PROGRAMMA DEL CORSO di DOTTORATO
**Prof. Paolo Piccione**

Titolo: **Tecniche di biforcazione in problemi variazionali geometrici**

Nel corso saranno presentati alcuni risultati generali di Teoria della Biforcazione per problemi variazionali, e saranno discusse alcune applicazioni nell'ambito della Geometria Riemanniana e della Geometria Lorentziana.

Il contesto tipico per un problema di biforcazione è dato da una famiglia ad un parametro di funzionali, definiti su uno spazio (o una varietà) di Hilbert, ed una famiglia di punti critici. Risultati classici relazionano l'esistenza di rami di biforcazione di punti critici al salto dell'indice di Morse. Faremo una revisione di questi risultati, considerando anche alcune generalizzazioni importanti:

- funzionali con punti critici che hanno indice di Morse infinito;
- funzionali che sono invarianti per l'azione di un gruppo di Lie di simmetrie.

Per studiare punti critici con indice di Morse infinito, sarà introdotta la nozione di flusso spettrale per un cammino di operatori autoaggiunti di Fredholm su uno spazio di Hilbert. In termini un po' imprecisi, il flusso spettrale di un cammino di operatori conta quanti autovalori passano per lo zero, e corrisponde alla differenza dell'indice di Morse agli estremi del cammino, nel caso finito. Per il caso di azioni di gruppi, sarà discusso un risultato di biforcazione equivariante, basato sulla teoria di rappresentazioni, provato originalmente da Smoller e Wasserman (1990). Questo risultato utilizza una nozione più debole di non degenericità, e l'esistenza di biforcazione è relazionata ad un cambiamento di carattere qualitativo nella rappresentazione del gruppo di simmetria sugli autospazi negativi dell'Hessiano.
Terminata la parte astratta del corso, maggiore enfasi sarà data allo studio di alcune applicazioni a problemi variazionali geometrici. Mostreremo come utilizzare la biforcazione per ottenere risultati di molteplicità di soluzioni per questi problemi, includendo:

a) Il problema di Yamabe in varietà compatte e non compatte (problema di Yamabe singolare).
b) Immersioni minime e di curvatura media costante in varietà Riemanniane.
c) Geodetiche in varietà Lorentziane.

Per il problema di Yamabe, studieremo il caso di varietà prodotto, ed alcune generalizzazioni, come per esempio il caso di fibrazioni definite da azioni di gruppi (fibrazioni omogenee).
Per il caso di fibrazioni omogenee e utilizzeremo il criterio di biforcazione equivariante.
Per il problema di Yamabe in varietà non compatte, studieremo in dettaglio la molteplicità di metriche nella classe conforme della metrica rotonda, con curvatura scalare costante e complete, definite nel complementare di una k-sfera dentro una n-sfera, con $k < n$. Tale varietà è conformemente equivalente al prodotto di una sfera e di uno spazio iperbolico. Mostreremo come utilizzare una riduzione al caso compatto considerando quozienti discreti dello spazio iperbolico, cioè, varietà compatte iperboliche. Nel caso di superfici iperboliche, la biforcazione per il problema di Yamabe sarà studiata utilizzando proprietà spettrali di metriche nello spazio di Teichmüller.
Nello studio di immersioni minime e con curvatura media costante, prenderemo in considerazione il caso di immersioni di varietà compatte (con o senza bordo), in varietà Riemanniane astratte. Per varietà con bordo, analizzeremo il caso di frontiera fissa e di frontiera libera. Particolare attenzione sarà dato al caso di foliazioni di varietà date da orbite di azioni isometriche di coomogeneità 1. In questa situazione, discuteremo un problema di biforcazione equivariante con rottura di simmetria

quando le orbite principale di questa azione collassano su un’orbita singolare.
Nella Geometria Lorentziana, studieremo il caso unidimensionale di geodetiche. Introdurremo un invariante simplettico chiamato indice di Maslov, e mostreremo una versione Lorentziana del Teorema dell’Indice di Morse per geodetiche, che relaziona l’indice di Maslov con il flusso spettrale dell’Hessiano del funzionale azione. Mostreremo quindi risultati di biforcazione, utilizzando punti coniugati lungo le geodetiche. Il caso di geodetiche di tipo spazio risulta di particolare interesse. In questa situazione, punti coniugati possono accumularsi, ed in principio un punto coniugato non produce biforcazione. Il caso di geodetiche di tipo tempo o luce ammette interessanti interpretazioni nella Relatività Generale. La biforcazione di geodetiche di tipo luce offre un modello matematico per il cosiddetto fenomeno delle lenti gravitazionali.

Il corso si articolerà principalmente nei seguenti argomenti:

1) Punti critici e indice di Morse. Problemi variazioni fortemente indefiniti e flusso spettrale.
2) Criteri di biforcazione variazionale. Biforcazione equivariante.
3-4) Biforcazione nel problema di Yamabe in varietà compatte. Varietà prodotto. Fibrazioni omogeneee.
5) Elementi di teoria di Teichmüller in superfici iperboliche e in varietà di Bieberbach, con applicazioni al problema di Yamabe in varietà non compatte. Cenni sulla Q-curvatura e l’operatore di Paneitz.
6) Ipersuperfici di curvatura media costante. Varietà di coomogeneità uno.
7) Elementi di Geometria Lorentziana. Geodetiche. Biforcazione di raggi di luce e lenti gravitazionali.
8) Algebra lineare simplettica. Indice di Maslov per geodetiche Lorentziane. Punti coniugati e biforcazione.