LICEO SCIENTIFICO "PLINIO SENIORE"
LICEO MATEMATICO

1. Simmetria

Molto spesso si parla di *simmetria centrale* per indicare quella che abbiamo denominato finora *rotazione di 180° intorno ad un punto* P e *simmetria assiale* quella che noi abbiamo denominato con *riflessione rispetto ad una retta.* L'uso della terminologia adottata ha un duplice scopo: innanzitutto perché si è voluto mettere in evidenza che si tratta di tipi di trasformazioni diverse, ad esempio una mantiene l'orientazione e l'altra la inverte, in secondo luogo perché volevamo riservare il termine "*simmetria*" ad un'altra situazione più generale.

Ci chiediamo a questo punto quand'è che una figura è simmetrica? Un modo per capirlo è quello di analizzare le isometrie del piano che la fissano, cioè che la mandano in se stessa. Si definisce **simmetria di una figura** una tale trasformazione.
Ne esiste sempre una che è quella banale dell'identità. Ma le figure simmetriche sono quelle tali che ne hanno almeno una non banale.

Quali sono dunque le isometrie che posso mandare una figura in se stessa? Se la figura è limitata (ovvero se è contenuta in un cerchio di raggio *r*) allora le uniche isometrie non banali che la possono lasciare fissa sono le rotazioni e le riflessioni. Le traslazioni e di conseguenza le glissoriflessioni infatti porterebbero la figura fuori da sé.

Chiamiamo allora **gruppo di simmetria** di una figura la famiglia di tutte le isometrie che la fissano. Esaminiamo alcuni esempi.

Una simmetria della *figura 1* è una rotazione di 60° intorno al punto segnato. Altre simmetrie sono le rotazioni di 120°, di 180°, di 240°, di 300° e di 360° sempre rispetto allo stesso punto. Possiamo dedurre allora che il gruppo di simmetria della figura è costituito da sei elementi, che possiamo descrivere come la rotazione intorno al punto O di 60° e tutti i suoi multipli.

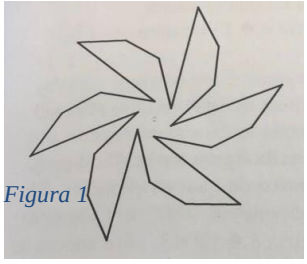
Figura 1

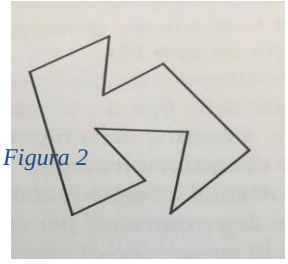
Figura 2

L'unica isometria del piano che fissa la *figura 2* invece è l'identità: il suo gruppo di simmetria si riduce pertanto ad un solo elemento.

La riflessione rispetto ad un asse (quale?) è l'unica simmetria della *figura 3* oltre l'identità. Quindi il suo gruppo contiene due elementi.

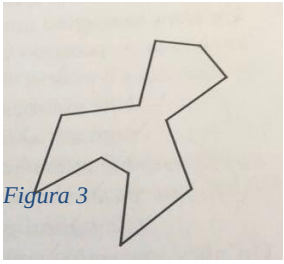
Figura 3

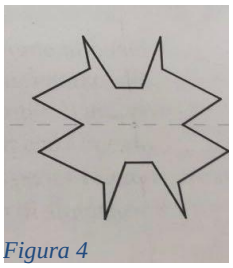
Figura 4

Nella *figura 4* si possono individuare due riflessioni assiali e due rotazioni di 180° e di 360°. Pertanto il suo gruppo di simmetria è costituito da quattro elementi.

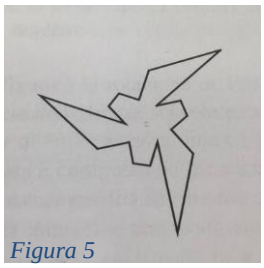
Figura 5

Le simmetrie della *figura 5* sono le seguenti: rotazione di 120°, di 240° e di 360° rispetto al punto segnato. Il gruppo di simmetria è pertanto costituito da tre elementi che possiamo descrivere come la rotazione intorno al punto O di 120° ed i suoi multipli.

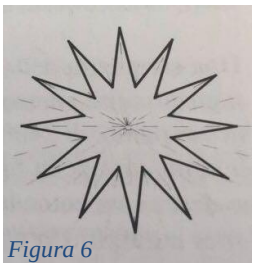
Figura 6

Infine, nella *figura 6* si possono individuare ben 24 simmetrie: dodici riflessioni e dodici rotazioni intorno al punto di intersezione degli assi di riflessione di angoli multipli di 30°.

Proposta di lavoro 1
Disegnare sei figure che abbiano rispettivamente le stesse simmetrie delle figure sopra esaminate.

