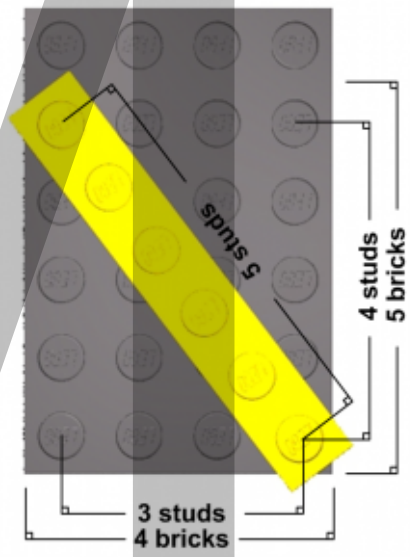
Incontro con i Licei Matematici Grassi, Newton e Pascal

CONTARE

dall'osso di babbuino agli assiomi di Peano

Annalisa Malusa – Università di Roma "La Sapienza"

Noi utilizziamo i numeri sostanzialmente dall'inizio della nostra vita per contare, misurare, suddividere,…



I numeri sono l'alfabeto della matematica.

Siamo sicuri di conoscerli bene?

In questo incontro parleremo di NUMERI, OPERAZIONI e non solo…

CONTARE

- Origini del contare e del misurare
- Breve storia dei sistemi di numerazione
- I numeri naturali

La presentazione non pretende di essere esaustiva, ma solo di proporre spunti di riflessione e approfondimento.

LM

Origini del contare e del misurare

Contare è un meccanismo primigenio oppure una conquista evolutiva?

LM

Si ritiene che i concetti primordiali siano

UNO – DUE – MOLTI

Indizi per questo sospetto:

- capacità propria dei **neonati**;
- **etnomatematica**, studio delle matematiche dei gruppi socioculturali: ancora oggi le popolazioni indigene dei **Pigmei** (Africa), dei **Botocudos** (Brasile) e degli **Aranda** (Australia) contano fino a due.
- **riscontri linguistici**:
  - in molte lingue i "numeri grammaticali" sono tre: singolare, duale e plurale (lingue antiche: sanscrito, greco. Lingue moderne: sloveno, lituano, arabo, egizio).
  - Anche in lingue che non hanno il duale sono visibili gli "effetti" di questo meccanismo: ambo (in italiano, per dire "tutti e due"), très (in francese significa "molti")

LM

L’esigenza di contare in maniera estesa nasce da un problema pratico: **“molti: ok, ma quanti?”**

Ad esempio: “quanti animali devono rientrare nel recinto dopo il pascolo?”

Tecnica 1: corrispondenza di numerosità. Impilo un sasso per ogni animale che esce dal recinto e poi uso la pila per contarli al rientro. Nota: non c’è traccia di numeri (neanche sugli strumenti “portatili”). Funziona, ma è poco pratico.

Tecnica 2: primi strumenti di misurazione e calcolo

Primi strumenti di misurazione e calcolo

Osso di Babbuino di Lebombo (Sudfrica, 35.000 a.C.)

Osso di zampa di lupo di Vestonice (Repubblica Ceca, 30.000 a.C.)

Osso di Babbuino di Ishango (Africa, 20.000 a.C.)

https://samanthacolombo.wordpress.com/2012/01/14/matematica-in-africa-osso-dishango/

Dove si colloca nel tempo l'introduzione degli strumenti di calcolo e misura?

In conclusione:

- Il “contare” primigenio sembrerebbe basarsi solo su **uno-due-molti**;

- L’esigenza del contare è venuta con l’**evoluzione** ed è comunque **significativamente precedente** all’epoca della civiltà e della scrittura;

- Contare corrispondeva a mettere in **corrispondenza biunivoca** elementi di due insiemi diversi:

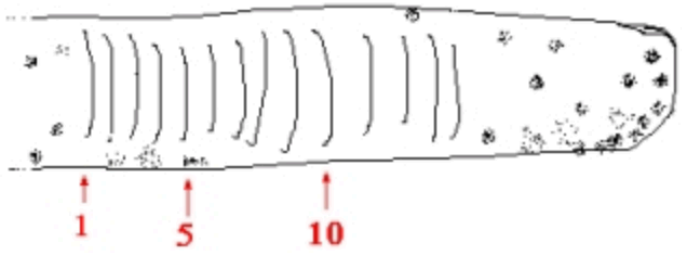
sassi/tacche ⟷ pecore, fasi lunari, etc.

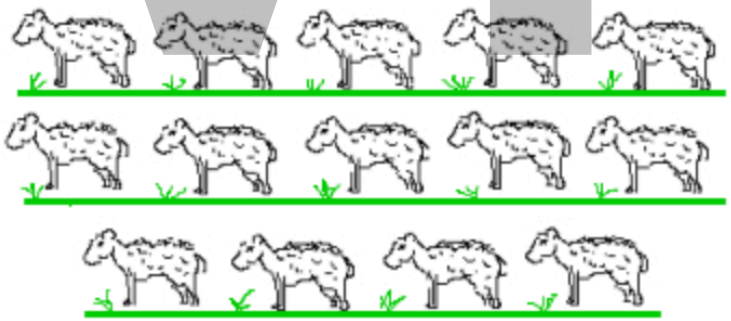
LM

Cos’è una corrispondenza biunivoca?

