LICEO MATEMATICO
IIS Gregorio da Catino - Poggio Mirteto (RI)

NUMERI E BASI

INDOVINA LE CARTE

Da un mazzo di 40 carte prendi 10 carte dello stesso seme, per esempio coppe. Chiedi ad uno spettatore di scegliere 3 di esse a caso (tranne il re);

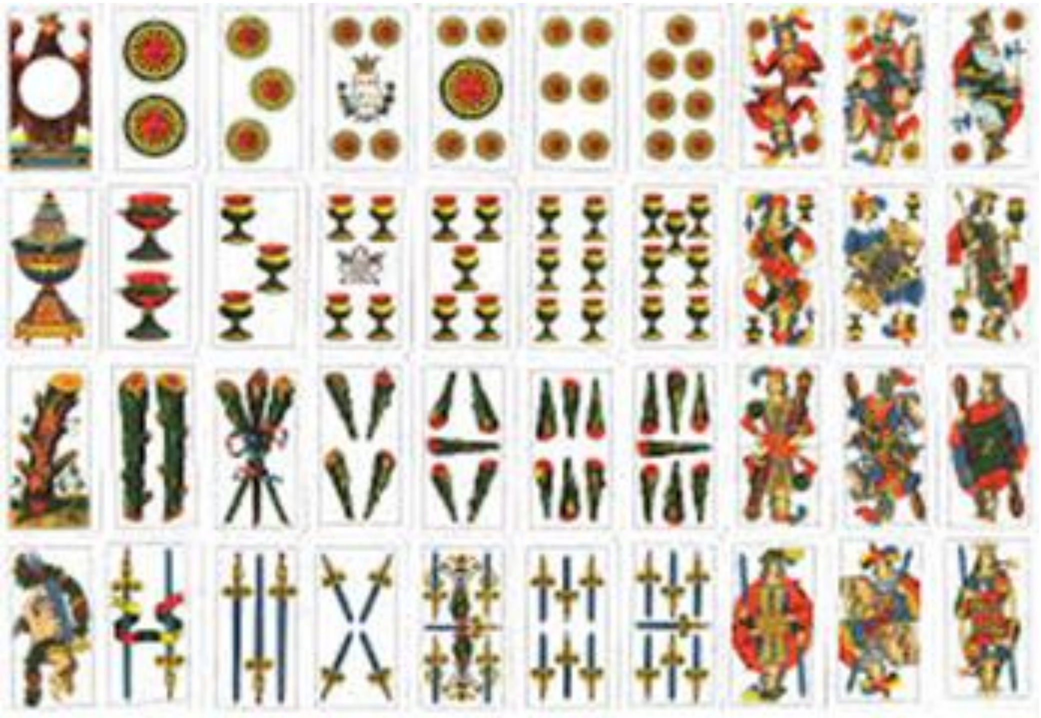
Chiedi allo spettatore di moltiplicare la prima per cento, la seconda per 10 e di sommare i valori così ottenuti con la terza carta e di comunicarti il risultato ottenuto.

Immediatamente sai quali sono le tre carte prelevate all'inizio.

E’ un gioco banale.

Cosa c’è sotto?

Perché devo scartare il 10?



Sistemi di numerazione

Definizioni: Un sistema di numerazione è l'insieme dei simboli e delle regole che permettono di esprimere i numeri.

Un sistema di numerazione si dice posizionale se il valore di un simbolo dipende dalla posizione che esso occupa nella scrittura del numero.

Si chiamano cifre i simboli usati in un sistema di numerazione posizionale. Esempio. Nel numero 1375 le cifre sono 1, 3, 7, 5.

Si dice base di un sistema di numerazione il numero di simboli che si usano per scrivere i numeri.

