



LICEO MATEMATICO
IIS Gregorio da Catino - Poggio Mirteto (RI)

I NUMERI

Che cos'è un numero?



I numeri esistono in se o sono un'invenzione umana?

E' nato prima il concetto di numero o il contare?

Quando gli uomini hanno avuto bisogno del concetto di numero?



Le prime tracce di qualcosa che si suppone sia un conteggio risalgono a più di 35.000 anni fa, e sono costituite da ossa intagliate con tacche che si pensa indichino un qualche tipo di conteggio (giorni, animali?). Il reperto più antico è forse l'**osso di lebombo**, circa del 35000 a.C. , un osso che riporta 29 tacche distinte. Uno dei reperti più famosi è invece l'**osso di Ishango**, anch'esso intagliato con tacche, sulle quali gli studiosi hanno fatto varie ipotesi, tra le quali quella che si tratti di un computo di giorni (un mese lunare).



**C'È STATO UN PERIODO IN
CUI GLI ESSERI UMANI
NON AVEVANO IL
CONCETTO DI NUMERO E
DEL CONTARE.**

**La migliore prova di ciò è che
esistono tuttora popolazioni
che non hanno sviluppato il
concetto di numero, e nei cui
linguaggi le parole "uno",
"due" e "molti" rappresentano
tuttora le uniche grandezze
utilizzate**



Si tratta di tribù Zulu e Pigmei in Africa, di Aranda e Kamilarai in Australia, ed altre tribù isolate in Oceania od in Amazonia.

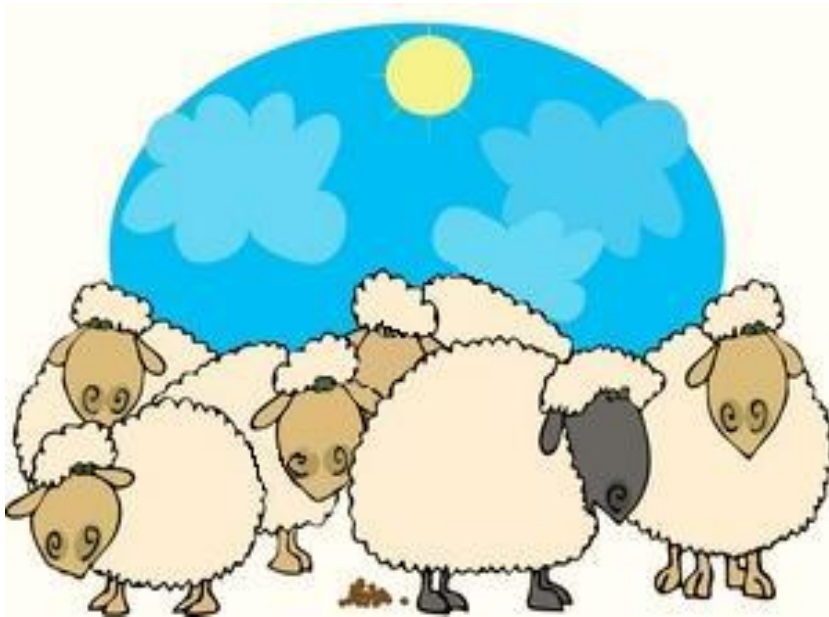
Ad esempio una tribù di cacciatori-raccoglitori che vive in Brasile lungo il fiume Maici, i Pirahã, è stata studiata recentemente (un articolo su *Science*, di Peter Gordon della Columbia University è apparso nel 2004); i Pirahã usano un sistema di conteggio chiamato “uno-due-molti”. In esso, la parola per “uno” si traduce come “circa uno” (simile al nostro “uno o due”), la parola per “due” significa “un po’ più di uno” (simile al nostro “pochi”), e poi c’è una parola per “molti”.