Mettere in **corrispondenza biunivoca** due insiemi vuol dire

- accoppiare **ogni** elemento di un insieme con un **unico** elemento dell’altro insieme
- in maniera che **non restino elementi spaiati**

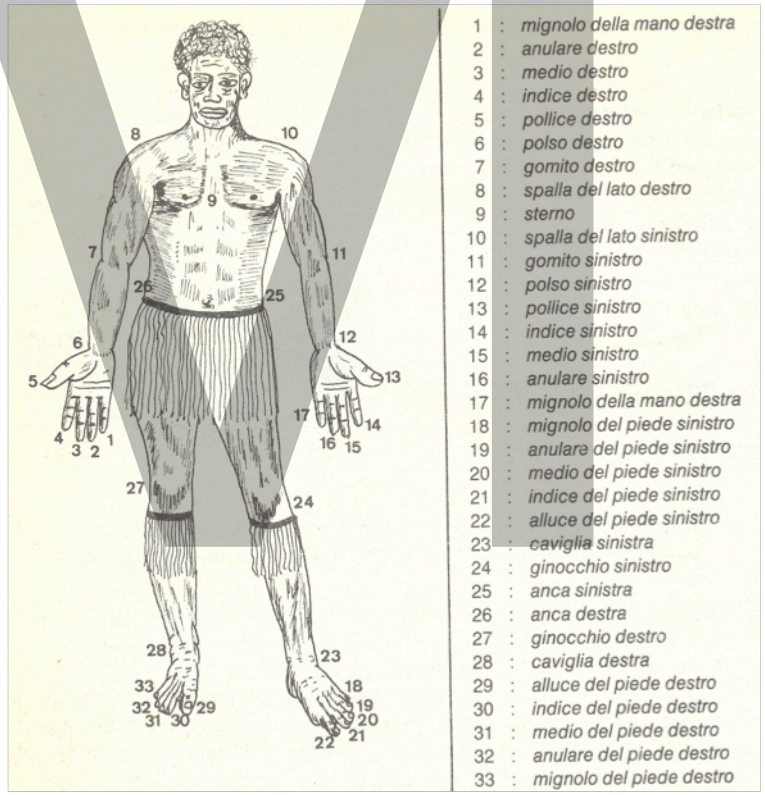




LM

Passo successivo: **contare col corpo**

Ancora in uso, ad esempio, presso alcune popolazioni delle isole dello stretto di Torres (tra l'Australia e la Nuova Guinea)



Abbiamo così a disposizione il **concetto** di numero.

Manca ancora un grande passo, che arriverà con la civiltà:

- **Saper ASSOCIARE ai numeri dei SIMBOLI**
- **Saper OPERARE con i numeri**

Attenzione! I numeri sono tantissimi e quindi è veramente complicato chiamarli tutti per nome! La fortuna delle prime civiltà è che non si sono resi conto del fatto che fossero così tanti…

Alla fine si è arrivati al

SISTEMA POSIZIONALE IN BASE 10

ma solo dopo un lungo percorso.

LM

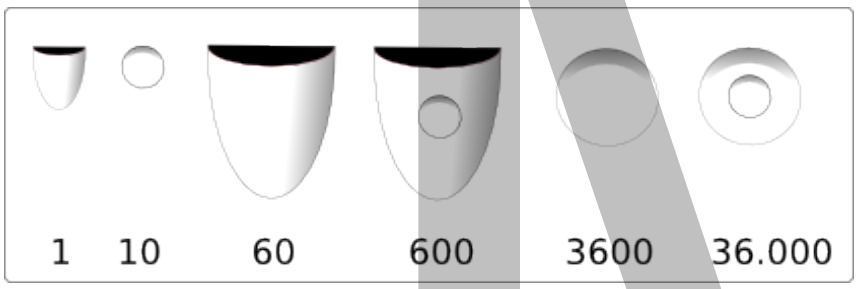
Breve storia
dei sistemi di numerazione

Si è sempre contato e misurato come si fa ora?

LM

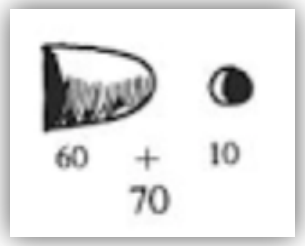
I Sumeri

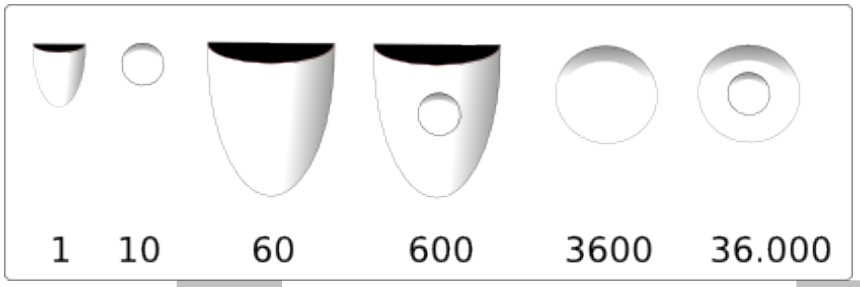
Il primo sistema di numerazione scritta risale ai Sumeri (3.500 a.C.) ed è basata su pochi simboli rappresentanti sassolini "spicciabili"



Nell'idea di "spicciabilità" si può leggere il concetto di frazione.

