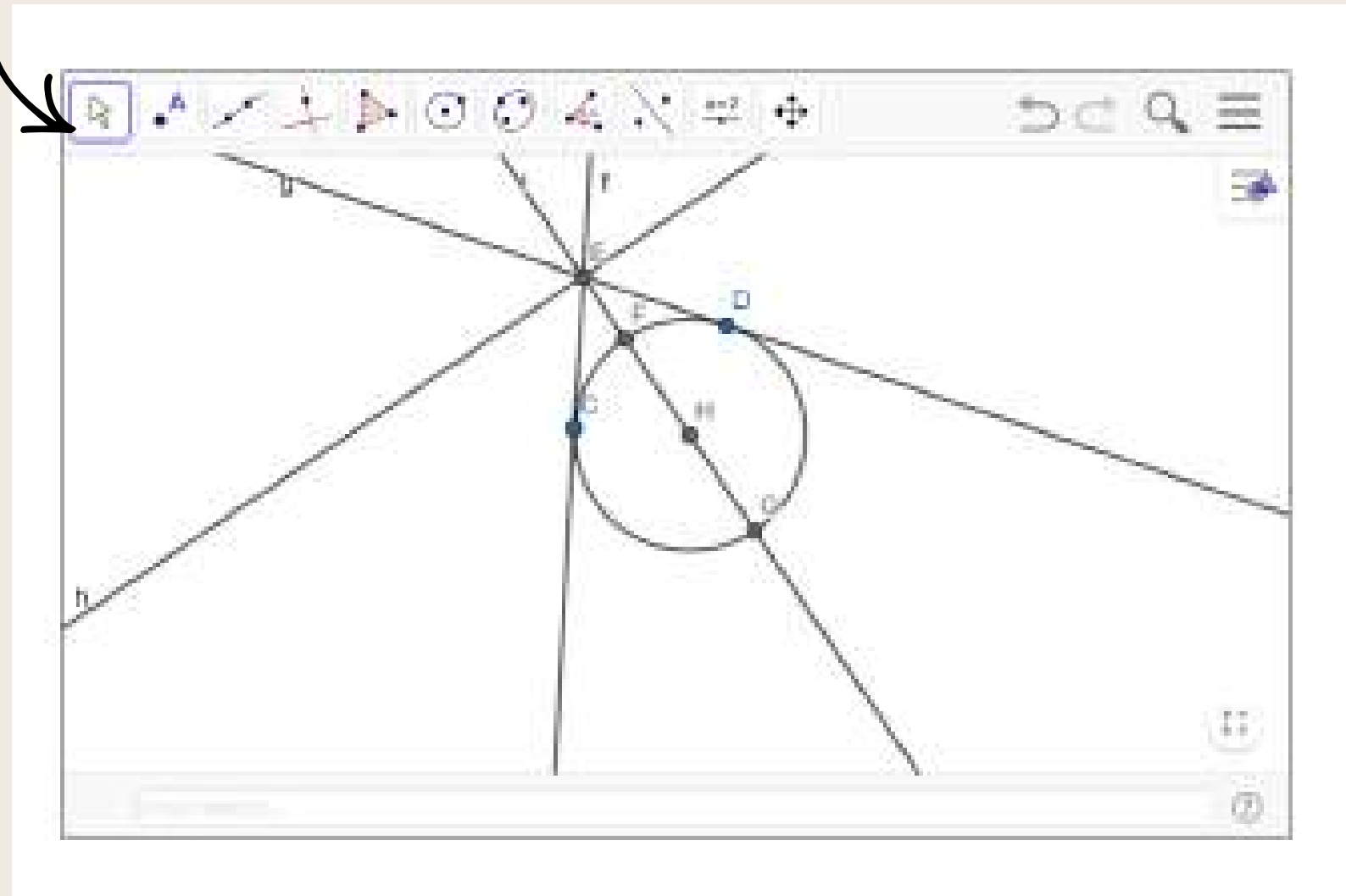


The screenshot shows a geometry software interface. At the top, there is a text prompt: "Data una circonferenza, costruire con riga e compasso il suo centro." Below the prompt is a toolbar containing various geometric construction tools: a selection tool (mouse cursor), a point tool (labeled 'A'), a line tool, a perpendicular line tool, a bisector tool, a circle tool, a compass tool, a triangle tool, a line tool with a red dot, a tool labeled 'a=2', and a zoom