Questo tipo di percezione non è una "struttura culturale", e nemmeno è una prerogativa umana: molti animali la hanno e la usano; il saper distinguere "ad occhio" le quantità non rende le nostre "capacità aritmetiche" superiori a quelle di un gatto o di un cardellino, come mostra ad esempio il seguente [aneddoto](http://areeweb.polito.it/didattica/polymath/htmlS/argoment/Matematicae/Settembre_07/animali.htm):

http://areeweb.polito.it/didattica/polymath/htmlS/argoment/Matematicae/Settembre_07/animali.htm



Questa è quindi la situazione, diciamo, "di partenza" nell'evoluzione culturale umana: una capacità di percezione immediata di quantità (all'incirca fino a quattro) che comunque non ci distingue dagli altri animali, e una capacità "culturale" di padronanza del concetto di numero praticamente nulla; vediamo quali sono le tappe della "conquista umana dei numeri".



Si può supporre che ben prima del concetto di numero, l'umanità abbia elaborato la "capacità di conteggio"; perché diciamo ciò?

Possiamo immaginare che la necessità di effettuare un qualche tipo di conteggio si sia affermata con l'evolversi di attività umane più complesse, come l'allevamento di animali

Un altro esempio è costituito dai rituali religiosi, dai quali è prescritto il dovere di compiere un certo numero di riti, come il recitare un certo numero di preghiere: il fedele non ha bisogno di saper contare se è munito di uno strumento adatto: un *rosario*. Per enunciare i 99 attributi di Allah o per recitare le 100 eulogie obbligatorie dopo la preghiera, i mussulmani usano dei rosari di 99+1 perle; strumenti simili usano i buddisti ed i cristiani (il rosario indica i *Pater Noster*, *Ave Maria* e *Gloria* da recitare).



A questo modo sono stati contati animali, oggetti, giorni, mesi e così via. Perché parliamo di *contare senza il numero* ? Perché a questo stadio non c'è il concetto astratto di numero, non ci sono *le parole* per indicare i singoli numeri, né tanto meno un sistema articolato di simboli per essi; c'è solo la pratica del mettere in corrispondenza biunivoca due insiemi.



Ci sono quindi degli oggetti (tacche, sassi, conchiglie) che assumono un valore astratto, che vengono considerate non per se stessi, ma come simbolo per qualcos'altro; è questo un passo decisivo nell'evoluzione culturale umana, il passo che potrà portare sia alla nascita del sistema dei numeri, che anche alla *scrittura*, con l'invenzione di simboli che “stiano per” le parole o i suoni della lingua parlata.

Il passo essenziale sarà proprio dare un nome ai singoli numeri, assegnare una parola ad ognuno di essi.

Per prima cosa questa parola sarà un

aggettivo: quando consideriamo le parole “uno”, “due” o “sei” in espressioni come “due cani”, “sei barche”, “un sasso” esse sono aggettivi numerali, sono attributi di altri sostantivi; qui “due” e “sei” hanno lo stesso valore grammaticale di “rosso” o “saporito”.

E’ l'uso del numero come

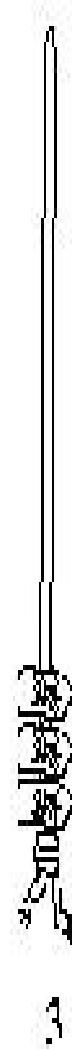
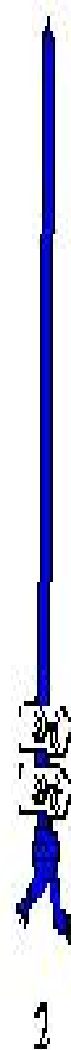
sostantivo che denota sicuramente il passaggio al concetto astratto di numero: quando dico “Il cinque è un numero maggiore di tre”, qui la parole “cinque” e “tre” sono sostantivi, ed è chiaro che la mia asserzione riguarda tutti gli insiemi di cinque e di tre oggetti .



. Il primo problema che si presenta è che se si vuole contare anche arrivando a quantità piuttosto elevate, avere un solo simbolo per ogni unità rende il tutto piuttosto ingombrante: per un gregge di 100 o più pecore diventa un po' difficile procedere con centinaia di sassi o tacche su bastoni.