I numeri si scrivevano per giustapposizione (somma), senza un ordine preciso.





La base dei Sumeri è un po' decimale e un po' sessagesimale

Usare la base 10 è abbastanza naturale (ad es. legato al numero delle dita delle mani). Ma perché base 60? Ci sono diverse congetture:

- Calcoli astronomici, molto praticati all'epoca:

  Ciclo lunare di (circa) 30 giorni

  Anno solare di (circa) 360 giorni

All'inizio i calcoli si facevano su queste quantità fisse, che poi, per semplicità, furono unificate in una sola quantità fissa: 60.

- 60 è incredibilmente ricco di divisori (12):

  1 2 3 4 5 6 10 12 15 20 30 60

  quindi si può lavorare facilmente con molte frazioni significative. Questa sembra una motivazione improbabile a priori, troppo raffinata, ma è sicuramente uno dei motivi per cui il sistema sessagesimale è ancora in uso (misura del tempo e degli angoli)

Con questo sistema numerico i Sumeri e i Babilonesi hanno lavorato molto, non solo per calcoli “pratici” di gestione, ma anche “teorici”:

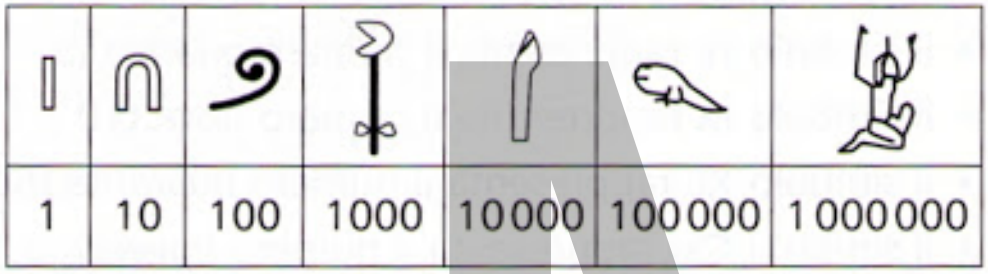
Tavoletta Plimpton 322 (1.800 a.C): 15 terne pitagoriche (lunghezze di possibili lati di triangoli rettangoli) molto prima di Pitagora (500 a.C.)

Gli Egizi

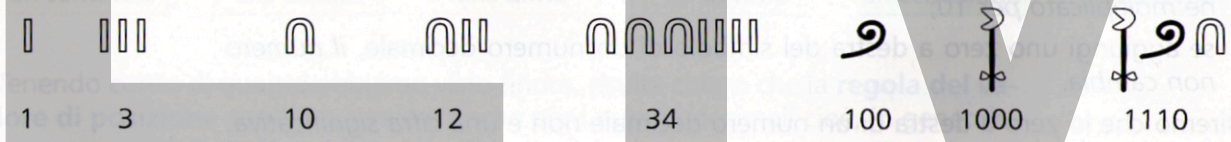
Anche nell’antico Egitto si sviluppò, in maniera indipendente, la matematica sia pratica che teorica.

Papiro Rhind (1800 a.C.): tavole numeriche e 84 problemi aritmetici, algebrici e geometrici.

Gli Egizi



Il sistema numerico egizio è in base 10, ma non è posizionale: unità, decine, centinaia, ecc. avevano simboli diversi e il numero si otteneva per giustapposizione (somma) dei vari simboli.

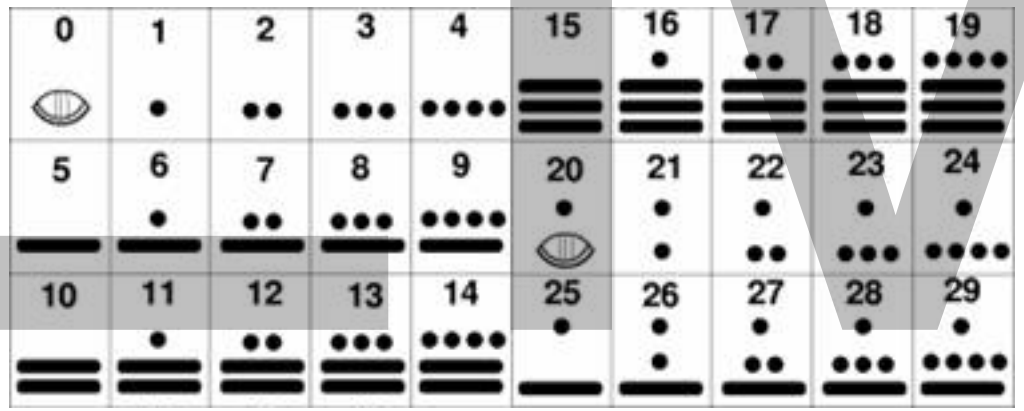


Del tutto analogo fu il sistema di numerazione ebraico e quello dell'antica Grecia, che però non usava simboli ad hoc, ma le lettere dell'alfabeto.