Solitamente si usano i simboli 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 per i sistemi di numerazione a base minore o uguale a 10, per i sistemi di numerazione a base maggiore di 10, dopo il 9 si usano le lettere dell'alfabeto: A, B, C, D, E, F, …

Scrittura polinomiale

Nella scrittura polinomiale un numero in base 10 si scrive come somma di potenze di 10 moltiplicate per le cifre che compongono il numero, la potenza del dieci che moltiplica ciascuna cifra è pari alla posizione occupata dalla cifra contando da destra verso sinistra e cominciando a contare da zero.

Esempio:

$$5437 = 5 \cdot 1000 + 4 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 7$$

cioè

$$5437 = 5 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$$

I giochi basati sulle caratteristiche della numerazione posizionale sono antichi quanto la numerazione stessa.

Iniziamo a vederne alcuni:

Pensa un numero di due cifre.

Somma tra loro queste cifre (es. se ho pensato 87 dovrò calcolare 8+7=15)

Sottrai la somma ottenuta dal numero pensato all’inizio (87-15)

Se il numero ottenuto è ancora di due cifre somma le cifre, altrimenti il processo è terminato.

Sicuramente il risultato sarà 9!

Dimostrazione: un numero di due cifre *ab* lo posso sempre scrivere come 10*a*+*b*, la somma delle cifre sarà a+b, quindi la differenza richiesta è:10a+b-(a+b)=10a+b-a-b=9a.

9a è multiplo di 9 e quindi è un numero che ha la somma delle cifre uguale a 9.

numeri e basi- documenti\criteri di divisibilità.pdf

(Dimostrare che un multiplo di 9 ha la somma delle cifre uguale a nove. Dimostrare la stessa cosa per i multipli di tre)

Indovina l’anno di nascita e il numero di scarpe.

1. Impartisci ai tuoi spettatori le seguenti istruzioni collettive (specificando che ognuno di loro dovrà eseguirle in maniera indipendente, senza consultarsi con gli altri):

a) scrivete il vostro numero di scarpe, trascurando eventuali mezze misure (ad esempio: 39);

b) moltiplicate per 100 questo numero ($39 \times 100 = 3900$);

c) dal risultato, sottraete il vostro anno di nascita (se, ad esempio: 1985 allora $3900 – 1985 = 1915$);

2. A questo punto chiedi a uno spettatore di comunicarti il risultato che ha ottenuto e, dopo pochi secondi, sei in grado di indovinare il numero di scarpe che porta e l’età che ha compiuto (o che compirà nell’anno in corso).

3. Puoi replicare questa stessa performance, con altri spettatori, una quantità di volte a tuo piacere...

Accorgimenti da seguire:

Per riuscire in tale impresa, devi effettuare mentalmente la somma tra il valore dell'anno in corso e il numero che ti viene, di volta in volta, comunicato.

Se tutti i calcoli sono stati eseguiti correttamente, ogni risultato sarà costituito da quattro cifre: le prime due indicheranno il numero di scarpe, mentre le altre due indicheranno gli anni di età.

Nell'esempio precedente, supponendo che l'anno in corso sia il 2014, otterresti: 1915+2014 = 3929 cioè 39 | 29 (scarpe = 39, età = 29 anni).

Spiegazione del trucco:

Se chiamiamo S il numero di scarpe dello spettatore, A il suo anno di nascita e N il risultato che ci viene comunicato, la sequenza di istruzioni fornita genera la seguente equazione: $N = S \times 100 – A$ Se, inoltre, chiamiamo C l'anno in corso e aggiungiamo questo valore a quello di N, otteniamo: $R = N+C = S \times 100–A+C$ o anche: $R = S \times 100+(C–A)$ Considerando che l'età E di una persona è uguale alla differenza tra l'anno in corso e quello di nascita, possiamo porre $E = C–A$ e, quindi, l'equazione precedente diventa: $R = S \times 100+E$ Siccome sia S che E devono essere composti al massimo da due cifre (evitando di proporre il gioco a un centenario...), possiamo porre: S = «ab» ed: E = «cd». Di conseguenza, il valore R della somma indicata nella relazione precedente, si ricava nel seguente modo, impostando l'addizione in colonna. ab00 + cd = abcd

Da qui, appare evidente che: – le prime due cifre di tale risultato («ab») corrispondono al valore di S (il numero di scarpe); – le ultime due cifre di tale risultato («cd») corrispondono al valore di E (l'età). Nota – Ovviamente, il gioco non funziona se viene proposto a una persona che ha più di 99 anni...)