Il bisogno di un metodo più efficiente si presenta presto.

La soluzione che supera questo problema è quella di usare più simboli, con *valori diversi*; ad esempio un modo ancora in uso presso alcune tribù dell'Africa Occidentale per contare le loro mandrie è quello di infilare conchiglie forate in cordicelle di diverso colore: quelle nella cordicella bianca rappresentano un'unità, ma quelle nella azzurra rappresentano dieci capi di bestiame e quelle in quella rossa cento



Come possiamo vedere nell'esempio precedente, siamo di fronte ad un "contare in base dieci" analogo al nostro modo di rappresentare i numeri con le cifre.

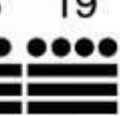
L'uso di una base per contare si è sviluppato in modi diversi in diverse parti del mondo; si rintracciano in varie popolazioni il contare con base 5, oppure 20 (Maya, ad esempio) o 12.

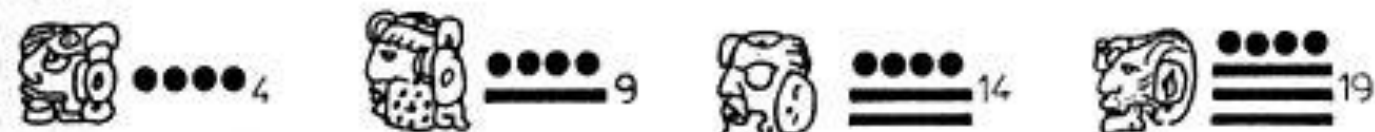
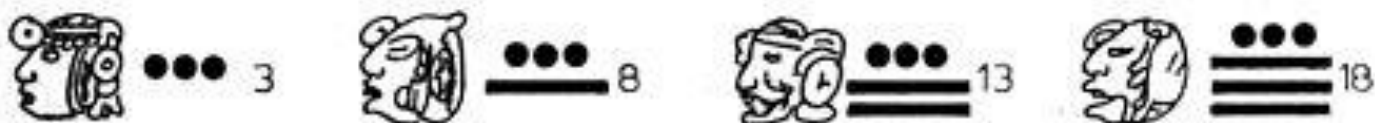
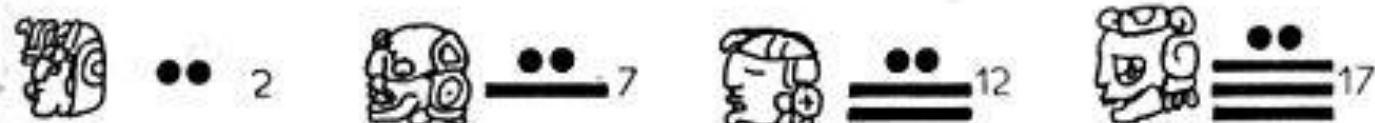
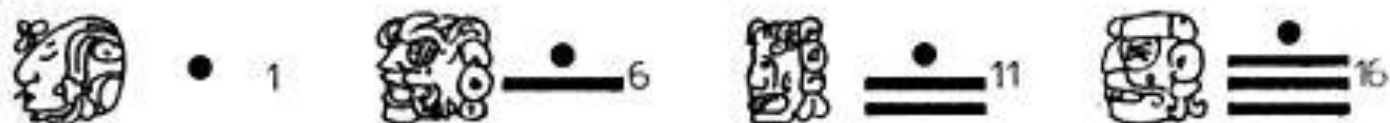
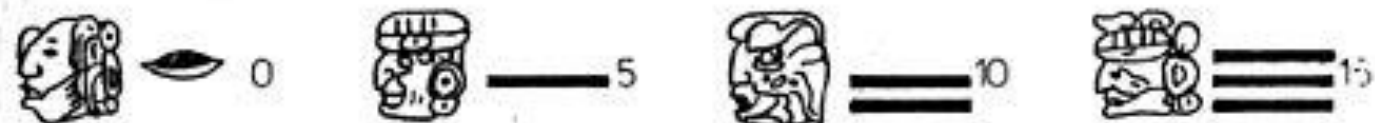
I resti di queste numerazioni rimangono nelle varie lingue; resti di un conteggio in base venti sono le parole francesi come *Quatrevingts* = 80 oppure *Quatrevingts-dix* = 90, o *score* = 20 in inglese.