In questi sistemi non c'era lo ZERO

Mentre in tutto il mondo nascevano sistemi numerici con varie caratteristiche, ad esempio

- **Cina** (dal III sec a.C.): sistema posizionale, con uso dello zero e dei numeri negativi. Per i calcoli si usavano apposite bacchette.
- **Maya** (America Centrale): sistema posizionale in base 20, con uso dello zero. Per i calcoli si usava l'abaco.



intanto, in occidente, i Romani la facevano da padroni…

I numeri romani

sette caratteri:

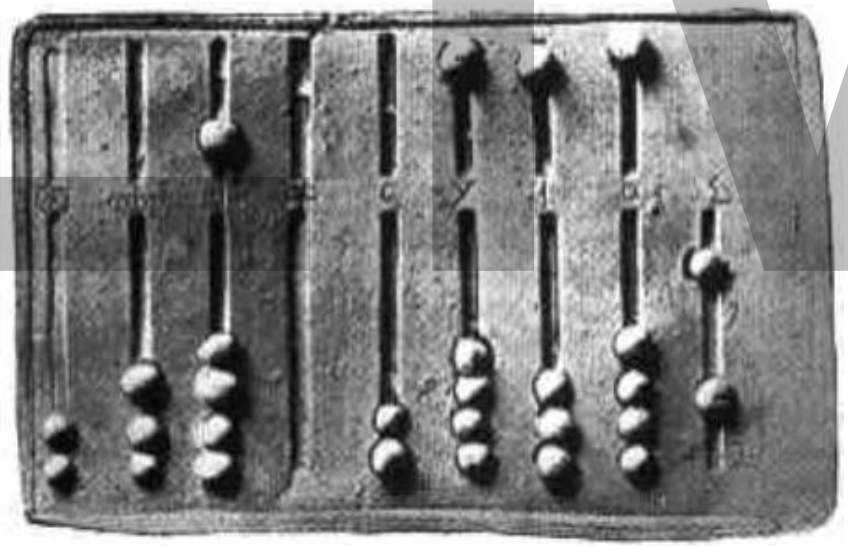
I=1 V=5 X=10 L=50 C=100 D=500 M=1000

e regole precise:

- Il valore del numero è la somma dei valori dei caratteri;
- I caratteri di “decina” (I,X,C,M) si possono ripetere al più tre volte, poi si procede per **sottrazione** dal carattere di “quintina” successivo (IV=4, IX=9…);
- I caratteri di quintina non possono essere ripetuti;
- le cifre sono sempre scritte dalla più grande alla più piccola.

Questo sistema è **pessimo per fare i conti**!

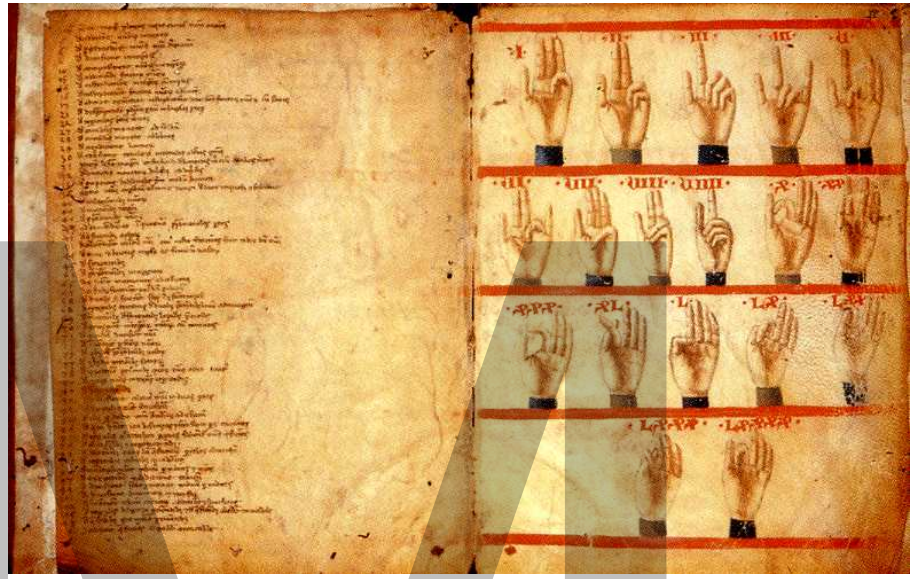
Infatti i conti venivano fatti con dei sassolini (i ***calcoli:*** calculus, diminutivo di calx,calcis) e *l'**abaco*** (in uso fino al 1700 in Europa) che, di fatto, usa una rappresentazione decimale posizionale dei numeri.