ESERCIZI

Scrivi su un foglietto di carta un numero di 3 cifre diverse tra loro.

Scrivi un altro numero composto dalle stesse cifre ma rovesciato (es se hai scritto 241 dovrai scrivere 142)

Sottrai il più piccolo di questi numeri dal più grande.

Somma le cifre del risultato ottenuto e, di nuovo, somma le cifre del risultato fino ad ottenere un numero ad una cifra.

Il risultato sarà sicuramente…9!

Provate voi a dimostrarlo.

Scrivi su un foglietto il tuo numero di telefono (6,7cifre senza prefisso)

Scrivi un altro numero composto dalle stesse cifre di quello di prima ma in ordine diverso.

Sottrai il più piccolo al più grande.

Somma le cifre della differenza ottenuta ripetendo l'operazione finché non rimane una sola cifra.

Quale sarà secondo voi il risultato?

Giochi con le carte

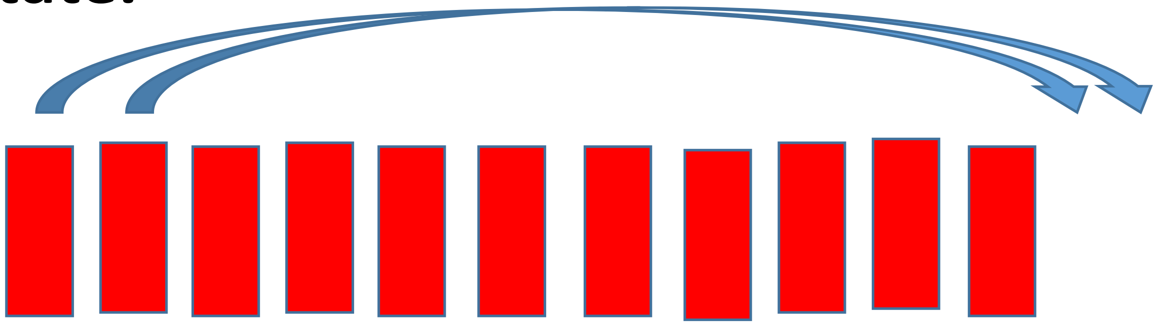
La carta parlante.

Chi fa il gioco prende 10 carte dal valore progressivo da1 a 10 e le dispone in fila coperta nel seguente ordine:

2 -3 -4 -5 -6 -7 -8 -9 -10 -1

Quindi si gira e chiede ad uno spettatore di spostare un numero di carte a suo piacimento mantenendo l’ordine.

Girando una carta della sequenza si può indovinare quante carte sono state spostate.



Spiegazione:

La prima volta si deve spostare la seconda carta da destra, in seguito bisogna scoprire la carta che occupa la posizione, da destra, data dalla somma tra il valore della carta scoperta precedentemente e quello della posizione in cui si trova, trascurando la cifra delle decine.

Questo procedimento si giustifica con il fatto che si può considerare la sequenza delle carte come una sequenza chiusa ad anello che si ripete.

In generale se n è il numero di carte da spostare e v il valore di una carta che occupa una data posizione, la carta che occuperà la stessa posizione avrà valore

$v'=v+n$ se $(v+n)<10$

$v'=v+n-10$ se $(v+n)>10$.

Allora per $v=10$ avremo $v'= 10+n-10=n$ cioè al numero di carte spostate. In conclusione basta sapere dove sta il re prima dello spostamento. La carta che andrà a prendere la sua posizione indica quante carte sono state spostate.