Resti di un conteggio per dozzine sono la parola *Grosse* (in francese, anche in italiano commerciale "grossa") per indicare 144 (dodici dozzine, 12^2).

Presso i Sumeri era in uso la base 60, della quale ci rimane l'uso nel misurare gli angoli ed il tempo (minuti, secondi), dovuto al fatto che i popoli della Mesopotamia sono stati i più grandi cultori dell'Astronomia nell'antichità

Numerazione Maya

0	1	2	3	4
				
5	6	7	8	9
				
10	11	12	13	14
				
15	16	17	18	19
				



 $4 \times 7,200 = 28,800$

 $17 \times 360 = 6,120$

 $6 \times 20 = 120$

 0

35040

 $2 \times 7,200 = 14,400$

 $0 \times 360 = 0$

 $10 \times 20 = 200$

 0

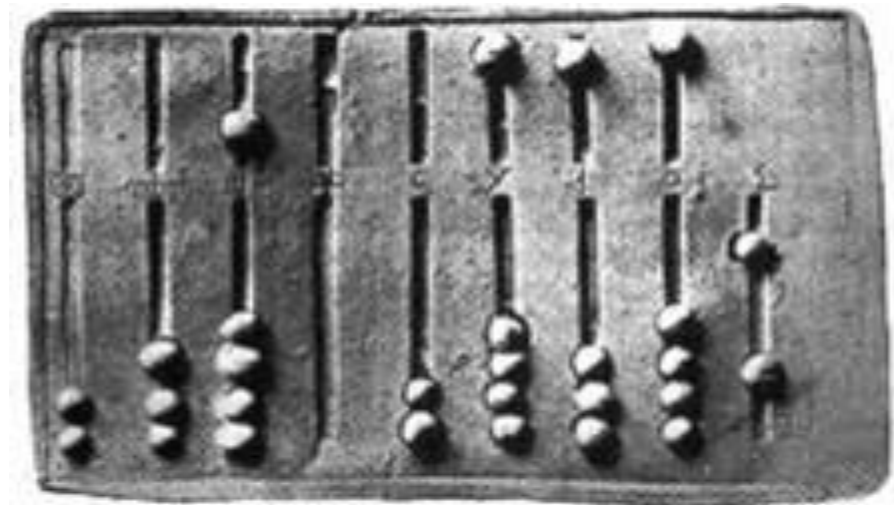
14,600

I metodi di calcolo si sono sviluppati parallelamente ai metodi di rappresentazione numerica, anche se la capacità di eseguire operazioni è certamente più recente, Il primo strumento di calcolo è stato senza dubbio il nostro corpo stesso, e soprattutto le mani. Lo strumento per "far di conto" che ha avuto però una lunghissima vita nel continente europeo (e in varie forme anche altrove) è l'**Abaco a gettoni**.

La parola "abaco" viene dal semitico *abaq*, che significa "polvere", "sabbia", infatti gli abaci più antichi erano tavoli ricoperti da un sottile strato di sabbia sui quali con uno stilo si segnavano i calcoli. Non si sa quale popolo abbia inventato questa potente macchina calcolatrice, forse i babilonesi; fra gli esemplari a nostra disposizione (Maya, Egiziani, Cinesi, Romani...) i più antichi hanno più di 2000 anni.

L'abaco a gettoni , usato in varie forme prima dai Greci, poi dai Romani e rimasto in uso in Europa fino al 1700.

Ecco un esempio di abaco romano:



Il passaggio successivo fu quello di utilizzare delle tavolette di argilla (vedi Fig. 2.15a) su cui venivano disegnate le forme dei gettoni, ottenendo così una delle più antiche forme di "scrittura dei numeri", con la nascita di vere e proprie "cifre" scritte, come simboli numerici.