tool. To the right of the toolbar are navigation icons: a back arrow, a forward arrow, a magnifying glass, and a hamburger menu. The main workspace contains a single black circle. At the bottom of the workspace is a text input field labeled "Inserimento..." and a help icon (question mark). A zoom-in icon is also visible in the bottom right corner of the workspace.

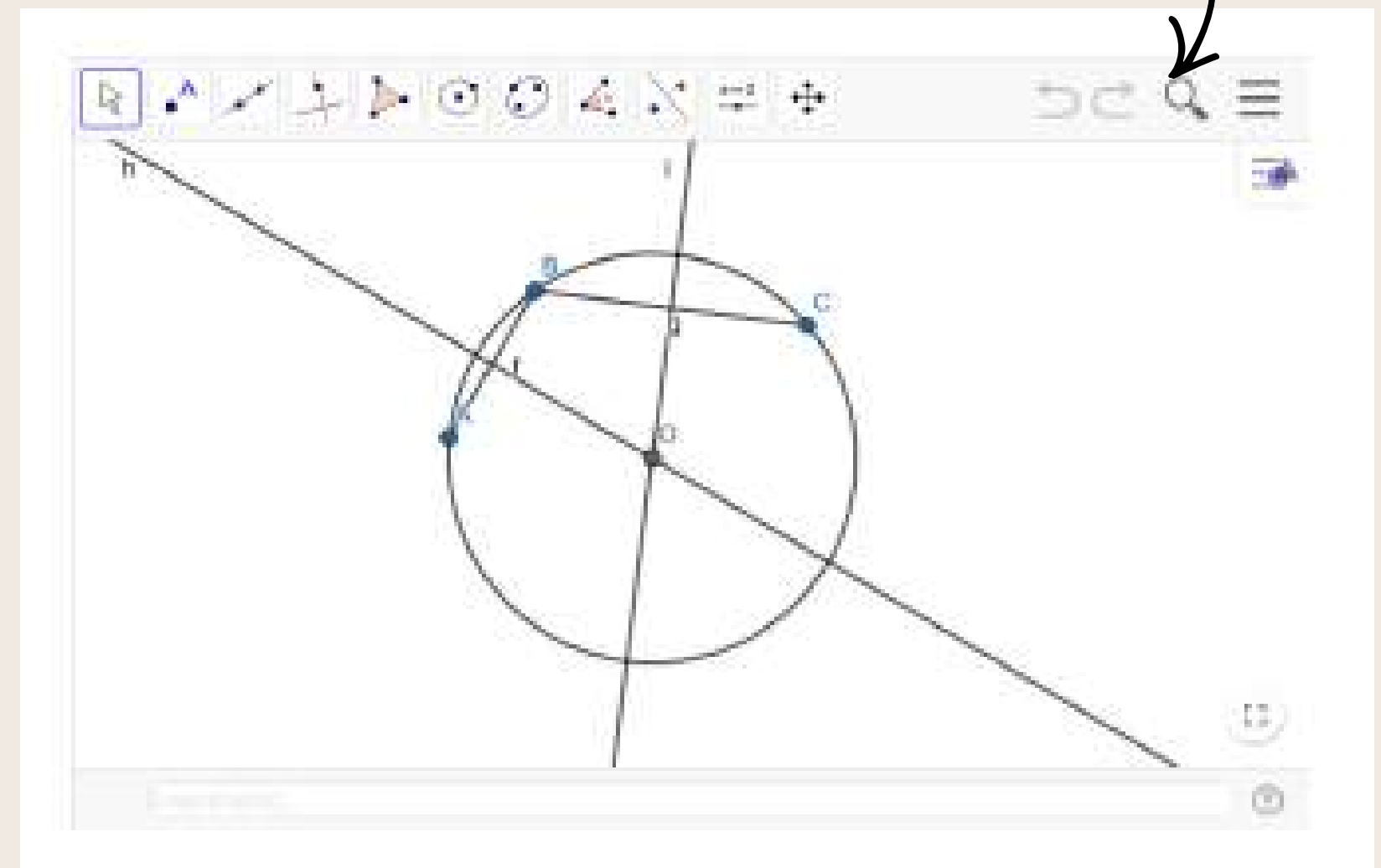
- Descrivete la costruzione che avete realizzato.
- Motivate perché la vostra costruzione funziona.