INDOVINA LA CARTA.

In un mazzo di 40 carte conta 20 carte e rimettile sotto le altre carte. Metti tre carte in tavola e completa, secondo il loro valore, fino a 10. Fai la somma delle tre carte messe per prime in tavola. Il numero che viene indica la posizione della carta da indovinare.

Es. se queste fossero le tre carte bisognerebbe completare l'otto con due carte, il nove con una ed il sei con quattro. La carta che si trova nella posizione 23=8+9+6, sarà quella individuata dal mago.

Soluzione: la carta da indovinare è la tredicesima delle prime 20 carte rimesse sotto il mazzo.

Discutiamo insieme la soluzione. E se il mazzo fosse di 52 carte?

GIOCHI IN BASE DUE E IN BASE TRE

Come si è visto, ricorrendo alla numerazione posizionale in base 10, ogni numero intero può essere rappresentato come somma di fattori di potenze di 10.

Si può estendere il concetto di numerazione posizionale, scegliendo come base un qualsiasi altro numero intero positivo n, maggiore di 0.

Con tale convenzione, un generico numero intero verrebbe rappresentato come somma di fattori di potenze di n.

Se il valore della base n è minore di 10, conviene utilizzare come cifre una parte di quelle decimali, disposte nel medesimo ordine crescente.

In particolare, se si adotta la base 2, si possono impiegare le prime due cifre: 1 e 0.

Qui di seguito è riportata la rappresentazione in base 2 dei primi numeri interi, da 0 a15, confrontata con la corrispondente rappresentazione in base 10.

rappresentazione di numeri

In base due abbiamo due cifre 0 1 (cifre binarie,BInary digiT = BIT) per rappresentare i due numeri zero e uno, e 10 per rappresentare il numero due; i primi 20 numeri in binario:

1	1	11	1011_2
2	10_2	12	1100_2
3	11_2	13	1101
4	100	14	1110
5	101	15	1111
6	110	16	10000
7	111	17	10001
8	1000	18	10010
9	1001	19	10011
10	1010_2	20	10100_2

nota: 101 = 4 +1=5; 110 = 4+2=6; 1101 = 8+4+1=13 ecc

Quantità effettiva	Rappresentazione in base 10				Rappresentazione in base 2			
	10^3	10^2	10^1	10^0	2^3	2^2	2^1	2^0
	1000	100	10	1	8	4	2	1
				0				0
•				1				1
••				2			1	0
•••				3			1	1
••••				4		1	0	0
•••••				5		1	0	1
••••••				6		1	1	0
•••••••				7		1	1	1
••••••••				8	1	0	0	0
•••••••••				9	1	0	0	1
••••••••••			1	0	1	0	1	0
•••••••••••			1	1	1	0	1	1
••••••••••••			1	2	1	1	0	0
•••••••••••••			1	3	1	1	0	1
••••••••••••••			1	4	1	1	1	0
•••••••••••••••			1	5	1	1	1	1

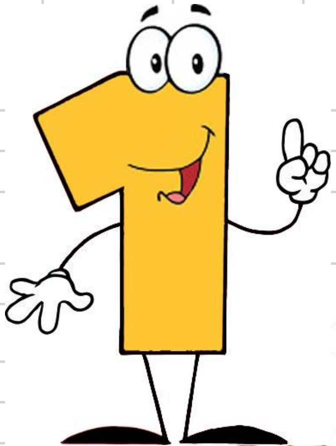
Sistema binario

n. da 0a 2000

da base10 a base 2

1432	716	358	179	89	44	22	11	5	2	1	0	quoziente divisione per 2
	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	1	resto divisione per 2

n. in base due	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0



da base 2 a base 10

per 2^{10}	2^9	2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
1024	0	256	128	0	0	16	8	0	0	0

Somma tutte le potenze **1432**

Trasforma i seguenti numeri da decimali a binari:

24
57
451
1539

E da binario a decimale:

100101
111001
1010111
1001101

Nelle applicazioni di magia matematica, il ricorso alla numerazione in base 2 consente di ottenere diversi effetti alquanto intriganti. Le sue proprietà, infatti, anche se piuttosto semplici, non sono di comune conoscenza.