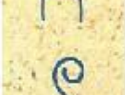


Questo metodo di scrittura cambiò successivamente sotto i Babilonesi, che adottarono invece una più evoluta scrittura cuneiforme



L'altra forma di scrittura numerica più antica sono i geroglifici egizi, anch'essi risalenti a prima del 3000 a.C.,

nei reperti più antichi. I simboli hanno valori fissi e la scrittura è di tipo puramente additivo su base 10.

	= 1		= 10000
	= 10		= 100000
	= 100		= 1000000
	= 1000		

Successivamente la scrittura geroglifica fu parzialmente sostituita dalla **ieratica**, più semplificata, nella quale il sistema di scrittura numerica, anche se sempre additivo su base 10, acquista più simboli, per ridurre il numero dei caratteri necessari a rappresentare i numeri:

1 	10 	100 	1000 
2 	20 	200 	2000 
3 	30 	300 	3000 
4 	40 	400 	4000 
5 	50 	500 	5000 
6 	60 	600 	6000 
7 	70 	700 	7000 
8 	80 	800 	8000 
9 	90 	900 	9000 



Le notazioni greche hanno avuto tre stadi essenziali: per prima fu adottata una notazione additiva in base dieci pura (come quella egizia), poi quella detta acrofonica (il simbolo del numero usava la prima lettera del nome), con base ausiliare 5, che vediamo nella figura seguente:

Ι	Γ	Δ	Ϛ	Η
1	5	10	50	100
Ϟ	Χ	Ϛ	Μ	Ϟ
500	1.000	5.000	10.000	50.000

Qui i simboli richiamano i nomi dei numeri:

5 = Penta , 10 = Deka , 50 = Pentedeka , 100 = Hekaton , 500 = Pentehekaton ,

1000 = Khilioi , 5000 = Pentekhilioi , 10000 = Myrioi , 50000 = Pentemyrioi.

Infine si afferma la scrittura ionica, sempre additiva ed in base dieci, ma che usa tutte le lettere dell'alfabeto greco, assegnando ad ognuna di esse un valore numerico (vedi Fig. 2.18b) e giungendo così ad una certa efficacia rappresentativa, ma aumentando di molto il numero dei simboli usati. Da notare che sono presenti tre lettere arcaiche scomparse dall'uso comune e che rappresentano i numeri 6 (*stigma*, variante grafica del *digamma*), 90 (*koppa*), 900 (*sampì* o *san*) e che dopo un primo periodo in cui si usavano lettere maiuscole, si passò a quelle minuscole:

UNITÀ		DECINE		CENTINAIA	
1	α	10	ι	100	ϱ
2	β	20	κ	200	σ
3	γ	30	λ	300	τ
4	δ	40	μ	400	υ
5	ϵ	50	ν	500	φ
6	ς	60	ξ	600	χ
7	ζ	70	$\omicron$	700	ψ
8	η	80	π	800	ω
9	ϑ	90	φ	900	Ͱ

All'interno di questo sistema qualsiasi numero inferiore a 10.000 poteva venire scritto facilmente con quattro soli caratteri.

Per proseguire si indicavano le decine di migliaia mediante la lettera *M* (iniziale di *myrioi* = miriade) alla quale si sovrapponeva il numero delle decine di migliaia.

Per questo la parola “**miriade**” è rimasta nella nostra lingua per indicare una grande quantità: le miriadi (= decine di migliaia) erano usate per indicare tutti i numeri più grandi.

Le scritture che si affermano nell'area mediterranea sono tutte puramente additive ed in base dieci; lo erano infatti anche le scritture numeriche di Fenici, Ebrei e di altre popolazioni.

Romani non fanno eccezione: le cifre romane sono anch'esse additive in base dieci e con base ausiliare 5; ricordiamo i simboli usati ed i loro valori:

I = 1 ; **V** = 5 ; **X** = 10 ; **L** = 50 ; **C** = 100 ; **D** = 500 ; **M** = 1000.