Proposta di lavoro 2
Costruire le immagini della *figura 7* rispetto alle rotazioni intorno ad O di 90°, 180° e 270°. Considerare poi la nuova figura **F** costituita dalla figura iniziale e dalle sue tre immagini. Studiare il suo gruppo di simmetria e verificare che è costituito da 8 elementi.

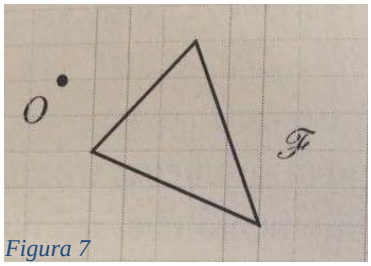

Figura 7

Proposta di lavoro 3
Spostare il punto O della proposta precedente in modo che il gruppo di simmetria della figura **F** sia costituito solo da quattro rotazioni.

2. Un po' di definizioni

Possiamo ora procedere in maniera più formale a fornire alcune definizioni.
Diciamo che una retta *r* è un **asse di simmetria** per una figura quando la riflessione rispetto ad essa fissa la figura data.
Diciamo che O è un **centro di simmetria** per una figura quando una qualche rotazione intorno ad essa (diversa dall'identità) è una simmetria della figura. Inoltre, si dice che questo punto è un **centro di simmetria di ordine k** se per ritrovare l'identità bisogna iterare *k* volte la rotazione più piccola possibile di centro O che fissa la figura.

Si può parlare analogamente di **gruppo di simmetria ciclico** costituito da *k* rotazioni che mandano la figura in se stessa. Queste rotazioni hanno tutte lo stesso centro e come ampiezza i multipli di $\frac{360°}{k}$.

Diciamo invece che una figura possiede un **gruppo di simmetria diedrale** costituito da *2n* elementi se esistono *n* rotazioni ed *n* riflessioni che mandano la figura in se stessa. Gli assi di riflessione si incontrano tutti in un punto e formano tra loro *2n* angoli di ampiezza $\frac{360°}{2n}$. Le *n* rotazioni hanno centro nel punto di intersezione degli assi e angoli multipli di $\frac{360°}{n}$.

Proposta di lavoro 4
Analizzare le figure precedenti e per ciascuna indicare l'ordine di simmetria dell'eventuale centro di simmetria e gli eventuali assi di simmetria, schematizzandone le informazioni ricavate.

Si fa osservare che, in alcuni testi, si ritrova la seguente definizione di centro di simmetria: O è un **centro di simmetria** per una figura se un mezzo giro intorno ad O manda la figura in se stessa. Secondo tale definizione però, ad esempio, la *figura 5* non avrebbe centro di simmetria, mentre lo ha se adottiamo la definizione che abbiamo fornito sopra. Ciò accadrebbe in realtà con tutte le figure con centro di simmetria dispari (**perché?**).
Si preferisce dunque adottare la definizione precedentemente fornita anche per ragioni di uniformità con la mineralogia, in cui si parla di asse di rotazione di ordine *k* anche quando *k* è dispari.

Proposta di lavoro 5
Fornire un esempio di figura con un gruppo di simmetria contenente tre rotazioni e tre riflessioni ed uno di una figura contenente solo tre rotazioni che la fissano.

Proposta di lavoro 6
Costruire una figura che ammetta come assi di simmetria le due rette disegnate nella *figura 8*.

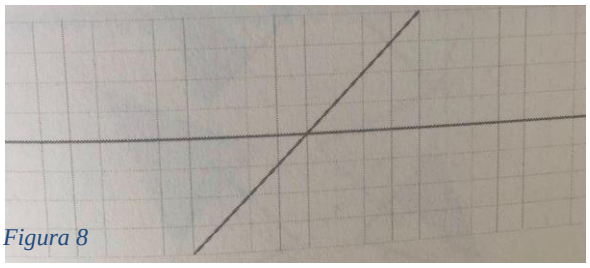

Figura 8

Proposta di lavoro 7
Stabilire se "retta che divide in due parti uguali" può essere una buona definizione di asse di simmetria di una figura.

3. Simmetria nei poligoni

Analizzando i dati di cui alla *proposta 4* si individuano tutti i casi possibili nei poligoni. Riepilogando:

- Non ci sono assi di simmetria, c'è un centro di simmetria di ordine *k* (rientra qui con k=1 un poligono privo di simmetrie).
- C'è un centro di simmetria di ordine k e ci sono esattamente k assi di simmetria tutti passanti per il centro di simmetria (rientra in questo caso per k=1 un poligono con solo un asse di riflessione come quello della *figura 3*).

Se analizziamo la simmetria di un qualunque poligono piano scopriamo che ricade sempre in uno di questi due casi per un certo valore di *k*.
Questo risultato è stato attribuito a *Leonardo* e vale non solo per i poligoni ma per una qualunque figura piana con un gruppo di simmetria finito.

Proposta di lavoro 8
Disegnare tre figure diverse che abbiano la stessa simmetria del rettangolo e altre tre che abbiano la stessa simmetria del quadrato.