I SETTE CARTONCINI MAGICI

1. Disponi sul tavolo i sette cartoncini così ottenuti e invita uno spettatore a pensare un numero compreso tra 1 e 99.

2. Chiedi allo spettatore di indicarti i cartoncini che contengono il suo numero.

3. Dai una rapida occhiata ai cartoncini che ti ha indicato e, senza alcuna esitazione, indovina il numero a cui ha pensato!

I.

1	21	41	61	81
3	23	43	63	83
5	25	45	65	85
7	27	47	67	87
9	29	49	69	89
11	31	51	71	91
13	33	53	73	93
15	35	55	75	95
17	37	57	77	97
19	39	59	79	99

II.

2	22	42	62	82
3	23	43	63	83
6	26	46	66	86
7	27	47	67	87
10	30	50	70	90
11	31	51	71	91
14	34	54	74	94
15	35	55	75	95
18	38	58	78	98
19	39	59	79	99

III.

4	22	44	62	84
5	23	45	63	85
6	28	46	68	86
7	29	47	69	87
12	30	52	70	92
13	31	53	71	93
14	36	54	76	94
15	37	55	77	95
20	38	60	78	100
21	39	61	79	

IV.

8	26	44	62	88
9	27	45	63	89
10	28	46	72	90
11	29	47	73	91
12	30	56	74	92
13	31	57	75	93
14	40	58	76	94
15	41	59	77	95
24	42	60	78	
25	43	61	79	

V.

16	26	52	62	88
17	27	53	63	89
18	28	54	80	90
19	29	55	81	91
20	30	56	82	92
21	31	57	83	93
22	48	58	84	94
23	49	59	85	95
24	50	60	86	
25	51	61	87	

VI.

32	42	52	62
33	43	53	63
34	44	54	96
35	45	55	97
36	46	56	98
37	47	57	99
38	48	58	100
39	49	59	
40	50	60	
41	51	61	

VII.

64	74	84	94
65	75	85	95
66	76	86	96
67	77	87	97
68	78	88	98
69	79	89	99
70	80	90	100
71	81	91	
72	82	92	
73	83	93	

Per individuare il numero scelto dallo spettatore, devi semplicemente fare la somma dei valori che compaiono al primo posto (in alto a sinistra) su ciascuno dei cartoncini indicati. Se, ad esempio, ti ha comunicato che il suo numero compare nei cartoncini: – II (dove al primo posto c'è il 2) – IV (dove al primo posto c'è 8) – VII (dove al primo posto c'è il 64) il numero da lui pensato è: 74, dato che: 2+8+64 = 74.

Spiegazione del trucco:

Ciascuno dei sette cartoncini è stato associato a una particolare potenza di 2, nel modo qui di seguito esposto:
su ciascun cartoncino sono stati riportati solo quei numeri (compresi tra 1 e 99) la cui codifica in binario contiene una cifra «1» nella colonna relativa alla potenza di 2 ad esso associata. Come si può verificare, infatti: – nel cartoncino I sono presenti: 1, 3, 5, ... 99, tutti numeri la cui codifica in binario contiene un 1 nell'ultima colonna - 1, 11, 101,..., 1100011; –
nel cartoncino II sono presenti: 2, 3, 6, ... 99, tutti numeri la cui codifica in binario contiene un 1 nella penultima colonna - 10, 11, 110..., 1100011-, e cosi via.
In questo modo, conoscendo quali cartoncini contengono un determinato numero, si viene a sapere anche quali colonne della sua codifica binaria contengono la cifra «1» (e quali, per esclusione, la cifra «0»).
Dato che i numeri sono stati disposti in ordine crescente per colonne, ogni cartoncino riporta al primo posto, in alto a sinistra, proprio il valore della potenza di 2 ad esso associato. Di conseguenza, la decodifica dal binario si compie automaticamente, sommando i numeri che compaiono in testa ai cartoncini interessati.