Il sistema numerico che usiamo ora, i cosiddetti “**numeri arabi**”:

nove cifre e lo zero

in realtà nasce in India (400 a.C.-400 d.C.), arriva in Asia Occidentale nel X secolo d.C. e in Europa (tramite le opere di matematici arabi) **nell’XI secolo**.



L’introduzione in Europa dell’attuale sistema numerico si attribuisce al pisano **Leonardo Fibonacci** con la pubblicazione del **Liber Abaci (1202 d.C.)**.

Pisa all’epoca era uno dei maggiori porti commerciali d’Europa. Il padre di Fibonacci fu mandato come funzionario doganale a Bugia (nell’attuale Algeria) e si fece raggiungere dal figlio. Al rientro Leonardo pubblicò il libro per insegnare a mercanti, banchieri e studiosi una maniera per fare meglio il loro lavoro.

Il sistema posizionale decimale

Si usano

- dieci caratteri: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9
- significato preciso della posizione: a partire da destra ogni posizione corrisponde al coefficiente della relativa potenza di 10.

Ne seguono degli evidenti vantaggi:

- Potendo considerare **qualsiasi** potenza di 10, abbiamo una rappresentazione per tutti i numeri, grandi quanto vogliamo.
- Inoltre le operazioni possono essere introdotte con semplici **meccanismi algoritmici** (quelli che ci hanno insegnato alle elementari).

LIM

CONTARE
dall'osso di babbuino agli assiomi di Peano
(seconda parte)

Annalisa Malusa

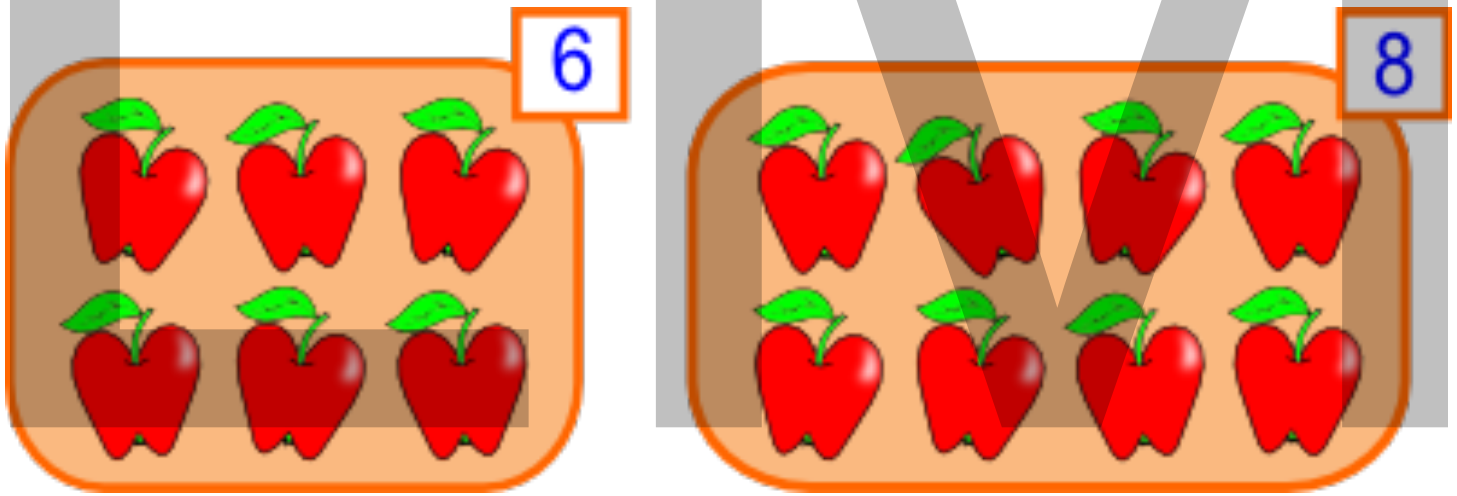
Incontro con i Licei Matematici GRASSI, NEWTON e PASCAL

Dipartimento di Matematica
Sapienza Università di Roma

I numeri naturali

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \ldots\}$$

Sono i primi numeri che ci vengono insegnati e vengono introdotti in termini di CARDINALITA' DEGLI INSIEMI FINITI (ricordate la questione della corrispondenza biunivoca?).



Invece $\mathbb{N}$ non è un insieme finito (infatti succedono cose sorprendenti)

$\mathbb{N}$ non è un insieme finito!

Quale di questi insiemi ha più elementi?