Proposta di lavoro 9
Disegnare tre triangoli i cui gruppi di simmetria comprendano rispettivamente:

- soltanto identità;
- una sola riflessione (e l'identità);
- più di due elementi.

E' possibile costruire un triangolo il cui gruppo di simmetria comprenda una rotazione di 180°? Se sì, perché?

Proposta di lavoro 10
Provate a "classificare" i quadrilateri a seconda la loro simmetria. Troverete sette tipi.

- quadrati;
- rettangoli e rombi (che non siano quadrati);
- deltoidi o aquiloni e trapezi isosceli;
- parallelogrammi (che non siano né rettangoli né rombi);
- quadrilateri completamente asimmetrici.

Come potreste ulteriormente distinguere tra rettangoli e rombi e tra deltoidi e trapezi isosceli usando la simmetria? (*sugg*. Esaminate come si comportano le simmetrie sui vertici del quadrilatero).

4. Concetto di Gruppo

In matematica con la parola **gruppo** si indica una particolare **struttura algebrica**. Diamo pertanto la definizione rigorosa.
Un **gruppo** è un insieme **G** munito di una operazione binaria * tale che ad ogni coppia di elementi $a,b \in$ **G** associa un elemento, che indichiamo con a*b appartenente a **G** rispettando i seguenti assiomi:

- *Proprietà associativa:* dati $a, b, c \in$ **G** si ha $(a*b)*c=a*(b*c)$
- *esistenza dell'elemento neutro*: esiste $\boldsymbol{u} \in$**G** tale che $a*\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}*a=a$
- *esistenza dell'inverso*: ad ogni elemento $a \in$ **G** è associato un elemento $a' \in$ G, detto inverso di *a*, tale che $a*a'= a'*a= \boldsymbol{u}$.

Ad esempio, l'insieme ***Z*** è un gruppo rispetto all'operazione di addizione e si indica nel seguente modo (***Z***,+).

Dunque, si può facilmente verificare, il gruppo di simmetria di una figura è proprio una struttura di gruppo algebrico.
Essendo tali gruppi costituiti da un numero finito di elementi, possiamo rappresentarli sotto forma di tabella.
Ad esempio, prendiamo in considerazione il gruppo della *figura 5*. Esso è costituito da tre elementi: identità (indichiamola con ***1***), rotazione di 120° intorno ad O (indichiamola con ***f***) e rotazione di 240° sempre intorno ad O (indichiamola con ***g***).
Possiamo rappresentare il gruppo in modo tabellare.

°	*1*	*f*	*g*
1	*1*	*f*	*g*
f	*f*	*g*	*1*
g	*g*	*1*	*f*

Proposta di lavoro 11
Costruire le tabelle dei gruppi di simmetria per le figure 1;2; 3; 4. Sono gruppi commutativi?

Proposta di lavoro 12
Cosa ci ricordano tali tabelle? Abbiamo esaminato strutture simili?

Proposta di lavoro 13
Verificare che la tabella seguente descrive il gruppo di simmetria per la *figura 9*. Si indichi con ***R*** la rotazione (in senso antiorario) di 120°, con ***S*** quella di 240°, con ***r*** la riflessione rispetto all'asse orizzontale, con ***s*** rispetto all'asse che forma un angolo di 60° con ***r***, con ***t*** l'asse che forma un angolo di 60° con ***r***.

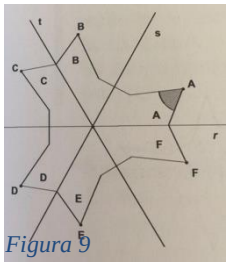

Figura 9

°	*1*	*R*	*S*	*r*	*s*	*t*
1	*1*	*R*	*S*	*r*	*s*	*t*
R	*R*	*S*	*1*	*t*	*r*	*s*
S	*S*	*1*	*R*	*s*	*t*	*r*
r	*r*	*s*	*t*	*1*	*R*	*S*
s	*s*	*t*	*r*	*S*	*1*	*R*
t	*t*	*r*	*s*	*R*	*S*	*1*

Il gruppo di simmetria è costituito da 6 elementi come quello della *figura 1*. Sono uguali?

Bibliografia e Sitografia

- **G. Accascina**, *Trasformazioni geometriche nel piano* - Dispense del corso di Didattica della Matematica - SSIS A.A. 2001-2002.
- **G. Caiati, A. Castellano**, *Ruota, trasla e…rifletti*, Mimesis edizioni.
- **L. Cannizzaro, M. Menghini,** Figure geometriche e definizioni - Battagin PADERNO DEL GRAPPA
- **M. Dedò,** *Galleria di metamorfosi***,** Mimesis edizioni.
- **G. Prodi, A. Bastianoni,** *Scoprire la matematica- Geometria del piano*, Ghisetti e Corvi Editori.