[numeri e basi- documenti\operazioni binari.html](numeri e basi- documenti\operazioni binari.html)

La **numerazione in base 3** (o ternaria) è una notazione posizionale che utilizza solo le tre cifre: 0, 1 e 2.

Per convertire in base 10 un numero ternario, bisogna tener presente che (scorrendo le cifre del numero, da destra verso sinistra) la prima posizione corrisponde alla potenza 3^0, la seconda alla potenza 3^1, la terza alla potenza 3^2, la quarta alla potenza 3^3, e così via (procedendo con successive potenze di 3).

Ad esempio, il numero ternario 1102, corrisponde a:

$2 \cdot 3^0 + 0 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^3 = 2 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 9 + 1 \cdot 27 = 2 + 0 + 9 + 27 = 38.$

un es. in base 3 ... (cifre 0,1,2):

ricorda come si conta in base tre:

0	**1**	**2**	**10**	**11**	**12**	**20**	**21**	**22**
100	**101**	**102**	**110**	**111**	**112**	**120**	**121**	**122**
200	**201**	**202**	**210**	**211**	**212**	**220**	**221**	**222**
1000 ...								

che corrispondono ai numeri in base 10:

0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
9	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**
18	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**
27	**...**							

quanto vale 1 2 2 1 0 1 (dato in base 3) = in base dieci ?

La numerazione ternaria è utilizzata in vari giochi di magia matematica; uno dei più sorprendenti,è noto come

Le pile di Gergonne

(dal nome del matematico francese che lo studiò per primo)

Mescolate un mazzo di 27 carte e, dopo averlo consegnato a uno spettatore, fornitegli le seguenti istruzioni.
1. Scegli mentalmente una di queste carte e ricorda il suo valore, senza comunicarmelo.

2. Tieni in mano le 27 carte, con le facce rivolte verso il basso e (procedendo da sinistra verso destra), distribuiscile una alla volta, a faccia in alto, su righe di 3 carte, fino a formare 3 colonne di 9 carte (come indicato in figura).

3. Dimmi in quale colonna si trova la carta da te scelta.

4. Raccogli in un mazzetto le 9 carte di ciascuna colonna (senza alterare l'ordine con cui le carte sono state distribuite) e ricomponi il mazzo, disponendo in un ordine a tuo piacere, i 3 mazzetti così ottenuti.

5. Esegui di nuovo la sequenza di istruzioni 2, 3 e 4 e poi salta al punto 6.

6. Esegui per la terza volta la la sequenza di istruzioni 2, 3 e 4 e poi salta al punto 7.

7. Distribuisci le carte sul tavolo, nel modo indicato dall'istruzione 2.

A questo punto siete in grado di indicare, senza alcuna esitazione, la carta scelta.

Modalità di esecuzione

Per riuscire in tale intento, dovete osservare i seguenti accorgimenti.

- Ogni volta che ricomponi il mazzo (istruzione 4), ricorda in quale posizione: superiore, centrale o inferiore (considerando il mazzo rivolto a facce in basso), collochi il mazzetto contenente la carta scelta.
- Assegna a ciascuna posizione una cifra, in base al seguente criterio: superiore = 0; centrale = 1: inferiore = 2 (in pratica, il valore della cifra così assegnata corrisponde al numero di mazzetti che vengono messi sopra quello preso in considerazione).
- Scrivete nell’ordine, da destra verso sinistra, le cifre attribuite alle tre posizioni osservate, in modo da ottenere un numero ternario; il valore di questo numero indicherà quante carte, nell’ultima configurazione ottenuta, si trovano prima della carta da indovinare (**contando da sinistra verso destra e dall’alto verso il basso**).