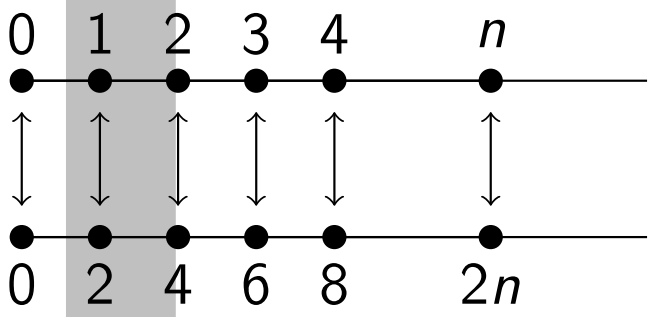
$$\mathbb{N} \quad P = \{2n,\ n \text{ in } \mathbb{N}\} \quad D = \{2n+1,\ n \text{ in } \mathbb{N}\} \quad Q = \{n^2,\ n \text{ in } \mathbb{N}\}$$

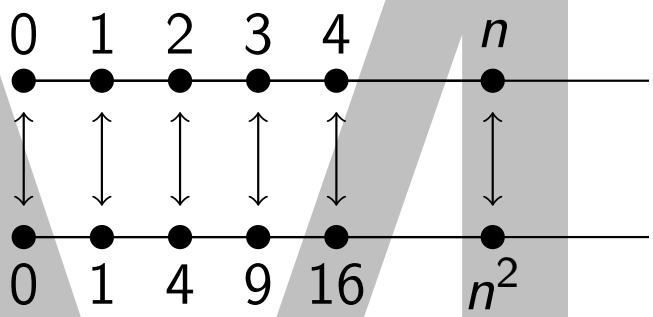
LM

$\mathbb{N}$ non è un insieme finito!

Quale di questi insiemi ha più elementi?

$\mathbb{N}$ $\quad P = \{2n,\ n \text{ in } \mathbb{N}\}$ $\quad D = \{2n+1,\ n \text{ in } \mathbb{N}\}$ $\quad Q = \{n^2,\ n \text{ in } \mathbb{N}\}$



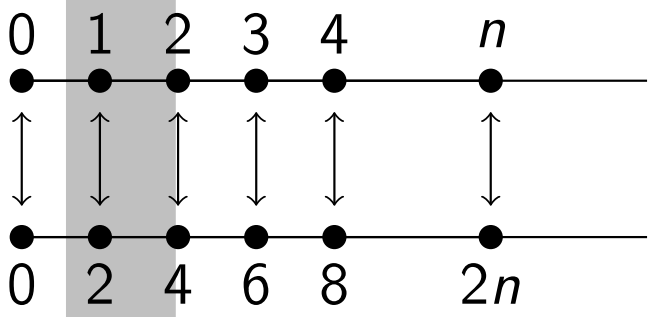


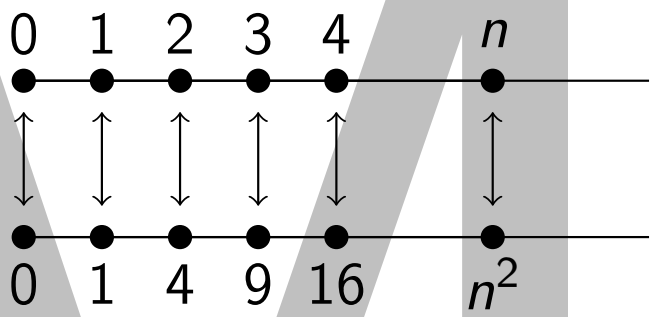
L'insieme $\mathbb{N}$ ha sottoinsiemi propri che hanno la sua stessa cardinalità!

$\mathbb{N}$ non è un insieme finito!

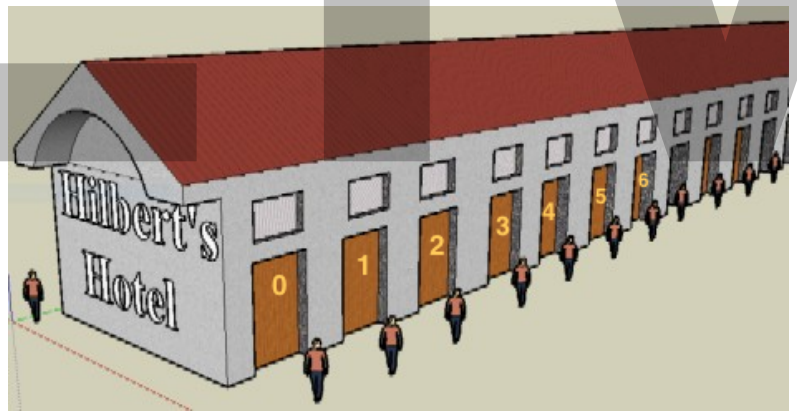
Quale di questi insiemi ha più elementi?

$$\mathbb{N} \quad P = \{2n,\ n \text{ in } \mathbb{N}\} \quad D = \{2n+1,\ n \text{ in } \mathbb{N}\} \quad Q = \{n^2,\ n \text{ in } \mathbb{N}\}$$