Esempi: 27 = **XXVII** , 99 = **XCIX** , 588 = **DLXXXVIII**, 1939 = **MCMXXXIX**

I Romani erano (in origine) soprattutto un popolo di pastori, ed il conteggio delle pecore avveniva con l'intaglio di tacche su bastoni: per facilitare la lettura, ogni cinque tacche si faceva una tacca a forma di "V", ed ogni dieci una "X"; poi altre forme vennero introdotte per "50", "100" e così via.

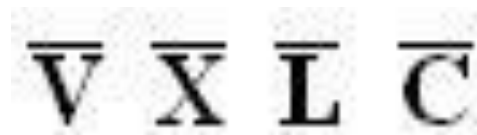
Nel sistema di numerazione romano c'è una novità: la *notazione sottrattiva*:

IV = 4 ; **XIX** = 19.

La notazione sottrattiva è un residuo della pratica dell' intaglio vista sopra; la scrittura " **IV** " invece di " **IIII** " (è da notare che comunque in reperti più antichi si trova anche la notazione **IIII**)



Per rappresentare numeri più grandi il sistema romano ricorre ai seguenti artifici: se si tira una linea sopra un simbolo il suo valore originale viene moltiplicato per 1000; i simboli:



rappresentano i numeri 5.000, 10.000, 50.000 e 100.000 , mentre se si borda una lettera con due linee verticali ai fianchi ed una linea orizzontale soprastante, il suo valore originale viene moltiplicato per 100.000; i simboli:



rappresentano rispettivamente i numeri 500.000, 1.000.000, 5.000.000, 10.000.000, 50.000.000 e 100.000.000 .

Gli antichi romani, infatti, non avevano parole per "*milioni*" o "*miliardi*"; la loro massima espressione numerica erano le "*centinaia di migliaia*". Ad esempio per indicare il numero "*un milione*" essi dicevano "*dieci centinaia di migliaia*".

Il problema con le cifre greche e quelle romane è che esse furono una specie di "vicolo cieco": abbastanza efficaci per rappresentare i numeri, erano però **quasi impossibili da usare per i calcoli**, e il loro uso comporta la separazione fra la *scrittura* dei numeri ed il *calcolo* con essi, che viene invece eseguito con l'abaco.

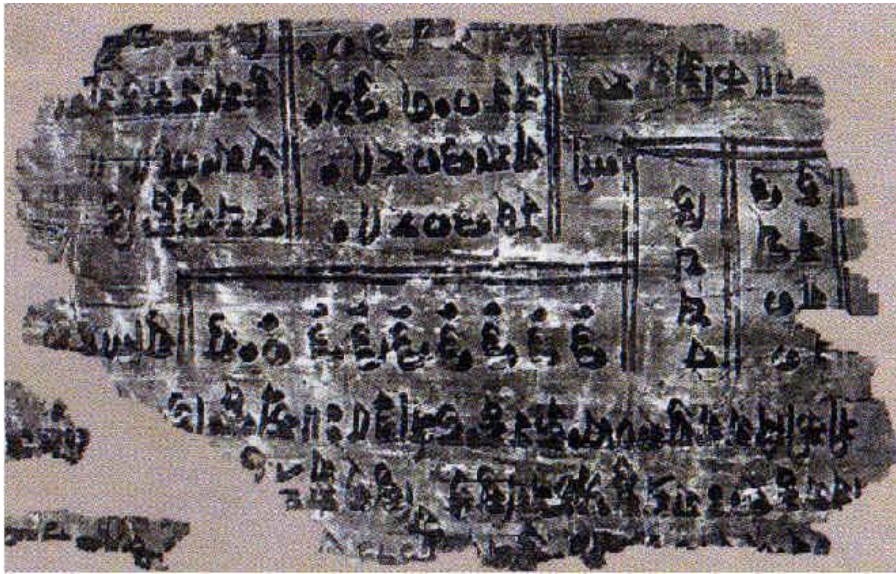
Le nostre cifre: il sistema posizionale

La sua principale idea, come suggerisce il nome, è che i simboli usati per le cifre non hanno un valore fisso: il loro valore dipende dalla loro posizione nella scrittura del numero.