Ad esempio, se la prima volta il mazzetto viene posto nella posizione inferiore (2), la seconda volta nella posizione superiore (0) e la terza volta nella posizione centrale (1), scrivendo le relative cifre, da destra verso sinistra, si ottiene il numero ternario 102. Dato che, in decimale, questo numero corrisponde a:

2x3^0 + 0x3^1 + 1x2^2 = 2x1 + 0x3 + 1x9 = 2 + 9 = 11,

la carta da indovinare è preceduta da altre 11 carte e, quindi, è la 12^a (in particolare, se la configurazione finale fosse quella riportata in figura, la carta da indovinare sarebbe l’ *Asso di cuori*).

Spiegazione del trucco

Per capire il meccanismo su cui si basa questo trucco, bisogna per prima cosa notare che, se il mazzetto contenente la carta da indovinare venisse posto **ogni volta nella posizione superiore**, al termine delle operazioni la carta da indovinare andrebbe ad occupare **la prima posizione in alto a sinistra**(ovvero, non sarebbe preceduta da alcuna carta).
Infatti, se si considera che ad ogni passaggio le carte appartenenti alla colonna di una data configurazione, dopo essere state raccolte in un mazzetto, vengono ridistribuite in un gruppetto di 3 righe contigue (composto da 9 carte in tutto).
Fatte queste premesse, si può analizzare la situazione generale in cui i mazzetti relativi alle colonne indicate, non vengono posti sistematicamente in cima al mazzo.
In questo caso, alla fine delle operazioni, la carta da indovinare sarà sicuramente preceduta da un certo numero di altre carte, la cui composizione può essere così determinata:
- X gruppetti di 9 carte ciascuno (X = 0, 1, 2), prima di quello contenente la carta da indovinare, se X è il numero dei mazzetti posti sopra quello interessato, nella terza ricomposizione del mazzo;
- Y righe di 3 carte ciascuna (Y = 0, 1, 2), prima della riga contenente la carta da indovinare (all'interno del relativo gruppetto da 9), se Y è il numero dei mazzetti posti sopra quello interessato, nella seconda ricomposizione del mazzo;
- Z carte singole (Z = 0, 1, 2), prima della carta da indovinare (all'interno della relativa riga), se Z è il numero dei mazzetti posti sopra quello interessato, nella prima ricomposizione del mazzo.
In definitiva, il numero totale di queste carte sarà dato da: Zx1 + Yx3 + Xx9, ovvero, coinciderà con il valore del numero ternario: XYZ.

Problemi sulle basi numeriche nell'antichità

I CHICCHI DI RISO

Marta Pulvirenti

Le sette a.C.) case (Problema n. 79 del Papiro di Rhind, 1650

Soluzione Se si esclude dal conteggio delle cose la proprietà citata all'inizio, si ha:
case: 7 gatti: $7x7=7^2$ = 49 topi: $7x7x7 = 7^3$ = 343 spighe: $7x7x7x7 = 7^4$ = 2.401 heqat: $7x7x7x7x7 = 7^5$ = 16.807 totale: 7+49+343+2401+16.807 = 19.607

Nel corso dei secoli, sono state elaborate diverse versioni di questo problema, alcune anche ingannevoli, come la seguente:

Mentre andavo a Camogli, Incontrai un uomo con sette mogli. Ogni moglie aveva sette sacchi, Ogni sacco aveva sette gatti, Ogni gatto aveva sette mici; Mici, gatti, sacchi e mogli, In quanti andavano a Camogli? Soluzione In questo caso, la risposta è:

una sola persona. Infatti, solo il narratore andava a Camogli; tutti gli altri, andavano nella direzione opposta...

La versione di Fibonacci recita:

Sette vecchie vanno a Roma;
ognuna ha sette muli,
ogni mulo ha sette sacchi,
in ogni sacco ci sono sette pani,
ogni pane ha sette coltelli,
ogni coltello sette guaine.
Si chiede la somma di tutti.