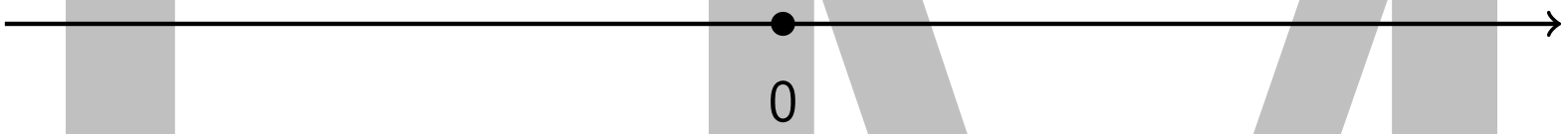


L'insieme $\mathbb{N}$ ha sottoinsiemi propri che hanno la sua stessa cardinalità!
Altra stranezza: l'albergo di Hilbert ha sempre una stanza disponibile:



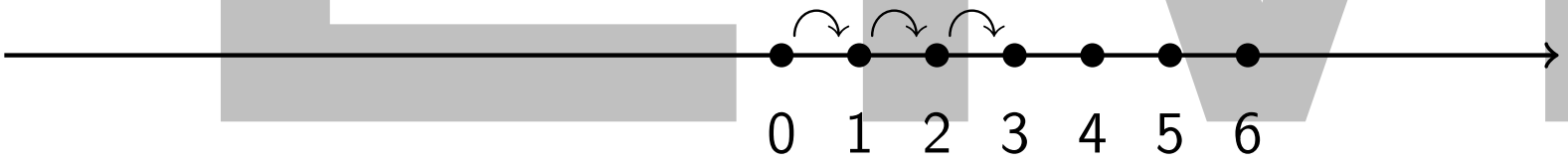
Definizione dei numeri naturali $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \ldots\}$

Cosa serve per descrivere tutti i numeri naturali?
1) dire qual è il **primo**: si è deciso che il primo numero naturale si chiama ZERO (talvolta si parte da 1);



2) avere una nozione di **passaggio al successivo** $n \mapsto n + 1$ con due proprietà:

- 0 non è il successivo di nessun numero;
- successivi di numeri diversi sono diversi.



L'operazione di passaggio al successivo ci definisce 1 a partire da 0, poi 2 a partire da 1 e così via. Ma dovremmo fare questa operazione infinite volte per intercettare tutti i numeri naturali.

Definizione dei numeri naturali $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \ldots\}$

3) dare una nozione che corrisponda a "e così via":

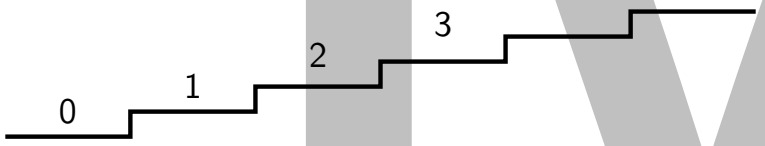
PRINCIPIO DI INDUZIONE

se E è un sottoinsieme dell'insieme $\mathbb{N}$ tale che

- E contiene 0
- E contiene il successivo di ogni suo elemento

allora E **coincide** con $\mathbb{N}$.

Metaforicamente è come dire che, per salire una scala (infinita!!!!) basta



- mettersi sul primo gradino
- sapere come passare da un gradino all'altro

Un'altro modo per visualizzare il principio di induzione è pensare all'effetto domino (ogni tessera che cade appartiene all'insieme).

Assiomi di Peano

Riepilogando, l'insieme di tutti i numeri naturali è **essenzialmente individuato** dagli

ASSIOMI DI PEANO (1858-1932)

1) esistenza del primo elemento;
2) nozione di successivo e sue proprietà;
3) principio di induzione.

Questo è un esempio di **definizione assiomatica**:
non si dichiara **quali sono gli elementi** dell'insieme, ma solo il minimo indispensabile delle **proprietà** che devono soddisfare.

Le proprietà sono **indipendenti** tra di loro e **indispensabili** per determinare l'insieme che ci interessa.

Cos'è un assioma?

Detto in maniera tanto generica quanto imprecisa, la matematica usa i principi della logica deduttiva per fornire predizioni certe a partire da una modellizzazione iniziale. Le fondamenta di una teoria matematica sono

- gli **enti primitivi**: *oggetti* di base, definiti *a buon senso*;
- gli **assiomi**: *proprietà* di base, assunte per vere, che devono essere *indipendenti* (nessun assioma può essere dedotto dagli altri) e *coerenti* (non possono implicare sia una proprietà che la sua negazione).

A partire da questi, che fissano gli elementi fondanti (in maniera piuttosto libera e unicamente basata su un'idea degli oggetti da considerare e di ciò che deve essere sicuramente vero per tali oggetti), tutto il resto deve seguire, secondo precise *regole di deduzione*, anche queste fissate una volta per tutte. Questo processo porta a introdurre

- le **definizioni**: enti complessi;
- i **teoremi**: nuove proprietà dedotte da quelle note.

Sistemi di Peano, modellizzazione

Abbiamo detto che $\mathbb{N}$ è **essenzialmente** determinato dagli assiomi di Peano. Specifichiamo cosa intendiamo con "essenzialmente".

Ci sono altri insiemi che verificano tali assiomi, ad esempio?

LM

Sistemi di Peano, modellizzazione

Abbiamo detto che $\mathbb{N}$ è **essenzialmente** determinato dagli assiomi di Peano. Specifichiamo cosa intendiamo con "essenzialmente".