I primi esempi noti di una scrittura numerica che sia basata sui seguenti elementi:

- notazione posizionale,
- base dieci,
- presenza dello zero,
- nove simboli (cifre) oltre lo zero,

risalgono al V secolo d.C. (nel trattato indiano di cosmologia ***Lokavibhaga***, 485 d.C.); questo metodo si diffuse piuttosto rapidamente in India e in Indocina, e già dal secolo successivo si trovano documenti sull'uso di tale cifre per eseguire i conti.



Nel 773, arriva a Bagdad un' ambasciata indiana con un omaggio al califfo Mansour ed ai suoi saggi: il calcolo e le cifre. Quasi un secolo dopo, Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi (morto dopo l'846) scrisse il primo testo in lingua araba presentando la numerazione indiana posizionale nel IX secolo (dal suo nome deriva la parola "algoritmo").

Nel X secolo, il monaco francese Gerbert d'Aurillac apprende il nuovo metodo dai Mori di Spagna e inizia a introdurlo in occidente, specialmente dopo esser divenuto Papa nel 999, col nome di Silvestro II.

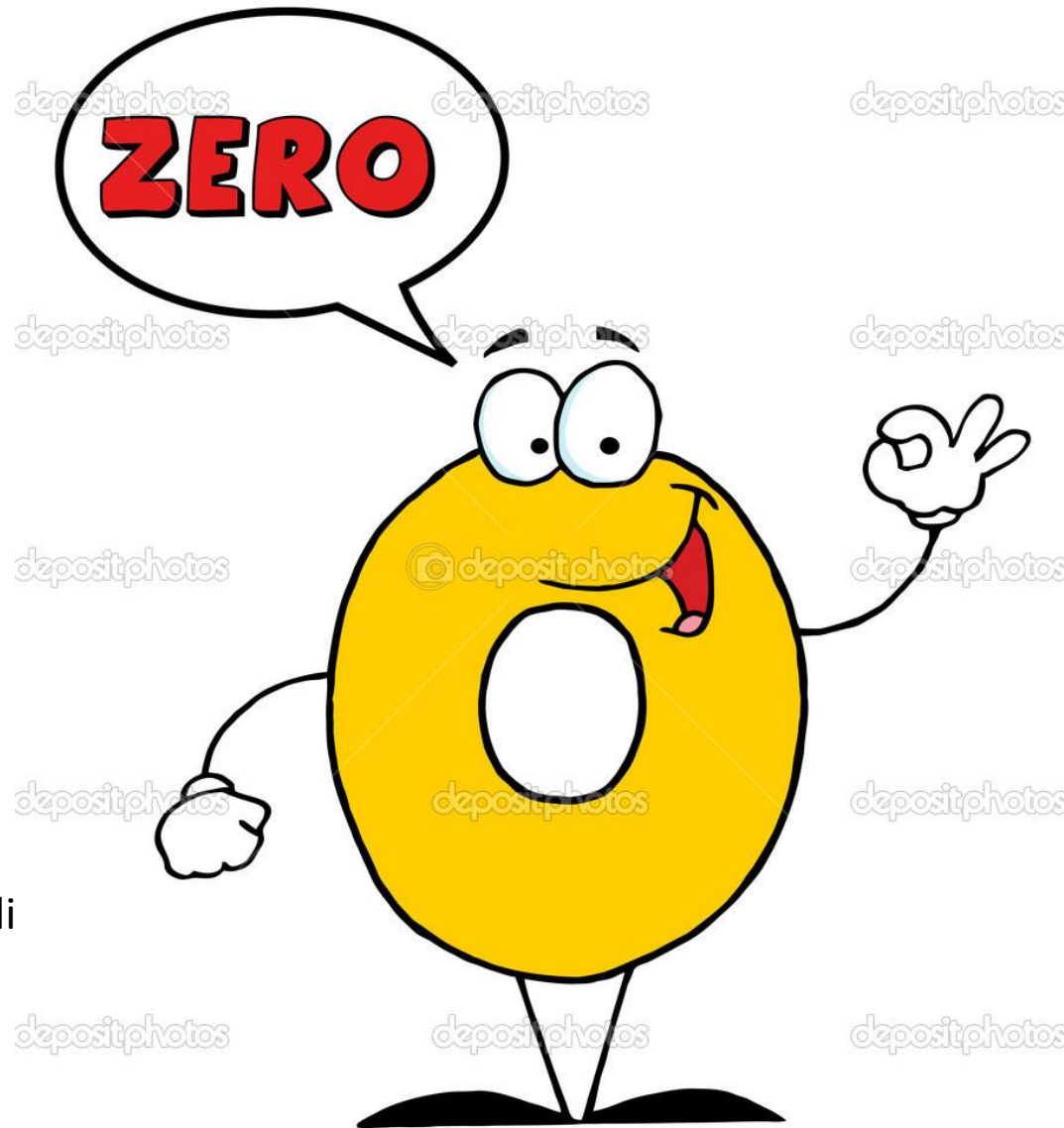
Le tracce di uso della numerazione indo-araba in Europa sono comunque scarse fino al XIII secolo, quando il matematico pisano Leonardo Fibonacci (che aveva viaggiato molto fra gli arabi) scrisse il *Liber Abaci*, che illustra il sistema posizionale ed il suo uso, e che fu il testo che più contribuì alla sua introduzione sistematica in Europa.



