GARA INDIVIDUALE DI MATEMATICA

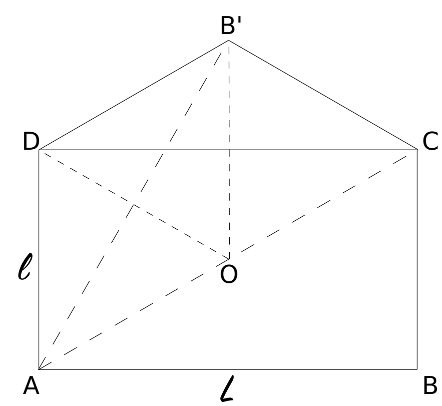
15 aprile 2019

Dipartimento di Matematica, Facoltà di Scienze MM.FF.NN
Sapienza Università di Roma.

I primi due quesiti devono essere consegnati entro la prima ora.
Nella valutazione sarà tenuto conto della chiarezza della risposta.

Quesito 1. *(8 punti – consegnare entro la prima ora)*
Si consideri un foglio rettangolare e si denoti con $ABCD$ la posizione dei suoi vertici, indicati in senso antiorario. Si supponga che AB sia il lato maggiore del rettangolo.
Tale foglio viene piegato lungo la diagonale AC, di modo che il vertice in D rimanga fisso, mentre il vertice in B assuma una nuova posizione indicata con B'.
Sapendo la distanza tra B' e D è uguale a quella tra B e C, calcolare il rapporto tra l'area del foglio rettangolare $ABCD$ e quella del quadrilatero $ACB'D$.

Soluzione Quesito 1 ($\frac{4}{3}$).



Osserviamo che gli angoli $\widehat{ADC}$ e $\widehat{AB'C}$ sono retti, pertanto il quadrilatero $ACB'D$ è inscrivibile in una semicirconferenza di diametro AC. Segue che, denotando con O il punto medio di AC, i segmenti OA, OD, OB' e OC sono di ugual lunghezza. Inoltre, per ipotesi $B'D$ e BC hanno ugual lunghezza, e quindi per costruzione AD, DB' e $B'C$ hanno la stessa lunghezza. Da ciò segue che i triangoli AOD, DOB' e $B'OC$ sono congruenti, con angoli congruenti in O. Quindi i loro angoli in O sono di 60 gradi e di conseguenza i tre triangoli isosceli sono in realtà equilateri.
Denotate con l e L rispettivamente le lunghezze del lato minore e maggiore del rettangolo e con d la lunghezza della diagonale, dal fatto che ADO è equilatero segue che $l = \frac{d}{2}$. Per il Teorema di Pitagora

$$d^2 = l^2 + L^2 \quad \overset{l=\frac{d}{2}}{\Longrightarrow} \quad L = \sqrt{3}l.$$

Pertanto l'area del rettangolo risulta essere uguale a $\sqrt{3}l^2$, mentre l'area del quadrilatero è uguale a tre volte l'area del triangolo equilatero ADO, ossia $3\frac{\sqrt{3}}{4}l^2$.
Concludiamo che il rapporto tra le aree è uguale a $\frac{4}{3}$.

Quesito 2. *(9 punti – consegnare entro la prima ora)*
Quante coppie (p,q) di interi positivi senza fattori comuni esistono tali che $p^2 + q^2$ sia una potenza di 2?

Soluzione Quesito 2 (1)
L'unica coppia ammissibile è $(p,q) = (1,1)$. Per dimostrarlo, è chiaramente sufficiente provare che $p^2 + q^2 = 2$. Notiamo innanzitutto che p e q devono essere entrambi dispari, infatti se fossero entrambi pari avrebbero 2 come fattore comune, e se uno fosse pari e l'atro dispari $p^2 + q^2$ sarebbe dispari. Quindi $p + q = 2m$ per un opportuno m intero positivo. Si ha

$$2pq = (p + q)^2 - p^2 - q^2 = (2m)^2 - 2^k.$$

Se k fosse maggiore o uguale a 2 avremmo che pq sarebbe divisibile per 2, e questo risulterebbe impossibile, ricordando che p e q sono dispari.

Quesito 3. *(10 punti)*
Determinare il minimo della seguente quantità

$$\frac{a^2}{b-1} + \frac{b^2}{a-1},$$

dove a e b sono numeri reali entrambi maggiori di 1.

Soluzione. Il minimo vale 8. Utilizzando il fatto che la media aritmetica è maggiore o uguale della media geometrica, abbiamo

$$\frac{a^2}{b-1} + \frac{b^2}{a-1} \geq 2\sqrt{\frac{a^2}{b-1}\frac{b^2}{a-1}} = 2\frac{a}{\sqrt{a-1}}\frac{b}{\sqrt{b-1}} \geq 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 \tag{1}$$

poichè per $x > 1$ risulta $x/\sqrt{x-1} \geq 2$, dato che quest'ultima disuguaglianza è equivalente a $x^2 \geq 4(x-1)$, cioè $(x-2)^2 \geq 0$. Il minimo valore, 8, dell'espressione di partenza viene effettivamente raggiunto osservando che la prima disuguaglianza nell'equazione (1) diviene un'uguaglianza quando $a = b$, e l'ultima disuguaglianza in (1) diviene un'uguaglianza quando $a = b = 2$.

Quesito 4. *(11 punti)*
Determinare il valore del seguente prodotto

$$\frac{(3^3+1)(4^3+1)\cdots(98^3+1)(99^3+1)}{(2^3-1)(3^3-1)\cdots(97^3-1)(98^3-1)}.$$

Soluzione. Vale

$$161700 = \binom{100}{3}.$$

Si può scrivere il precedente prodotto nella forma

$$\prod_{n=2}^{98} \frac{(n+1)^3+1}{n^3-1}$$

ed osservare, usando le ben note fattorizzazioni di x^3+1 e x^3-1, che

$$\frac{(n+1)^3+1}{n^3-1} = \frac{n+2}{n-1}$$

e quindi che

$$\prod_{n=2}^{98} \frac{(n+1)^3+1}{n^3-1} = \prod_{n=2}^{98} \frac{n+2}{n-1} = \frac{100 \cdot 99 \cdot 98}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 100 \cdot 33 \cdot 49.$$