Ci sono altri insiemi che verificano tali assiomi, ad esempio?

$$\mathcal{P} = \{\text{numeri pari}\}, \quad \text{primo elemento=2}, \quad (\text{successivo di } n) = n + 2.$$

LM

Sistemi di Peano, modellizzazione

Abbiamo detto che $\mathbb{N}$ è **essenzialmente** determinato dagli assiomi di Peano. Specifichiamo cosa intendiamo con "essenzialmente".

Ci sono altri insiemi che verificano tali assiomi, ad esempio?

$$\mathcal{P} = \{\text{numeri pari}\}, \quad \text{primo elemento=2}, \quad (\text{successivo di } n) = n + 2.$$

Abbiamo visto che P è identificabile con $\mathbb{N}$.

Si può dimostrare che ogni **sistema di Peano**, ossia ogni insieme a cui si può assegnare un primo elemento e una nozione di successivo che verifichi gli assiomi di Peano, è **identificabile con** $\mathbb{N}$, che quindi risulta essere un **modello** per queste strutture.

La comodità di partire da una definizione assiomatica è che si può lavorare con un **modello** e tutte le proprietà che valgono per il modello restano valide per tutti gli altri insiemi che verificano gli stessi assiomi.

Operazioni in $\mathbb{N}$

Gli assiomi di Peano sono tutto quello che serve anche per introdurre le **operazioni** in $\mathbb{N}$:

- ADDIZIONE $m + n$: a partire dal numero m faccio n successivi
- MOLTIPLICAZIONE $m \cdot n$: sommo n volte $m + m + \cdots + m$.

e la **relazione d'ordine**

- $m \geq n$: se esiste un numero naturale p tale che $m = n + p$

che, a sua volta, permette di definire la

- SOTTRAZIONE: se $m \geq n$ e, quindi, $m = n + p$, scriveremo $p = m - n$.

Es: se $m = 14$, $n = 4$, allora $p = 10$.

L'insieme dei numeri naturali è **chiuso** rispetto alle operazioni di addizione e moltiplicazione (somma e prodotto di numeri naturali è un numero naturale), ma non è chiuso rispetto all'operazione di sottrazione ($4 - 14$ non è un numero naturale).

Proprietà di base delle operazioni in $\mathbb{N}$

Proprietà dell'operazione di addizione

(A1) $n + m = m + n$ (commutatività);

(A2) $(n + m) + p = n + (m + p)$ (associatività);

(A3) $n + 0 = n$ (0 elemento neutro dell'addizione);

Proprietà dell'operazione di moltiplicazione

(M1) $n \cdot m = m \cdot n$ (commutatività);

(M2) $(n \cdot m) \cdot p = n \cdot (m \cdot p)$ (associatività);

(M3) $1 \cdot n = n$ (1 elemento neutro della moltiplicazione);

Le due operazioni soddisfano la seguente condizione di compatibilità:
Proprietà distributiva

(D) $p \cdot (n + m) = p \cdot n + p \cdot m$.

Esempi di dimostrazione di altre proprietà

A partire da queste poche proprietà, si **dimostrano** tutte le altre. Facciamo qualche esempio

- 0 è l'unico elemento neutro per l'addizione.

Se così non fosse, dovrebbe esistere un altro numero naturale $\tilde{0}$ tale che $n + \tilde{0} = n$ per ogni numero naturale n. In particolare avremmo

$$0 \overset{[(A3)\ per\ \tilde{0}]}{=} 0 + \tilde{0} \overset{[(A1)]}{=} \tilde{0} + 0 \overset{[(A3)\ per\ 0]}{=} \tilde{0}.$$

- $0 \cdot n = 0$.

$$n \overset{[(M3)]}{=} 1 \cdot n \overset{[(A3)]}{=} (1 + 0) \cdot n \overset{[(D)]}{=} 1 \cdot n + 0 \cdot n \overset{[(M3)]}{=} n + 0 \cdot n.$$

Abbiamo mostrato che $0 \cdot n$ è elemento neutro per la somma, ma sappiamo che l'unico elemento neutro per la somma è 0, quindi deve essere $0 \cdot n = 0$.

Conclusioni

- insiemi e operazioni possono essere definiti in maniera **assiomatica**, fissando le proprietà che devono soddisfare i loro elementi, le operazioni e l'ordinamento;
- l'assiomatizzazione ha il vantaggio di utilizzare **modelli** e descrivere completamente l'insieme attraverso **poche informazioni**, ma si paga il prezzo di dover ricavare tutto il resto tramite **dimostrazioni**;
- quelle che vengono spesso chiamate **regole** sono in realtà **proprietà** degli insiemi e delle loro operazioni, ottenute a partire dagli **assiomi** attraverso **dimostrazioni** (o, più in generale, l'uso della logica deduttiva).
  Quindi un buon matematico **non colleziona mnemonicamente centinaia di formule**, ma **assimila, possiede e utilizza le proprietà di base**, utilizzandole nella maniera che serve di volta in volta.