Diverse possibilità

Costruzioni che sfruttano le tangenti alla circonferenza

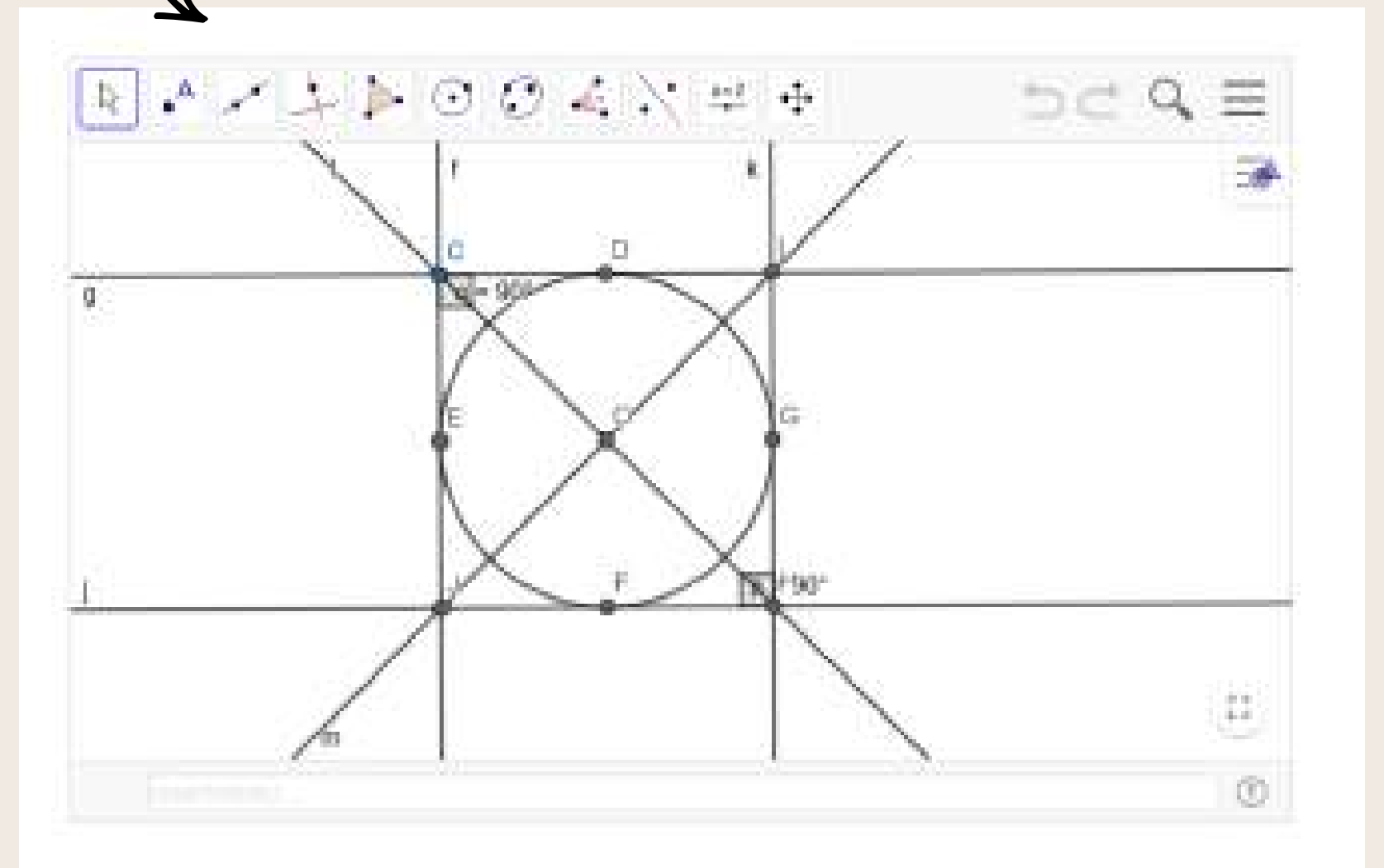
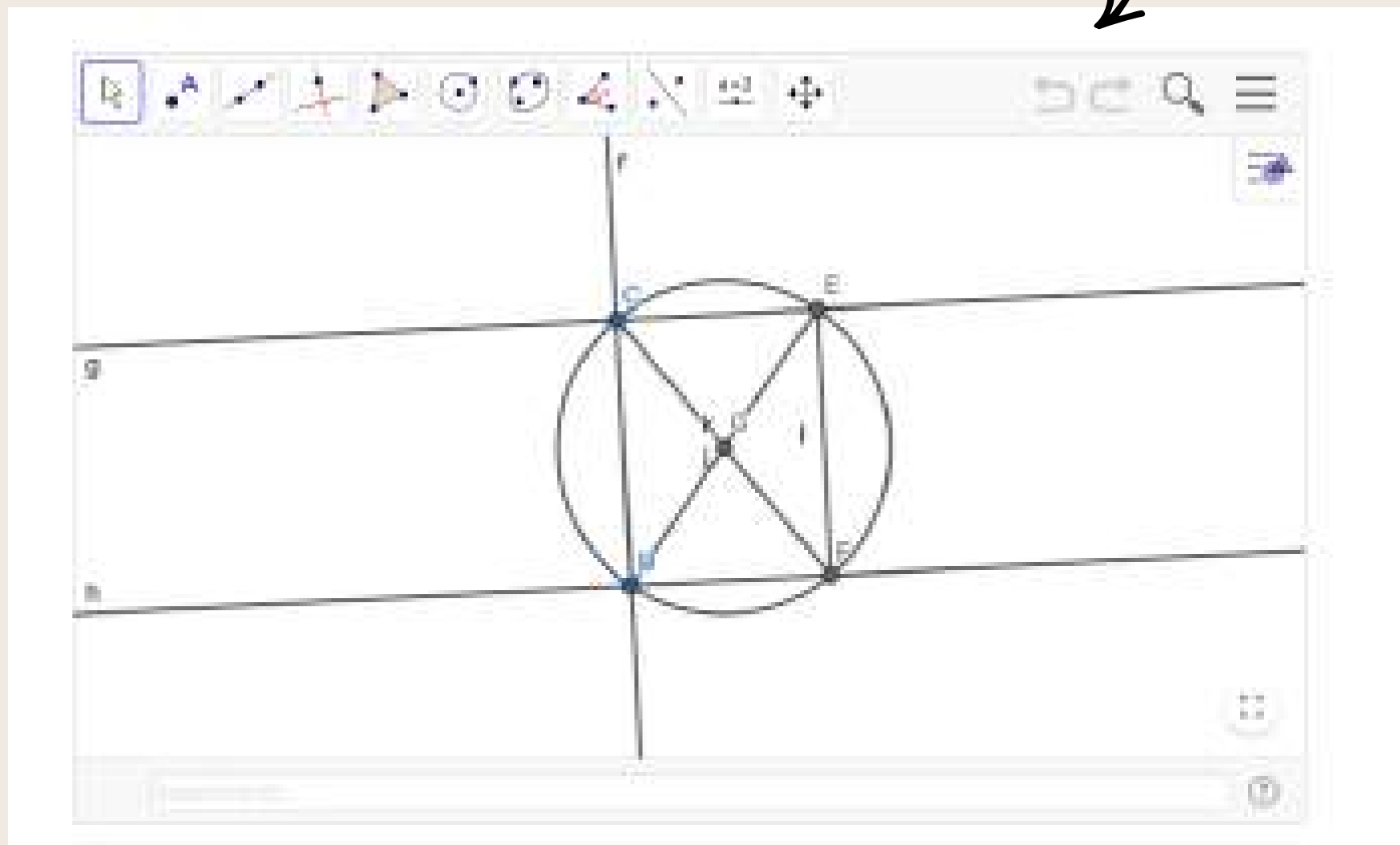