L'uso che facciamo tuttora delle cifre di origine indiana mostra la superiorità della scrittura posizionale rispetto a quella additiva romana (due ragioni fra tutte: la facilità nello scrivere numeri grandi e la possibilità di fare i conti usando le cifre scritte).

Comunque il suo uso efficiente richiede una novità: **avere una cifra per il numero zero**. In una notazione additiva, non c'è alcuna necessità di avere un simbolo per lo zero (aggiungere zero non serve a nulla), ma in una posizionale ogni cifra rappresenta il numero delle decine o centinaia o altre potenze del dieci (se la base è dieci), quindi se mancano le potenze di un certo ordine c'è bisogno di una cifra che rappresenti questa assenza:

Senza lo zero come vedremmo la differenza fra 123 e 1203 o 1023 ?



La penetrazione del nuovo sistema in Europa fu abbastanza lenta e all'inizio osteggiata; ancora nel XIV secolo in vari luoghi l'uso delle "cifre arabe" era proibito, temendo che fosse troppo facile alterarle per eseguire truffe.

Anche i cinesi usavano una numerazione posizionale in base dieci, ed arrivarono ad usare lo zero (di derivazione indiana) verso l' VIII secolo d.C. Qualche secolo dopo se ne trovano le tracce anche nella numerazione Maya.

L'uso fattone però da babilonesi, cinesi e Maya fu limitato alla rappresentazione dei numeri, ed è invece nella sua introduzione da parte degli indiani, con un'efficiente notazione posizionale, che lo zero diventa parte di una scrittura che è anche ***strumento di calcolo***.

Un aneddoto narra di un negoziante tedesco del XV secolo che, volendo che il figlio studiasse ciò che serviva per il commercio, chiese consiglio ad un professore di matematica di gran fama nella sua città: questo rispose che se il ragazzo doveva solo apprendere a sommare e sottrarre poteva studiare presso una scuola tedesca, mentre se la sua preparazione doveva arrivare alla moltiplicazione, si sarebbe dovuto rivolgere ad una scuola più specializzata in Italia. L'aneddoto non va probabilmente preso alla lettera, ma illustra come il saper "far di conto" fosse davvero una capacità di pochi, a quel tempo.

Ancora nel Rinascimento si svolgevano gare di calcolo fra "Abacisti" e "Algoristi" (che usavano il calcolo scritto, con le cifre arabe) e l'abaco fu usato ancora a lungo, fino al XVIII secolo.

