



# Olimpiadi di Matematica al Castelnuovo 2023

## Gara individuale

**Regole:** Tempo: 120 minuti; Punti: Esercizi 1-10: risposta esatta= 5 punti, risposta non data = 1 punto, risposta errata = 0 punti. Svolgimento esercizi 9-10: da 0 a 5 punti (aggiuntivi rispetto ai 5 punti della risposta giusta; se la risposta è errata o mancante 0 punti indipendentemente dallo svolgimento). Totale= 60 punti.

### Esercizi a risposta multipla

**Esercizio 1** Sara non ricorda l'orario di ingresso a scuola della prossima settimana, ma ricorda che le lezioni si terranno tutti i giorni dal lunedì al venerdì, che inizieranno alle 8, alle 9, alle 10 o alle 11 e che non inizieranno mai alla stessa ora per due giorni consecutivi. Quante sono le possibili combinazioni di orari di ingresso?

*Risposte:* A) 28; B) 108; C) 154; D) 324; E) 1024.

**Esercizio 2** Ho una scala con 6 scalini, che per semplicità chiameremo (partendo da quello più in basso, salendo...): inferno, 1, 2, 3, purgatorio, paradiso. Ogni minuto che passa tiro una moneta; se mi trovo nello scalino 1, se viene croce vado all'inferno e ci rimango per sempre, se viene testa salgo allo scalino 2; se mi trovo negli scalini 2 o 3, se viene testa salgo di uno scalino, se viene croce scendo di uno scalino; se mi trovo in purgatorio, se viene testa salgo in paradiso e ci rimango per sempre; se viene croce rimango fermo.

Qual è la probabilità che, partendo dallo scalino 1, prima o poi (avendo a disposizione un'infinità di lanci) io vada in paradiso?

*Risposte:* A) 0; B)  $\frac{1}{5}$ ; C)  $\frac{1}{4}$ ; D)  $\frac{1}{3}$ ; E)  $\frac{1}{2}$ .

**Esercizio 3** Si considerino i seguenti 4 numeri:  $n_1 = 1 + 10^3 + 10^6 + 10^9 + \dots + 10^{3 \cdot 2023}$ ,  $n_2 = (8^9)^{60}$ ,  $n_3 = 15263748 + 3^{50} + 100^{100} + 501020 + 6^{40}$ ,  $n_4 = n_1 n_2 n_3 + 1$ . Quanti tra i suddetti numeri sono divisibili per 3?

*Risposte:* A) 0; B) 1; C) 2; D) 3; E) 4.

**Esercizio 4** Siano  $m \geq 1$  e  $3 \leq n \leq 12$  due numeri naturali. Mario tira due dadi, e fa un punto se la somma è almeno  $n$ ; Gino tira quattro dadi e fa un punto se la somma è almeno  $2n$ . Vince chi fa più punti dopo  $m$  tiri (in caso di parità saranno entrambi vincitori). Chi ha più possibilità di vincere?

*Risposte:* A) Mario (indipendentemente da  $n$  e  $m$ ); B) Gino (indipendentemente da  $n$  e  $m$ ); C) Hanno le stesse possibilità (indipendentemente da  $n$  e  $m$ ); D) Dipende da  $m$  (indipendentemente da  $n$ ); E) Dipende da  $n$  (indipendentemente da  $m$ ).

**Esercizio 5** Si consideri una tassellazione di un disco di diametro  $n \geq 100$  metri con quadrati di lato 1 metro, di modo che i quadrati non si sovrappongano e ricoprano tutto il disco. Detto  $m$  il numero di quadrati che intersecano la circonferenza, quali delle seguenti condizioni è verificata?

*Risposte:* A)  $m < \frac{7}{4}n$ ; B)  $\frac{7}{4}n < m < 32n$ ; C)  $32n < m < \frac{n^2}{\sqrt{2}}$ ; D)  $\frac{n^2}{\sqrt{2}} < m < 2n^2$ ;  
E)  $m > 2n^2$ .

## Esercizi a risposta numerica

**Esercizio 6** Nel piano cartesiano si considerino per  $n = 0, \dots, 5$  i triangoli  $\mathcal{T}_n$  di vertici  $A_n = (2^n, 0)$ ,  $B_n = (2^{n+1}, 0)$ ,  $C_n = (\frac{1}{2}(2^n + 2^{n+1}), 2^{n+1})$  e per  $n = 0, \dots, 4$  i triangoli  $\mathcal{S}_n$  di vertici  $C_n, C_{n+1}, B_n$ . Si calcoli la somma delle aree di tutti questi triangoli.

**Esercizio 7** Un orologio a pendolo, costituito da un disco in cui sono segnate le ore da 1 a 12, è stato appena regolato con l'ora esatta 07:16, e ogni giorno perde 2 minuti e venti secondi. Dopo quanti giorni l'orologio segna nuovamente (per la prima volta dopo essere stato regolato) l'ora esatta 07:16?

**Esercizio 8** Tra tutte le espressioni dove compaiono una e una sola volta i numeri (ad una sola cifra) 1, 2, 3, 4, 5, 6, e come operazioni possono comparire solo l'addizione e la moltiplicazione, e si possono usare le parentesi che si vogliono, qual è il risultato più grande che si può ottenere?

## Esercizi a risposta numerica con svolgimento

**Esercizio 9** Siano  $a, b, c \geq 0$  tre numeri reali non negativi tali che  $a + b + c = 2$ . Calcolare il massimo di  $abc - a(b + c) + 8b^7c^7$ .

**Esercizio 10** Per via di una perdita d'acqua, delle gocce cadono con frequenza costante da un punto di un soffitto sotto al quale si trova un giradischi con un disco che gira al ritmo di 33 giri al minuto. Sapendo che, trascorso un minuto dal momento in cui la prima goccia cade sul disco, ci sono esattamente 34 tracce d'acqua sul disco, in corrispondenza dei vertici di un poligono regolare, determinare il massimo intervallo di tempo possibile tra la caduta di una goccia e la successiva.

*Esprimere il tempo in minuti (eventualmente tramite una frazione).*