Costruzioni che sfruttano le corde della circonferenza



Diverse possibilità

Costruzioni che sfruttano quadrilateri inscritti e circoscritti



ULTERIORE APPROFONDIMENTO: L'ANALISI DEI FRONTESPIZI

- Descrizione del frontespizio
- Il frontespizio risponde ai canoni fissati per la formulazione di questa pagina?
- Dopo aver osservato bene ogni elemento, quali informazioni possiamo ricavare?
- Quali simboli si possono riconoscere?
- Analisi del titolo: ricerca etimologica
- Ricerca sugli editori
- Ricerca sugli autori



ULTERIORE APPROFONDIMENTO: L'ANALISI DEI FRONTESPIZI

- Descrizione del frontespizio
- Il frontespizio risponde ai canoni fissati per la formulazione di questa pagina?
- Dopo aver osservato bene ogni elemento, quali informazioni possiamo ricavare?
- Quali simboli si possono riconoscere?
- Analisi del titolo: ricerca etimologica
- Ricerca sugli editori
- Ricerca sugli autori



ULTERIORE APPROFONDIMENTO: L'ANALISI DEI FRONTESPIZI



Descrizione



- Parte superiore

Titolo: *Istituzioni delle sezioni coniche*

Autore: Don Guido Grandi, abate camaldolese

- Parte centrale

Simbolo rappresentativo del libro

- Parte inferiore

Luogo di pubblicazione: Venezia e Milano

Data di pubblicazione: 1751

Stampato da Donato Ghisolfi

formula licenza de' superiori



ULTERIORE APPROFONDIMENTO: L'ANALISI DEI FRONTESPIZI



Conformità ai canoni fissati

- sono invertiti il titolo e l'autore
- nome dell'autore scritto con un carattere maggiore per metterlo in risalto

Informazioni ricavabili

- Guido Grandi era un ecclesiastico del '700
- L'opera è stata pubblicata nel 1751 da Donato Ghisolfi
- L'opera è stata approvata dal potere civile

ULTERIORE APPROFONDIMENTO: L'ANALISI DEI FRONTESPIZI



Simboli

- mappamondo
- squadra
- bilancia

Analisi del titolo

- istituzioni = istituzioni → dal lat. institutionis «proposito, regola, consuetudine; istruzione»
- sezione → dal lat. sectionis «taglio»
- conico → derivato di cono, dal lat. conus, gr. κῶνος

ULTERIORE APPROFONDIMENTO: L'ANALISI DEI FRONTESPIZI



Ricerche sugli editori

“Donato Ghisolfi aveva una stamperia a Milano durante il Settecento”

Ricerche sugli autori

“Al secolo Francesco Lodovico Grandi, è stato un matematico e filosofo italiano. Dopo avere concluso gli studi teologici a Roma e quelli geometrici e matematici a Firenze, è professore di filosofia dal 1700 e di matematica dal 1714 all'Università di Pisa. Studia le sezioni coniche e una particolare classe di curve piane, note col nome di rose di Grandi o rodonee, e le loro analoghe sulla sfera. Divulga i fondamenti del calcolo infinitesimale, mostrando una profonda conoscenza delle opere di Leibniz e Newton”

DOMANDE, DUBBI, CURIOSITÀ?



PIANO LAUREE SCIENTIFICHE

20 MARZO 2026

GRAZIE PER
L'ATTENZIONE!



Alessandro Gambini: a.gambini@unibo.it

Maria Chiara Cibien: mariachiara.cibien@unife.it



ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA



Università
degli Studi
di Ferrara